S高校数学Ⅱ　確認テスト

# 1　3次式の展開と因数分解，二項定理	氏名		得点	/100

1 次の式を展開せよ。 (各9点×3)

(1) $(2x-y)^3$

(2) $(3a+b)(9a^2-3ab+b^2)$

(3) $(x^6+x^3+1)(x^2+x+1)(x-1)$

2 次の式を因数分解せよ。 (各9点×3)

(1) $8a^3-27$

(2) x^6+7x^3-8

(3) $x^3+2x^2-8x-64$

3 次の問いに答えよ。 ((1)各8点×2，(2)各10点×3)

(1) 次の式を展開せよ。

① $(3x+y)^4$

② $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^5$

(2) 次の式の展開式で，〔　〕内に示した項の係数を求めよ。

① $(2x-3y)^5$ 〔x^3y^2〕

② $(x-y+2z)^7$ 〔$x^2y^3z^2$〕

③ $\left(x-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\right)^8$ 〔x^5〕

# 2　整式の除法，分数式の計算	氏名		得点	/100

1 次の割り算の商と余りを求めよ。(4)は x についての整式とみて計算せよ。　(完答各12点×4)

(1) $(x^3-2x+1)\div(x+1)$

(2) $(x-4x^2+x^3+9)\div(x^2-3)$

(3) $(2x^3+x^2-4x+3)\div(2x-1)$

(4) $(2x^3+x^2y-3xy^2+y^3)\div(2x-y)$

2 次の計算をせよ。　(各12点×2)

(1) $\dfrac{2}{x^2-2x-3}-\dfrac{1}{x^2-1}$

(2) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}$

3 次の問いに答えよ。　(各14点×2)

(1) ある整式 A を整式 x^2-x+2 で割ると，商が $x+1$，余りが $2x-3$ である。整式 A を求めよ。

(2) $2x^3-3$ を x の整式 B で割ると，商が $x-2$，余りが $9x-5$ である。整式 B を求めよ。

S高校数学Ⅱ　確認テスト

# 3　恒等式	氏名		得点	/100

1 次の等式が x についての恒等式になるように，定数 a，b，c の値を定めよ。　（各20点×3）

(1)　$x^2-x+2=ax(x+1)+b(x+1)(x-2)+cx(x-2)$

(2)　$x^3=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$

(3)　$\dfrac{3x+2}{(x-3)(2x+1)}=\dfrac{a}{x-3}+\dfrac{b}{2x+1}$

2 次の等式が k のどんな値に対しても成り立つように，x，y の値を定めよ。　（20点）

$(2k-1)x+(k+3)y-4=0$

3 x についての整式 x^3-2x^2+a が x^2+bx-1 で割り切れるように，定数 a，b の値を定めよ。

（20点）

# 4　等式・不等式の証明	氏名		得点	/100

1 次の等式を証明せよ。　（各10点×2）

(1) $a+b+c=0$ のとき，$a^3+b^3+c^3=3abc$

(2) $\dfrac{x}{b+c}=\dfrac{y}{c+a}=\dfrac{z}{a+b}$ のとき，$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$

2 次の不等式を証明せよ。　（各20点×3）

(1) $x^2+y^2 \geqq 4x-2y-5$

(2) $a>0$，$b>0$ のとき，$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$

(3) $a>0$，$b>0$，$c>0$ のとき，$\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}\right)\left(\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}\right)\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}\right) \geqq 8$

3 $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$ ならば，x，y，z はすべて等しいことを証明せよ。　（20点）

# 5　複素数，２次方程式	氏名		得点	/100

1 次の計算をせよ。（各10点×2）

(1) $(3+4i)(3-4i)$

(2) $\dfrac{2-i}{3+i}$

2 次の問いに答えよ。（各10点×4）

(1) 次の２次方程式を解け。

① $x^2+x+1=0$

② $3x^2-\sqrt{2}x+1=0$

(2) 次の x についての方程式の解を判別せよ。ただし，a は実数の定数とする。

① $\sqrt{3}x^2-6x+3\sqrt{3}=0$

② $ax^2+(a-2)x-1=0$

3 ２次方程式 $2x^2-4x+1=0$ の２つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。（各12点×2）

(1) $\alpha^2+\beta^2$

(2) $\alpha^3+\beta^3$

4 ２次方程式 $x^2-kx+k-1=0$ が異なる２つの正の解をもつように，定数 k の値の範囲を定めよ。

（16点）

# 6　因数定理，高次方程式	氏名		得点	/100

1 次の方程式を解け。（各10点×2）

(1)　$x^3+1=0$　　(2)　$x^4+3x^3+4x^2+3x+1=0$

2 方程式 $x^3=1$ の虚数解の１つを ω とするとき，次の式の値を求めよ。（各10点×2）

(1)　$\omega^2+\omega+1$　　(2)　$\omega^{10}+\omega^5+1$

3 ３次方程式 $2x^3-4x^2+1=0$ の３つの解を α，β，γ とするとき，$\alpha-1$，$\beta-1$，$\gamma-1$ を解にもつ３次方程式を１つつくれ。（15点）

4 整式 $P(x)$ を $x+1$ で割ると４余り，$x-3$ で割ると -2 余る。$P(x)$ を $(x+1)(x-3)$ で割ったときの余りを求めよ。（15点）

5 $x=1-\sqrt{3}\,i$ が方程式 $x^3-3x^2+ax+b=0$ の解であるとき，実数 a，b の値と他の解を求めよ。（各15点）

a，b の値＿＿＿＿＿＿　他の解＿＿＿＿＿＿

7　点と座標，直線の方程式

氏名		得点	/100

1 次の問いに答えよ。　（各10点×3）

(1)　2点A$(1,\ -2)$，B$(4,\ 3)$を結ぶ線分ABを$1:2$に内分する点，外分する点の座標をそれぞれ求めよ。

内分点＿＿＿＿＿＿＿＿　外分点＿＿＿＿＿＿＿＿

(2)　3点$(3,\ 2)$，$(2,\ -1)$，$(-4,\ 5)$を頂点とする三角形の重心の座標を求めよ。

＿＿＿＿＿＿＿＿

2 3点A$(-2,\ 3)$，B$(6,\ -3)$，C$(5,\ 4)$について，次の問いに答えよ。　（各10点×4）

(1)　直線ABの方程式を求めよ。

＿＿＿＿＿＿＿＿

(2)　点Cを通り，直線$x+2y-3=0$に平行な直線，および垂直な直線の方程式を求めよ。

平行＿＿＿＿＿＿＿＿　垂直＿＿＿＿＿＿＿＿

(3)　$\triangle$ABCの面積を求めよ。

＿＿＿＿＿＿＿＿

3 2直線$x-3y-2=0$，$3x+y-1=0$の交点と，点$(2,\ -4)$を通る直線の方程式を求めよ。（15点）

＿＿＿＿＿＿＿＿

4 直線$y=-2x+3$をlとする。lに関して，点A$(4,\ 4)$と対称な点Bの座標を求めよ。　（15点）

＿＿＿＿＿＿＿＿

# 8　円の方程式	氏名		得点	/100

1 次の円の中心の座標，半径を求めよ。 (完答各12点×2)

(1) $(x-1)^2+(y+3)^2=16$

中心＿＿＿＿＿＿＿＿
半径＿＿＿＿＿＿＿＿

(2) $x^2+y^2+4x-10y+24=0$

中心＿＿＿＿＿＿＿＿
半径＿＿＿＿＿＿＿＿

2 次の円の方程式を求めよ。 (各12点×3)

(1) 点$(-3,\ 1)$を中心とし，半径が2の円

(2) 点$(2,\ 4)$を中心とし，原点$(0,\ 0)$を通る円

(3) 2点A$(3,\ 2)$，B$(-5,\ 4)$を直径の両端とする円

3 次の円の方程式を求めよ。 (各12点×2)

(1) 点$(4,\ -2)$を中心とし，y軸に接する円

(2) 中心が直線$y=-2x+1$上にあり，2点$(-2,\ 0)$，$(5,\ 1)$を通る円

4 3直線$3x-2y=0$，$4x-3y=0$，$x-y+1=0$によって囲まれた三角形に外接する円の方程式を求めよ。 (16点)

# 9　円と直線	氏名		得点	/100

1 円 $x^2+y^2=4$ と直線 $y=x+k$ の共有点の個数は，k の値によって，どのように変わるか。（20点）

2 直線 $x+2y+7=0$ が，円 $x^2+y^2+2x-4y-18=0$ によって切り取られてできる線分の長さを求めよ。（20点）

3 次の問いに答えよ。（各20点×2）

(1) 円 $x^2+y^2=25$ 上の点 $(-4,\ 3)$ における接線の方程式を求めよ。

(2) 点 $(1,\ 3)$ から円 $x^2+y^2=9$ に引いた接線の方程式を求めよ。

4 点 $(-4,\ 3)$ を中心として，円 $x^2+y^2=4$ に接する円の方程式を求めよ。（20点）

10　軌跡と領域

氏名		得点	/100

1 次の点Pの軌跡を求めよ。（各12点×2）

(1)　2点A$(3,\ 0)$，B$(0,\ 6)$から等距離にある点P

(2)　2点A$(2,\ 0)$，B$(-4,\ 0)$からの距離の比が$2:1$である点P

2 次の問いに答えよ。（各15点×2）

(1)　点A$(6,\ 0)$と，円$x^2+y^2=9$の周上を動く点Pがある。このとき，線分APを$1:2$に内分する点Qの軌跡を求めよ。

(2)　円$x^2+y^2+2px-6py+5p^2+5p-5=0$の中心は，$p$の値が変化するとき，どのような図形を描くか。

3 次の不等式の表す領域を図示せよ。（各15点×2）

(1)　$x^2+y^2-4y\leqq 0$　　(2)　$(2x-y)(x+3y-21)\geqq 0$

4 x，yが4つの不等式$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x-2y+2\geqq 0$，$2x+y-6\leqq 0$を満たすとき，$x+y$のとる値の最大値，最小値を求めよ。（完答16点）

最大値＿＿＿＿＿＿＿＿　最小値＿＿＿＿＿＿＿＿

S高校数学Ⅱ　確認テスト

# 1　3次式の展開と因数分解，二項定理	氏名		得点	/100

1 次の式を展開せよ。 （各9点×3）

(1) $(2x-y)^3$

答 $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$

(2) $(3a+b)(9a^2-3ab+b^2)$

答 $27a^3+b^3$

(3) $(x^6+x^3+1)(x^2+x+1)(x-1)$

与式$=(x^6+x^3+1)(x^3-1)=(x^3-1)\{(x^3)^2+x^3\cdot1+1^2\}$

$=(x^3)^3-1^3=x^9-1$

答 x^9-1

2 次の式を因数分解せよ。 （各9点×3）

(1) $8a^3-27$

答 $(2a-3)(4a^2+6a+9)$

(2) x^6+7x^3-8　与式$=(x^3+8)(x^3-1)$

$=(x+2)(x^2-2x+4)(x-1)(x^2+x+1)$

$=(x+2)(x-1)(x^2-2x+4)(x^2+x+1)$

答 $(x+2)(x-1)(x^2-2x+4)(x^2+x+1)$

(3) $x^3+2x^2-8x-64$

与式$=x^3-64+2x(x-4)=(x-4)(x^2+4x+16)+2x(x-4)$

$=(x-4)(x^2+6x+16)$

答 $(x-4)(x^2+6x+16)$

3 次の問いに答えよ。 （(1)各8点×2，(2)各10点×3）

(1) 次の式を展開せよ。

① $(3x+y)^4$

答 $81x^4+108x^3y+54x^2y^2+12xy^3+y^4$

② $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^5$

答 $x^5-\dfrac{5}{2}x^4+\dfrac{5}{2}x^3-\dfrac{5}{4}x^2+\dfrac{5}{16}x-\dfrac{1}{32}$

(2) 次の式の展開式で，〔　〕内に示した項の係数を求めよ。

① $(2x-3y)^5$　〔x^3y^2〕

一般項は ${}_5C_r(2x)^{5-r}\cdot(-3y)^r=2^{5-r}\cdot(-3)^r{}_5C_rx^{5-r}\cdot y^r$

$r=2$ を代入して，$2^3\cdot(-3)^2\cdot{}_5C_2=720$

答 720

② $(x-y+2z)^7$　〔$x^2y^3z^2$〕

$\dfrac{7!}{2!3!2!}x^2\cdot(-y)^3\cdot(2z)^2=-840x^2y^3z^2$

答 -840

③ $\left(x-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\right)^8$　〔x^5〕　一般項は $\dfrac{8!}{p!q!r!}x^p\cdot\left(-\dfrac{1}{x}\right)^q\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^r=\dfrac{(-1)^q\cdot8!}{p!q!r!}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^r\cdot x^{p-q}$

$p+q+r=8$，$p-q=5$ のとき，$(p,\ q,\ r)=(6,\ 1,\ 1)$，$(5,\ 0,\ 3)$ より，

$\dfrac{(-1)\cdot8!}{6!1!1!}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{8!}{5!0!3!}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=-28+7=-21$

答 -21

2　整式の除法，分数式の計算

氏名		得点	/100

1 次の割り算の商と余りを求めよ。(4)は x についての整式とみて計算せよ。　(完答各12点×4)

(1) $(x^3-2x+1)\div(x+1)$

商　x^2-x-1
余り　2

(2) $(x-4x^2+x^3+9)\div(x^2-3)$

商　$x-4$
余り　$4x-3$

(3) $(2x^3+x^2-4x+3)\div(2x-1)$

商　$x^2+x-\dfrac{3}{2}$
余り　$\dfrac{3}{2}$

(4) $(2x^3+x^2y-3xy^2+y^3)\div(2x-y)$

商　x^2+xy-y^2
余り　0

2 次の計算をせよ。　(各12点×2)

(1) $\dfrac{2}{x^2-2x-3}-\dfrac{1}{x^2-1}$

$$与式=\frac{2}{(x+1)(x-3)}-\frac{1}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{2(x-1)-(x-3)}{(x+1)(x-1)(x-3)}$$
$$=\frac{x+1}{(x+1)(x-1)(x-3)}=\frac{1}{(x-1)(x-3)}$$

$\dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$

(2) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}$

$$与式=\frac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}}$$
$$=\frac{x-1}{x-1-x}$$
$$=-x+1$$

$-x+1$

3 次の問いに答えよ。　(各14点×2)

(1) ある整式 A を整式 x^2-x+2 で割ると，商が $x+1$，余りが $2x-3$ である。整式 A を求めよ。

$A=(x^2-x+2)(x+1)+2x-3$
$\quad=x^3+3x-1$

x^3+3x-1

(2) $2x^3-3$ を x の整式 B で割ると，商が $x-2$，余りが $9x-5$ である。整式 B を求めよ。

$2x^3-3=B(x-2)+9x-5$ より，
$\quad B=(2x^3-9x+2)\div(x-2)=2x^2+4x-1$

$2x^2+4x-1$

3　恒等式

氏名		得点	/100

1 次の等式が x についての恒等式になるように，定数 a，b，c の値を定めよ。　（各20点×3）

(1) $x^2-x+2=ax(x+1)+b(x+1)(x-2)+cx(x-2)$

$x=0$ を代入して，$2=-2b$ より，$b=-1$

$x=-1$ を代入して，$4=3c$ より，$c=\frac{4}{3}$

$x=2$ を代入して，$4=6a$ より，$a=\frac{2}{3}$

$a=\frac{2}{3}$，$b=-1$，$c=\frac{4}{3}$

(2) $x^3=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$

$x=1$ を代入して，$1=c$ …①

$x=0$ を代入して，$0=-1+a-b+c$ より，$a-b+c=1$ …②

$x=2$ を代入して，$8=1+a+b+c$ より，$a+b+c=7$ …③

①，②，③より，$a=3$，$b=3$，$c=1$

$a=3$，$b=3$，$c=1$

(3) $\dfrac{3x+2}{(x-3)(2x+1)}=\dfrac{a}{x-3}+\dfrac{b}{2x+1}$

(右辺)$=\dfrac{(2a+b)x+a-3b}{(x-3)(2x+1)}$

$\begin{cases} 2a+b=3 \\ a-3b=2 \end{cases}$ より，$a=\frac{11}{7}$，$b=-\frac{1}{7}$

$a=\frac{11}{7}$，$b=-\frac{1}{7}$

2 次の等式が k のどんな値に対しても成り立つように，x，y の値を定めよ。　（20点）

$(2k-1)x+(k+3)y-4=0$ …①　　①を k について整理すると，

$(2x+y)k-x+3y-4=0$　これが k についての恒等式になるから，

$\begin{cases} 2x+y=0 \\ -x+3y-4=0 \end{cases}$

連立させて，$x=-\frac{4}{7}$，$y=\frac{8}{7}$

$x=-\frac{4}{7}$，$y=\frac{8}{7}$

3 x についての整式 x^3-2x^2+a が x^2+bx-1 で割り切れるように，定数 a，b の値を定めよ。　（20点）

商を $x+c$ とすると，$x^3-2x^2+a=(x^2+bx-1)(x+c)$ とおける。

$x^3-2x^2+a=x^3+(b+c)x^2+(bc-1)x-c$ が x についての恒等式になるから，

$-2=b+c$ …①　$0=bc-1$ …②　$a=-c$ …③

①，②，③より，$a=1$，$b=-1$，$c=-1$

$a=1$，$b=-1$

# 4　等式・不等式の証明	氏名		得点	/100

1 次の等式を証明せよ。 （各10点×2）

(1) $a+b+c=0$ のとき，$a^3+b^3+c^3=3abc$

(左辺)−(右辺)$=a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

よって，$a^3+b^3+c^3=3abc$

(2) $\dfrac{x}{b+c}=\dfrac{y}{c+a}=\dfrac{z}{a+b}$ のとき，$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$

$\dfrac{x}{b+c}=\dfrac{y}{c+a}=\dfrac{z}{a+b}=k$ とおくと，$x=(b+c)k$，$y=(c+a)k$，$z=(a+b)k$

(左辺)$=(b^2-c^2)k+(c^2-a^2)k+(a^2-b^2)k=0=$(右辺)

よって，$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$

2 次の不等式を証明せよ。 （各20点×3）

(1) $x^2+y^2\geqq 4x-2y-5$

(左辺)−(右辺)$=x^2+y^2-4x+2y+5=(x-2)^2+(y+1)^2\geqq 0$

よって，$x^2+y^2\geqq 4x-2y-5$

等号は，$x=2$，$y=-1$ のとき成立。

(2) $a>0$，$b>0$ のとき，$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$

(左辺)$^2-$(右辺)$^2=a^2+2ab+b^2-4ab=(a-b)^2\geqq 0$

よって，$(a+b)^2\geqq(2\sqrt{ab})^2$　$a+b>0$，$2\sqrt{ab}>0$ だから，$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$

等号は，$a=b$ のとき成立。

(3) $a>0$，$b>0$，$c>0$ のとき，$\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}\right)\left(\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}\right)\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}\right)\geqq 8$

$\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}\geqq 2\sqrt{\dfrac{c}{a}}$，$\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}\geqq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}}$，$\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}\geqq 2\sqrt{\dfrac{b}{c}}$ より，

(左辺)$\geqq 2\sqrt{\dfrac{c}{a}}\times 2\sqrt{\dfrac{a}{b}}\times 2\sqrt{\dfrac{b}{c}}=8$

よって，$\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}\right)\left(\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}\right)\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}\right)\geqq 8$　　等号は，$a=b=c$ のとき成立。

3 $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$ ならば，x，y，z はすべて等しいことを証明せよ。 （20点）

$x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$ より，$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$

$\dfrac{1}{2}(x-y)^2+\dfrac{1}{2}(y-z)^2+\dfrac{1}{2}(z-x)^2=0$

ゆえに，$x-y=0$，$y-z=0$，$z-x=0$

したがって，$x=y=z$

# 5　複素数，２次方程式	氏名		得点	/100

1 次の計算をせよ。　　（各10点×2）

(1) $(3+4i)(3-4i)$

与式$=9-16i^2=9+16=25$

25

(2) $\dfrac{2-i}{3+i}$　与式$=\dfrac{(2-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\dfrac{5-5i}{10}=\dfrac{1-i}{2}$

$\dfrac{1-i}{2}$

2 次の問いに答えよ。　　（各10点×4）

(1) 次の２次方程式を解け。

① $x^2+x+1=0$

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

② $3x^2-\sqrt{2}\,x+1=0$

$x=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{10}\,i}{6}$

(2) 次の x についての方程式の解を判別せよ。ただし，a は実数の定数とする。

① $\sqrt{3}\,x^2-6x+3\sqrt{3}=0$

$\dfrac{D}{4}=(-3)^2-\sqrt{3}\cdot3\sqrt{3}$

$=0$

重解をもつ

② $ax^2+(a-2)x-1=0$

［１］ $a=0$ のとき，$-2x-1=0$ より，

１つの実数解をもつ。

［２］ $a\neq0$ のとき，$D=(a-2)^2+4a=a^2+4>0$

より，異なる２つの実数解をもつ。

$a=0$ のとき，1つの実数解をもつ

$a\neq0$ のとき，異なる２つの実数解をもつ

3 ２次方程式 $2x^2-4x+1=0$ の２つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。　（各12点×2）

(1) $\alpha^2+\beta^2$

$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=\dfrac{1}{2}$ より，

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\cdot\dfrac{1}{2}=3$

3

(2) $\alpha^3+\beta^3$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=2^3-3\cdot\dfrac{1}{2}\cdot2=5$

5

4 ２次方程式 $x^2-kx+k-1=0$ が異なる２つの正の解をもつように，定数 k の値の範囲を定めよ。　（16点）

異なる２つの正の解を α，β とする。

$\alpha+\beta=k>0$，$\alpha\beta=k-1>0$ より，$k>1$ …①

$D=(-k)^2-4(k-1)=k^2-4k+4=(k-2)^2>0$

よって，$k\neq2$ …②　①，②より，$1<k<2$，$2<k$

$1<k<2$，$2<k$

6　因数定理，高次方程式

氏名		得点	/100

1 次の方程式を解け。（各10点×2）

(1) $x^3+1=0$

$(x+1)(x^2-x+1)=0$ より，

$x=-1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

$x=-1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

(2) $x^4+3x^3+4x^2+3x+1=0$

$(x+1)^2(x^2+x+1)=0$ より，

$x=-1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

$x=-1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

2 方程式 $x^3=1$ の虚数解の1つを ω とするとき，次の式の値を求めよ。（各10点×2）

(1) $\omega^2+\omega+1$

$\omega^3=1$ より，$\omega^3-1=0$

よって，$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

$\omega\neq1$ より，$\omega^2+\omega+1=0$

0

(2) $\omega^{10}+\omega^5+1$

与式$=\omega\times(\omega^3)^3+\omega^2\times\omega^3+1=\omega+\omega^2+1=0$

0

3 3次方程式 $2x^3-4x^2+1=0$ の3つの解を α，β，γ とするとき，$\alpha-1$，$\beta-1$，$\gamma-1$ を解にもつ3次方程式を1つつくれ。$\alpha-1=X$，$\beta-1=Y$，$\gamma-1=Z$ とおく。（15点）

$\alpha+\beta+\gamma=2$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$，$\alpha\beta\gamma=-\dfrac{1}{2}$ より，

$X+Y+Z=-1$，$XY+YZ+ZX=-1$，$XYZ=\dfrac{1}{2}$

$x^3-(-1)x^2+(-1)x-\dfrac{1}{2}=0$ より，$2x^3+2x^2-2x-1=0$

（例）$2x^3+2x^2-2x-1=0$

4 整式 $P(x)$ を $x+1$ で割ると4余り，$x-3$ で割ると -2 余る。$P(x)$ を $(x+1)(x-3)$ で割ったときの余りを求めよ。（15点）

$P(x)=(x+1)(x-3)Q(x)+ax+b$ とおける。

$P(-1)=4$ より，$-a+b=4$ …①　$P(3)=-2$ より，$3a+b=-2$

①，②より，$a=-\dfrac{3}{2}$，$b=\dfrac{5}{2}$

$-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{5}{2}$

5 $x=1-\sqrt{3}\,i$ が方程式 $x^3-3x^2+ax+b=0$ の解であるとき，実数 a，b の値と他の解を求めよ。（各15点）

$x=1\pm\sqrt{3}\,i$ を解にもつ2次方程式は，$x^2-2x+4=0$ より，

$x^3-3x^2+ax+b=(x^2-2x+4)(x-1)+(a-6)x+b+4$

x^2-2x+4 で割った余りは0より，$a-6=0$，$b+4=0$　すなわち，$a=6$，$b=-4$

他の解は，$x=1$，$1+\sqrt{3}\,i$

a，b の値　$a=6$，$b=-4$　　他の解　$x=1$，$1+\sqrt{3}\,i$

7　点と座標，直線の方程式

氏名		得点	/100

1 次の問いに答えよ。（各10点×3）

(1)　2点A(1，−2)，B(4，3)を結ぶ線分ABを1：2に内分する点，外分する点の座標をそれぞれ求めよ。

内分点 $\left(2,\ -\dfrac{1}{3}\right)$　　外分点 $(-2,\ -7)$

(2)　3点(3，2)，(2，−1)，(−4，5)を頂点とする三角形の重心の座標を求めよ。

$\left(\dfrac{3+2-4}{3},\ \dfrac{2-1+5}{3}\right)=\left(\dfrac{1}{3},\ 2\right)$

$\left(\dfrac{1}{3},\ 2\right)$

2 3点A(−2，3)，B(6，−3)，C(5，4)について，次の問いに答えよ。（各10点×4）

(1)　直線ABの方程式を求めよ。

$y-3=\dfrac{-3-3}{6-(-2)}\{x-(-2)\}$ より，$y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{2}$

$y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{2}$

(2)　点Cを通り，直線 $x+2y-3=0$ に平行な直線，および垂直な直線の方程式を求めよ。

平行な直線　$1\cdot(x-5)+2(y-4)=0$　より，$x+2y-13=0$

垂直な直線　$2(x-5)-1\cdot(y-4)=0$　より，$2x-y-6=0$

平行 $x+2y-13=0$　　垂直 $2x-y-6=0$

(3)　△ABCの面積を求めよ。

直線AB：$3x+4y-6=0$ と点Cの距離は，$d=\dfrac{|3\times5+4\times4-6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=5$

AB＝10 より，$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times10\times5=25$

25

3 2直線 $x-3y-2=0$，$3x+y-1=0$ の交点と，点(2，−4)を通る直線の方程式を求めよ。（15点）

$x-3y-2+k(3x+y-1)=0$ が，(2，−4)を通ることから，$12+k=0$，$k=-12$

$x-3y-2-12(3x+y-1)=0$ より，$7x+3y-2=0$

$7x+3y-2=0$

4 直線 $y=-2x+3$ を l とする。l に関して，点A(4，4)と対称な点Bの座標を求めよ。（15点）

B$(a,\ b)$とする。ABの中点が l 上より，$\dfrac{4+b}{2}=-(4+a)+3$，$2a+b=-6$ …①

$AB\perp l$ より，$\dfrac{b-4}{a-4}\times(-2)=-1$，$a-2b=-4$ …②

①，②より，$a=-\dfrac{16}{5}$，$b=\dfrac{2}{5}$

$\left(-\dfrac{16}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$

8　円の方程式

氏名		得点	/100

1 次の円の中心の座標，半径を求めよ。 (完答各12点×2)

(1)　$(x-1)^2+(y+3)^2=16$

中心　$(1,\ -3)$

半径　4

(2)　$x^2+y^2+4x-10y+24=0$

$(x+2)^2+(y-5)^2=5$

中心　$(-2,\ 5)$

半径　$\sqrt{5}$

2 次の円の方程式を求めよ。 (各12点×3)

(1)　点$(-3,\ 1)$を中心とし，半径が 2 の円

$\{x-(-3)\}^2+(y-1)^2=2^2$ より，

$(x+3)^2+(y-1)^2=4$

$(x+3)^2+(y-1)^2=4$

(2)　点$(2,\ 4)$を中心とし，原点$(0,\ 0)$を通る円

$(x-2)^2+(y-4)^2=r^2$ とおける。

$(0,\ 0)$を通るから，$(-2)^2+(-4)^2=r^2$，$r^2=20$

よって，$(x-2)^2+(y-4)^2=20$

$(x-2)^2+(y-4)^2=20$

(3)　2 点A$(3,\ 2)$，B$(-5,\ 4)$を直径の両端とする円

中心は ABの中点より，$\left(\dfrac{3-5}{2},\ \dfrac{2+4}{2}\right)=(-1,\ 3)$

$\mathrm{AB}=2\sqrt{17}$ より，半径は $\sqrt{17}$

よって，$(x+1)^2+(y-3)^2=(\sqrt{17})^2$

$(x+1)^2+(y-3)^2=17$

3 次の円の方程式を求めよ。 (各12点×2)

(1)　点$(4,\ -2)$を中心とし，y 軸に接する円

半径は 4 より，$(x-4)^2+(y+2)^2=4^2$

$(x-4)^2+(y+2)^2=16$

(2)　中心が直線 $y=-2x+1$ 上にあり，2 点$(-2,\ 0)$，$(5,\ 1)$を通る円

中心を$(t,\ -2t+1)$とおくと，円の方程式は，$(x-t)^2+(y+2t-1)^2=r^2$

$(-2,\ 0)$を通るから，$(-2-t)^2+(2t-1)^2=r^2$ …①

$(5,\ 1)$を通るから，$(5-t)^2+4t^2=r^2$ …②

①，②より，$t=2$，$r^2=25$

$(x-2)^2+(y+3)^2=25$

4 3 直線 $3x-2y=0$，$4x-3y=0$，$x-y+1=0$ によって囲まれた三角形に外接する円の方程式を求めよ。 (16点)

直線の交点を求めて，三角形の 3 頂点は，$(0,\ 0)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 4)$

円 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ が 3 頂点を通ることから，

$\begin{cases} c=0 & \cdots① \\ 13+2a+3b+c=0 & \cdots② \\ 25+3a+4b+c=0 & \cdots③ \end{cases}$　①，②，③より，$\begin{cases} a=-23 \\ b=11 \\ c=0 \end{cases}$

$x^2+y^2-23x+11y=0$

# 9　円と直線	氏名		得点	/100

1 円 $x^2+y^2=4$ …① と直線 $y=x+k$ …② の共有点の個数は，k の値によって，どのように変わるか。（20点）

①，②より，y を消去すると，$x^2+(x+k)^2=4$，$2x^2+2kx+k^2-4=0$ …③

2次方程式③について，

$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-4)=-k^2+8$

$=-(k+2\sqrt{2})(k-2\sqrt{2})$

$-2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$ のとき，2個

$k=\pm2\sqrt{2}$ のとき，1個

$k<-2\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}<k$ のとき，0個

2 直線 $x+2y+7=0$ が，円 $x^2+y^2+2x-4y-18=0$ によって切り取られてできる線分の長さを求めよ。（20点）

$(x+1)^2+(y-2)^2=23$ より，中心$(-1,\ 2)$，半径 $r=\sqrt{23}$

中心と直線の距離は，$d=\frac{|-1+2\times2+7|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\sqrt{5}$

線分の長さは，$2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{3}$

$2\sqrt{3}$

3 次の問いに答えよ。（各20点×2）

(1) 円 $x^2+y^2=25$ 上の点$(-4,\ 3)$における接線の方程式を求めよ。

$-4x+3y=25$ より，

$4x-3y+25=0$

$4x-3y+25=0$

(2) 点$(1,\ 3)$から円 $x^2+y^2=9$ に引いた接線の方程式を求めよ。

接点を$(a,\ b)$とすると，接線の方程式は，$ax+by=9$

$(1,\ 3)$を通るから，$a+3b=9$ …①

$(a,\ b)$は円周上の点より，$a^2+b^2=9$ …②

①，②より，$(a,\ b)=(0,\ 3)$，$\left(\frac{9}{5},\ \frac{12}{5}\right)$

$y=3$，$3x+4y-15=0$

4 点$(-4,\ 3)$を中心として，円 $x^2+y^2=4$ に接する円の方程式を求めよ。（20点）

求める円の半径を R とする。

円 $x^2+y^2=4$ の半径は，$r=2$

中心間の距離は，$d=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$

外接するとき，$R+r=d$ より，$R+2=5$，$R=3$

内接するとき，$R-r=d$ より，$R-2=5$，$R=7$

$(x+4)^2+(y-3)^2=9$

$(x+4)^2+(y-3)^2=49$

10　軌跡と領域

氏名		得点	/100

1 次の点Pの軌跡を求めよ。　**Pの座標を$(x,\ y)$とおく。**　(各12点×2)

(1)　2点A(3, 0)，B(0, 6)から等距離にある点P

AP＝BP より，$AP^2=BP^2$　　$(x-3)^2+y^2=x^2+(y-6)^2$

よって，$2x-4y+9=0$

直線 $2x-4y+9=0$

(2)　2点A(2, 0)，B(−4, 0)からの距離の比が2：1である点P

AP＝2BP より，$AP^2=4BP^2$　　$(x-2)^2+y^2=4\{(x+4)^2+y^2\}$

よって，$(x+6)^2+y^2=16$

中心(−6, 0)，半径4の円

2 次の問いに答えよ。　(各15点×2)

(1)　点A(6, 0)と，円$x^2+y^2=9$の周上を動く点Pがある。このとき，線分APを1：2に内分する点Qの軌跡を求めよ。　**P，Qの座標をそれぞれ$(s,\ t)$，$(x,\ y)$とおく。**

$(x,\ y)=\left(\dfrac{12+s}{3},\ \dfrac{t}{3}\right)$ より，$s=3x-12$ …①　$t=3y$ …②

また，$s^2+t^2=9$…③　①，②を③に代入して，$(3x-12)^2+(3y)^2=9$

よって，$(x-4)^2+y^2=1$

中心(4, 0)，半径1の円

(2)　円$x^2+y^2+2px-6py+5p^2+5p-5=0$の中心は，$p$の値が変化するとき，どのような図形を描くか。

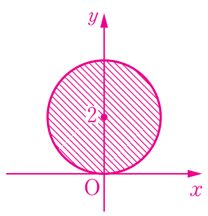
中心の座標を$(x,\ y)$とする。円の式を整理すると，$(x+p)^2+(y-3p)^2=5p^2-5p+5$ より，

中心は，$(-p,\ 3p)$　　$x=-p$，$y=3p$ より p を消去して，$y=-3x$

直線 $3x+y=0$

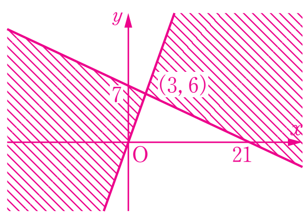
3 次の不等式の表す領域を図示せよ。　(各15点×2)

(1)　$x^2+y^2-4y\leqq 0$



(境界を含む)

(2)　$(2x-y)(x+3y-21)\geqq 0$



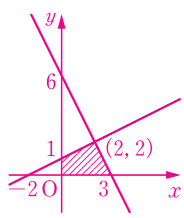
(境界を含む)

4 x，yが4つの不等式$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x-2y+2\geqq 0$，$2x+y-6\leqq 0$を満たすとき，$x+y$のとる値の最大値，最小値を求めよ。　(完答16点)

$x+y=k$ とおくと，$y=-x+k$ …①

①が(2, 2)を通るとき最大

①が(0, 0)を通るとき最小



最大値　**4　$(x=2,\ y=2)$**　　最小値　**0　$(x=0,\ y=0)$**