

1. 多項式の展開 (1)

基本ワーク

1 例題 多項式と単項式の乗法・除法

次の計算をせよ。

$$(1) 3a(a+5b) \quad (2) (3ab+8b) \times ab^2$$

$$(3) (6a^2+8ab) \div 2a \quad (4) (4x^2-8xy) \div \frac{4}{3}x$$

【考え方】 (1) 与式 $=3a \times a + 3a \times 5b$ (3) 与式 $=\frac{6a^2}{2a} + \frac{8ab}{2a}$

(4) $\frac{4}{3}x$ の逆数は $\frac{3}{4x}$ だから、与式 $=(4x^2-8xy) \times \frac{3}{4x}$

2 次の計算をせよ。

$$(1) 4a(a+5) \quad (2) (6a-7b) \times (-a)$$

$$(3) -5x(x^2-6x) \quad (4) -3x(x-y+1)$$

3 次の計算をせよ。

$$(1) (15ab-20a) \div 5a \quad (2) (-12x^3+3x^2) \div (-3x)$$

$$(3) (3a^2+7a) \div \frac{1}{3}a \quad (4) (6a^2b+24ab^2) \div \frac{3}{2}ab$$

4 例題 多項式と単項式の四則混合計算

次の計算をせよ。

$$(1) 3x(2x-1)+4x(2x-3)$$

$$(2) 2a(2a+b)-3a(a-2b)$$

【考え方】 分配法則を利用してかっこをはずし、同類項をまとめる。

5 次の計算をせよ。

$$(1) -2x(3x-4)+4x(x+2)$$

$$(2) 3x(2x+y)-4x(2x-3y)$$

$$(3) 4b(3a-b)-5b(2a-5b)$$

ポイント 乗法・除法

● 多項式 \times 単項式……分配法則を利用して、多項式の各項に単項式をかける。

● 分配法則

$$A(B+C)=AB+AC$$

$$(B+C)A=BA+CA$$

例 $2a(a+3b)$

$$=2a \times a + 2a \times 3b$$

$$=2a^2+6ab$$

● 多項式 \div 単項式

① 多項式の各項を単項式で割る。

例 $(2ab+4b) \div 2b$

$$= \frac{2ab}{2b} + \frac{4b}{2b}$$

$$=a+2$$

② 割る式の逆数をかける。

例 $(4a^2+6a) \div \frac{2}{3}a$

$$=(4a^2+6a) \times \frac{3}{2a}$$

ポイント 四則計算

● 四則混合計算……分配法則

$$a(b+c)=ab+ac$$

を利用して、かっこをはずしてから、同類項をまとめる。

例 $2a(a-2b)+3a(a+b)$

$$=2a^2-4ab+3a^2+3ab$$

$$=5a^2-ab$$

基本ワーク

6 例題 分配法則による多項式の展開

次の式を展開せよ。

- (1) $(x+2)(y+5)$
 (2) $(x+y)(x-y+4)$

考え方 一方の式を1つの文字におきかえ、分配法則を利用して展開する。(2)は、同類項をまとめる。

7 次の式を展開せよ。

- (1) $(x-2)(y+3)$
 (2) $(7x+1)(5x-3)$
 (3) $(3x+7y)(x-7y)$
 (4) $(x+2)(x^2-2x+4)$

8 例題 $(x+a)(x+b)$ の展開

次の式を展開せよ。

- (1) $(x+1)(x+2)$ (2) $(x-3)(x+5)$
 (3) $(2x+3)(2x-5)$ (4) $(3x-5)(3x-7)$

考え方 (1) 公式(1)にあてはめると、
 与式 $=x^2+(1+2)x+1 \times 2$
 (3) 与式 $= (2x)^2+(3-5) \times 2x+3 \times (-5)$

9 次の式を展開せよ。

- (1) $(x+3)(x+5)$ (2) $(x-5)(x+1)$
 (3) $(x-7)(x+8)$ (4) $(x-3)(x-2)$

10 次の式を展開せよ。

- (1) $(2x+1)(2x+7)$ (2) $(3x-2)(3x+5)$
 (3) $(6x+2)(6x-7)$ (4) $(5x-2)(5x-4)$

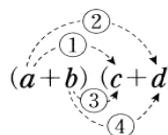
ポイント 多項式の展開

● 分配法則

$$A(b+c) = Ab + Ac$$

例 $c+d=A$ とおくと、
 $(a+b)(c+d)$
 $= (a+b)A$
 $= aA + bA$
 $= a(c+d) + b(c+d)$
 $= ac + ad + bc + bd$

● 次のように計算してもよい。



$$= ac + ad + bc + bd$$

ポイント $(x+a)(x+b)$ の積

● 公式(1)

$$(x+a)(x+b)$$

$$= x^2 + (a+b)x + ab$$

例 $(x+2)(x+3)$
 $= x^2 + (2+3)x + 2 \times 3$
 $= x^2 + 5x + 6$

例 $(2x+5)(2x-1)$
 $= (2x)^2 + (5-1) \times 2x + 5 \times (-1)$
 $= 4x^2 + 8x - 5$

基本ワーク

11 例題 $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ の展開

次の式を展開せよ。

- (1) $(x+3)^2$ (2) $(x-3)^2$
 (3) $(3x+5)^2$ (4) $(3x-5)^2$

考え方 (1) 公式(2)にあてはめると、与式= $x^2+2\times x\times 3+3^2$
 (3) 与式= $(3x)^2+2\times 3x\times 5+5^2$

12 次の式を展開せよ。

- (1) $(x+2)^2$ (2) $(a+3)^2$
 (3) $(x-4)^2$ (4) $(x-7)^2$
 (5) $(3x+2)^2$ (6) $(5x-1)^2$

13 次の式を展開せよ。

- (1) $(2x+3y)^2$ (2) $(3a-b)^2$
 (3) $(5x+2y)^2$ (4) $(4a-3b)^2$

14 例題 $(a+b)(a-b)$ の展開

次の式を展開せよ。

- (1) $(x+8)(x-8)$
 (2) $(3x+4y)(3x-4y)$

考え方 (1) 公式(4)にあてはめると、与式= x^2-8^2
 (2) 与式= $(3x)^2-(4y)^2$

15 次の式を展開せよ。

- (1) $(x+5)(x-5)$ (2) $(x-3)(x+3)$
 (3) $(3a+b)(3a-b)$ (4) $(x-4y)(x+4y)$
 (5) $(7x-2y)(7x+2y)$ (6) $(-2a+3b)(-2a-3b)$

ポイント 和の平方, 差の平方

●公式(2)

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

例 $(x+5)^2$

$$\begin{aligned} &=x^2+2\times x\times 5+5^2 \\ &=x^2+10x+25 \end{aligned}$$

●公式(3)

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

例 $(2a-3b)^2$

$$\begin{aligned} &=(2a)^2-2\times 2a\times 3b+(3b)^2 \\ &=4a^2-12ab+9b^2 \end{aligned}$$

ポイント 和と差の積

●公式(4)

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

例 $(a+3)(a-3)$

$$\begin{aligned} &=a^2-3^2 \\ &=a^2-9 \end{aligned}$$

例 $(x+2y)(x-2y)$

$$\begin{aligned} &=x^2-(2y)^2 \\ &=x^2-4y^2 \end{aligned}$$

2. 多項式の展開 (2)

基本ワーク

16 例題 四則混合計算

次の計算をせよ。

(1) $(x+2)(x+3)+(x+1)(x-1)$

(2) $2(x+3)(x-5)-(x+2)^2$

(3) $(2x-3)^2-(x+5)(x-4)$

考え方 それぞれの式を展開してから同類項をまとめる。

17 次の計算をせよ。

(1) $(x-2)^2+(x+3)(x-1)$

(2) $(x-1)^2+(x+4)^2$

(3) $x(x-3)-(x+2)^2$

(4) $(x-2)(x-5)-(x-3)^2$

(5) $2(x-3)^2-(x+5)(x-5)$

(6) $(2x+3)(2x-3)-(x-2)^2$

18★ 例題 3項式の展開 [発展]

次の式を展開せよ。

(1) $(x+y+2)(x+y-3)$

(2) $(a+2b-c)(a+2b+c)$

(3) $(x-y-3)(x+y-3)$

考え方 (1) $x+y=A$ とおくと、 $(A+2)(A-3)$ になる。

(3) $(x-3-y)(x-3+y)$ と変形し、 $x-3=A$ とおく。

19★ 次の式を展開せよ。

(1) $(a-b+2)(a-b-3)$

(2) $(x+y-3)^2$

(3) $(a+2b+5)(a+2b-1)$

(4) $(x+4y+2)(x-4y+2)$

(5) $(a-b+1)(a+b-1)$

ポイント 四則混合計算

- 乗法公式で各式を展開し、同類項をまとめる。

例 $x^2-(x+2)(x-3)$

$=x^2-(x^2-x-6)$

$=x^2-x^2+x+6$

$=x+6$

- 乗法公式のまとめ

① $(x+a)(x+b)$

$=x^2+(a+b)x+ab$

② $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

③ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

④ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

ポイント 3項式の展開

- 多項式の一部をある文字におきかえる。

↓

乗法公式を利用する。

↓

文字をもとにもどす。

↓

式をまとめる。

例 $(a+b+3)^2$

$a+b=A$ とおくと

$= (A+3)^2$

$= A^2+6A+9$

$= (a+b)^2+6(a+b)+9$

$= a^2+2ab+b^2+6a+6b+9$

基本ワーク

20 ★ 例題 $(ax+b)(cx+d)$ の展開 [発展]

次の式を展開せよ。

- (1) $(5x-1)(2x+1)$
 (2) $(2a-3b)(4a-5b)$

考え方 公式(5)にあてはめて展開する。

(1) 与式 $= 5x \times 2x + \{5 \times 1 + (-1) \times 2\}x + (-1) \times 1$

21 ★ 次の式を展開せよ。

- (1) $(2x+5)(3x+2)$
 (2) $(6x-5)(3x+4)$
 (3) $(4x-1)(5x-4)$
 (4) $(2a+3b)(6a-2b)$

22 例題 数の計算への応用

乗法公式を用いて、次の計算をせよ。

- (1) 61^2 (2) 31×29

考え方 (1) $(60+1)^2$ にする。 (2) $(30+1)(30-1)$ にする。

23 乗法公式を用いて、次の計算をせよ。

- (1) 81^2 (2) 71×69

24 例題 いろいろな問題

次の□にあてはまる数を求めよ。

- (1) $(x-7)(x+\squareア) = x^2 - \squareイx - 21$
 (2) 連続する3つの整数のうち、中央の整数の2乗は、両端の数の積よりも□大きい。

考え方 (1) 両辺をくらべる。
 (2) 中央の数を n とすると、残りの数は $n-1$ と $n+1$

25 次の□にあてはまる数を求めよ。

- (1) $(x-\squareア)^2 = x^2 - \squareイx + 9$
 (2) $(x-5)(x+\squareア) = x^2 - \squareイ$

26 連続する3つの偶数のうち、中央の偶数の2乗は、両端の偶数の積よりもいくつ大きいか。

ポイント

● 公式(5)

$$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$$

例 $(2x+1)(3x+5)$
 $= 2x \times 3x + \underbrace{(2 \times 5 + 1 \times 3)}_x x + 1 \times 5$
 $= 6x^2 + 13x + 5$

(注) ~~~~ の同類項をまとめる部分は下図で覚えよう。

$$\begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \\ | \quad | \\ (2x+1)(3x+5) \\ | \quad | \\ \text{---} \times \text{---} \end{array}$$

ポイント 数の計算への利用

● 乗法公式を利用する

例 $\cdot 21^2 = (20+1)^2$
 $= 20^2 + 2 \times 20 \times 1 + 1^2$
 $= 400 + 40 + 1$
 $= 441$

$\cdot 51 \times 49 = (50+1)(50-1)$
 $= 50^2 - 1^2$
 $= 2500 - 1$
 $= 2499$

ポイント

● 等式の係数の決定

式を展開したときの各項の係数をくらべる。

$$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$$

⇕

$$a = a', \quad b = b', \quad c = c'$$

● 連続する整数の表し方

連続する2整数 $\cdots n, n+1$

連続する3整数

$$\cdots n-1, n, n+1$$

3. 素因数分解

基本ワーク

27 例題 素因数分解

次の数を素因数に分解せよ。

- (1) 15
(2) 27
(3) 36

考え方 整数を、小さい素数から順に割っていき、それらの素数の積をつくる。

28 次の数を素因数に分解せよ。

- (1) 9 (2) 12
(3) 14 (4) 42

29 $105=3 \times 5 \times 7$ であることを利用して、105を次の数で割ったときの商を求めよ。

- (1) 3 (2) 15

30 例題 素因数分解の利用

次の各問いに答えよ。

- (1) 素因数分解を利用して、24の約数をすべて求めよ。
(2) 60にできるだけ小さい自然数をかけて、ある整数の2乗になるようにしたい。どんな数をかければよいか。

考え方 (1) 約数は、素因数の一部、または全部の積として求められる。1も約数である。
(2) 各素因数の指数が2の倍数になればよい。

31 次の各問いに答えよ。

- (1) 素因数分解を利用して、96の約数をすべて求めよ。
(2) 50にできるだけ小さい自然数をかけて、ある整数の平方になるようにしたい。どんな数をかければよいか。

ポイント 素因数分解

● **因数**……整数を、いくつかの整数の積の形で表したとき、その1つ1つを、もとの整数の**因数**という。

例 $18=6 \times 3$ だから、6と3は18の因数。

● **素数**……1より大きい整数で、1とその数自身以外に約数をもたない数を**素数**という。つまり、約数が2つだけの数を素数という。

注 1は素数ではない。

● **素因数**……素数である因数を**素因数**という。

● **素因数に分解する**……整数を素因数の積として表すこと。

ポイント 素因数分解の利用

● **約数の求め方**……素因数に分解し、素因数の一部、または全部の積を求める。

注 1を忘れないようにする。

● **約数の個数**……ある整数が、 $a^p b^q c^r$ と素因数分解されるとき、約数の個数は、
 $(p+1) \times (q+1) \times (r+1)$
で求められる。

● **平方数**……各素因数の指数が2の倍数になる。

例 $144=2^4 \times 3^2=(2^2 \times 3)^2$
144は、 $2^2 \times 3=12$ の平方数

4. 因数分解 (1)

基本ワーク

32 例題 共通因数をくくりだす

次の式を因数分解せよ。

- (1) $mx+my$
 (2) $20ax+16ay$
 (3) $3x^2-6xy$

考え方 どれが共通因数かみつける。分配法則を思い出そう。

33 次の式を因数分解せよ。

- (1) $ax-ay$ (2) $3xy+6y$
 (3) $2b^2y-10by$ (4) $ax+3ay-5az$

34 例題 $x^2+(a+b)x+ab$ の因数分解

次の式を因数分解せよ。

- (1) $x^2+8x+12$
 (2) x^2-7x+6
 (3) x^2+2x-8
 (4) $x^2-2x-15$

考え方 定数項に注目する。(1) かけて12, たして8になる数の組を考えればよい。

35 次の式を因数分解せよ。

- (1) x^2+3x+2 (2) $x^2-12x+32$
 (3) x^2-5x+6 (4) $x^2+3x-10$
 (5) x^2-x-12 (6) $x^2-6x-16$

36 次の式を因数分解せよ。

- (1) $x^2+3xy+2y^2$ (2) $x^2-7xy-18y^2$

ポイント 共通因数

- 共通因数は、1つだけとは限らない。次数のもっとも大きな共通因数をカッコの外にくくりだす。

例 $2xy+8x$ の場合

共通因数は $2x$ であって、 x だけではない。

$$\begin{aligned} 2xy+8x &= 2x \times y + 2x \times 4 \\ &= 2x(y+4) \end{aligned}$$

ポイント

- 公式(1)

$$\begin{aligned} x^2+(a+b)x+ab \\ = (x+a)(x+b) \end{aligned}$$

- x^2+px+q の因数分解は和が p , 積が q になる2数を求めることがポイント。

まず、積が q になる2数の組合せを考え、その中で和が p になるものを考える。

例 $x^2-7x+10$

| 積が10 | 和が-7 |
|---------|------|
| 1, 10 | × |
| -1, -10 | × |
| 2, 5 | × |
| -2, -5 | ○ |

積が10で、和が-7となる2数は、-2と-5だから、

$$x^2-7x+10 = (x-2)(x-5)$$

基本ワーク

37 例題 $a^2 \pm 2ab + b^2$ の因数分解

次の式を因数分解せよ。

- (1) $x^2 + 8x + 16$
 (2) $x^2 - 6x + 9$
 (3) $25x^2 - 20x + 4$
 (4) $x^2 - 8xy + 16y^2$

考え方 公式の a , b にあてはまるものを求める。

38 次の式を因数分解せよ。

- (1) $x^2 + 2x + 1$ (2) $x^2 + 20x + 100$
 (3) $x^2 - 10x + 25$ (4) $x^2 - 14x + 49$
 (5) $4x^2 + 12x + 9$ (6) $36x^2 - 60x + 25$

39 次の式を因数分解せよ。

- (1) $x^2 + 4xy + 4y^2$ (2) $4x^2 + 20xy + 25y^2$

40 例題 $a^2 - b^2$ の因数分解

次の式を因数分解せよ。

- (1) $x^2 - 4$
 (2) $4x^2 - 9y^2$

考え方 (2) $4x^2 = (2x)^2$, $9y^2 = (3y)^2$ と考えて、公式にあてはめる。

41 次の式を因数分解せよ。

- (1) $x^2 - 25$ (2) $x^2 - 100$
 (3) $y^2 - \frac{25}{81}$ (4) $64 - x^2$

42 次の式を因数分解せよ。

- (1) $4x^2 - 1$ (2) $1 - 9a^2$
 (3) $25x^2 - 49y^2$ (4) $64x^2 - 81a^2$

ポイント

●公式(2)

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

例 $x^2 + 12x + 36$

$$= x^2 + 2 \times x \times 6 + 6^2 \\ = (x + 6)^2$$

●公式(3)

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

例 $4x^2 - 12xy + 9y^2$

$$= (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3y + (3y)^2 \\ = (2x - 3y)^2$$

ポイント

●公式(4)

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

例 $x^2 - 9$

$$= x^2 - 3^2 \\ = (x + 3)(x - 3)$$

例 $9a^2 - 4b^2$

$$= (3a)^2 - (2b)^2 \\ = (3a + 2b)(3a - 2b)$$

5. 因数分解 (2)

基本ワーク

43 例題 共通因数→公式利用による因数分解

次の式を因数分解せよ。

- (1) $5x^2 - 5x - 30$
 (2) $2x^3 - 12x^2 + 18x$

考え方 (2) $2x$ でくくり、かっこの中をもう一度因数分解する。

44 次の式を因数分解せよ。

- (1) $3x^2 + 9x - 30$ (2) $2x^2 + 2x - 12$
 (3) $5x^2 + 15x - 20$ (4) $12 - 3x^2$

45 次の式を因数分解せよ。

- (1) $xy^2 - x$ (2) $x^3 - 3x^2 - 4x$
 (3) $2ax^2 - 4ax + 2a$ (4) $-ax + ax^2 - 6a$

46 ★ 例題 おきかえによる因数分解 [発展]

次の式を因数分解せよ。

- (1) $(x+y)a + (x+y)b$
 (2) $(x-y)^2 - 2(x-y) - 15$

考え方 (1) $x+y=A$ とおくと、与式= $Aa+Ab$
 (2) $x-y=A$ とおくと、与式= $A^2-2A-15$

47 ★ 次の式を因数分解せよ。

- (1) $(a+b)x + (a+b)y$ (2) $a(x+y) - b(x+y)$
 (3) $(x+y)^2 - 5(x+y)$ (4) $a^2(x-y) + b^2(x-y)$

48 ★ 次の式を因数分解せよ。

- (1) $(x+y)^2 + 7(x+y) + 12$ (2) $(a-b)^2 + 6(a-b) - 16$
 (3) $(x-2)^2 - 4(x-2) - 5$ (4) $(x+1)^2 - (1+x) - 6$

ポイント

- 共通因数をくくりだしてから、かっこの中を公式を使って因数分解する。

例 $2x^2 + 8x + 6$
 $= 2(x^2 + 4x + 3)$
 $= 2(x+1)(x+3)$

ポイント

- 同じ式を1つの文字におきかえて因数分解し、次に文字をもとの式にもどす。

例 $(a+b)x - (a+b)y$
 $a+b=A$ とおくと、
 与式= $Ax - Ay$
 $= A(x-y)$
 $= (a+b)(x-y)$

- 注** A をもとにもどすとき、
 与式= $a+b(x-y)$ としてはいけない。かっこの使い方に要注意。

6. 式の計算の利用

基本ワーク

49 例題 因数分解の数の計算への利用

くふうして、次の計算をせよ。

(1) $27 \times 43 + 27 \times 57$ (2) $98^2 - 2^2$

考え方 (1) 27でくくる。

(2) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ を利用する。

50 くふうして、次の計算をせよ。

(1) $18 \times 13 + 18 \times 37$ (2) $51^2 - 49^2$

51 例題 式の値

次の各問いに答えよ。

(1) $a = \frac{4}{5}$ のとき、 $(a+1)(a+4) - (a-2)^2$ の値を求めよ。

(2) $x+y=5$, $xy=3$ のとき、 x^2+y^2-4xy の値を求めよ。

考え方 (1) 式を簡単にしてから代入する。

(2) $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy$ より、
与式 $= (x+y)^2 - 6xy$

52 次の各問いに答えよ。

(1) $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{2}{3}$ のとき、 $(a+b)(a-2b) + b(a+b)$ の値を求めよ。

(2) $x+y=2$, $xy=1$ のとき、 $(x-y)^2$ の値を求めよ。

53 例題 式による証明

$5^2 - 4^2 = 5 + 4$ のように、連続する2つの整数の2乗の差は、その2数の和に等しい。このことを証明せよ。

考え方 小さい方の整数を n とすると、大きい方は $n+1$ である。

54 次のことを証明せよ。

(1) 奇数の2乗は奇数である。

(2) 3で割ると1余る正の整数 a と、3で割ると2余る正の整数 b に対して、 ab に1を加えた数は3の倍数である。

ポイント 因数分解と数の計算

● 同じ数があるときは、その数でくくってみる。

平方の差は、和と差の積に因数分解すると計算が簡単になる。

ポイント 式の値

● (1)は、式を簡単にする→代入

(2)は、与式を $x+y$ と xy で表す
→代入

● 主な等式

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$$

$$(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy$$

例 $a^2 + ab + b^2$

$$= a^2 + 2ab + b^2 - ab$$

$$= (a+b)^2 - ab$$

ポイント 式による証明

● 整数の表し方

偶数 $\cdots 2n$

奇数 $\cdots 2n+1$

3で割ると1余る整数 $\cdots 3n+1$

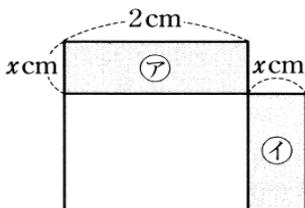
● 3の倍数であることの証明

→ $3 \times (\text{整数})$ であることを示せばよい。

基本ワーク

55 例題 図形への応用

右の図は、1辺が2cmの正方形と、2cmよりも縦が x cm短く、横が x cm長い長方形を重ねたものである。図の㊦と㊩の部分の面積の差を x を用いた式で表せ。



【考え方】 (㊦と㊩の差) = (正方形と長方形の差)

ポイント 図形への応用

● 必要な部分の辺や線分の長さを文字を用いて表し、それをもとにして面積や長さを求める。

55 長方形の縦は $(2-x)$ cm,
横は $(2+x)$ cm

56(1) 道のまん中の線の1辺の長さ

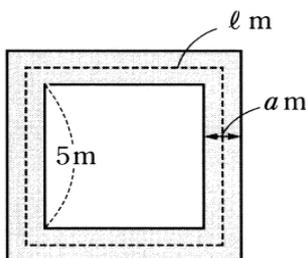
さは、 $5 + \frac{a}{2} \times 2$ (m)

(2) (道の面積)

= (外側の正方形)

- (内側の正方形)

56 1辺が5mの花だんのまわりに幅が a mの道がついている。道のまん中を通る線の長さを l m、道の面積を S m²として、次の各問に答えよ。



- (1) l を a を用いた式で表せ。
- (2) $S = al$ であることを示せ。

57 例題 規則性の問題

右の図は、自然数を1から順に1つずつ書いたカードを、ある規則にしたがって、1列目に1枚、2列目に3枚、…と並べていったものである。これについて、次の各問に答えよ。

| 1列目 | 2列目 | 3列目 | 4列目 | ... |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 2 | 5 | 10 | |
| | 3 | 6 | 11 | |
| | 4 | 7 | 12 | |
| | | 8 | 13 | ... |
| | | 9 | 14 | |
| | | | 15 | |
| | | | 16 | |

- (1) n 列目のいちばん下のカードの数字を、 n を用いた式で表せ。
- (2) n 列目に並ぶカードの枚数を、 n を用いた式で表せ。

【考え方】 (2) 各列のいちばん下の数字は、1列目からのカードの枚数を示している。

ポイント 規則性の問題

● 規則性の問題は、入試でもよく出題される重要単元である。きまりを見つけ、必要なものを n などの文字を用いて表して解く。

57(1) いちばん下のカードの数字は1, 4, 9, 16, …で、整数の2乗の形をしている。

(2) n 列目の枚数は、 n 列目までの枚数と、 $(n-1)$ 列目までの差で求められる。

58 自然数を1つずつ書いた同じ大きさの正方形のカード①, ②, ③, …を、①のカードのまわりに②のカードをすき間なく並べ、②のカードのまわりに③のカードをすき間なく並べる。同じように、④, ⑤, …のカードをすき間なく並べていくとき、 n のカードは何枚並べられるか。 n を用いた式で表せ。ただし、 n は2以上とする。

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 3 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

58 1辺に並んでる枚数は、
①…1枚, ②…3枚, ③…5枚,
……であることに注目。

章のまとめ

① 次の計算をせよ。

(1) $3x(2x^2-4xy)$

(2) $(-3ab+5b) \times (-2ab)$

(3) $(9a^2-3a) \div 3a$

(4) $(14x^2y-21xy^2) \div (-7xy)$

② 次の式を展開せよ。

(1) $(a+1)(b+3)$

(2) $(x+1)(2x-5)$

(3) $(3x-5)(2x+1)$

(4) $(5a-b)(4a+2b)$

③ 次の式を展開せよ。

(1) $(x+5)(x+1)$

(2) $(x-4)(x+7)$

(3) $(a-3)(a+9)$

(4) $(x-2)(x-6)$

(5) $(2x-5)(2x+8)$

(6) $(4a+1)(4a-3)$

(7) $(x+9)^2$

(8) $(x-8)^2$

(9) $(2a-3)^2$

(10) $(5a+2b)^2$

(11) $(a+10)(a-10)$

(12) $\left(x-\frac{1}{5}\right)\left(x+\frac{1}{5}\right)$

(13) $(4x+1)(4x-1)$

(14) $(3x-2y)(2y+3x)$

④ 次の式を計算せよ。

(1) $(x+1)(x+2) + (x-5)(x+5)$

(2) $(a-1)(a+3) - (a-2)^2$

(3) $(x-4)^2 - (x+1)(x-9)$

(4) $(x+5)(x-2) + (x+3)^2$

(5) $(x-1)(x-8) - (x-5)(x-4)$

(6) $(x-5)(x+5) - (x+1)(x+3)$

(7) $(x-4)(x+4) - 2(x+3)(x-5)$

(8) $(x+5)^2 - (x+3)(x-2)$

(9) $(3x+2)^2 - (4x-3)^2$

(10) $(2a+3)^2 - (2a-1)^2$

⑤ 乗法公式を利用して、次の計算をせよ。

(1) 49^2

(2) 83×77

⑥ $(x-\text{ア})(x+2) = x^2 - 5x - \text{イ}$ が成り立つとき、 ア ， イ に適する数を求めよ。

7 次の数を素因数に分解せよ。

(1) 28

(2) 64

(3) 105

8 次の式を因数分解せよ。

(1) $mx - 5m$

(2) $ax - 2ax^2$

(3) $21xy - 14x^2 - 35x$

(4) $x^2 - 4x + 3$

(5) $x^2 - 3x - 10$

(6) $x^2 + 8x + 12$

(7) $x^2 + 8x + 16$

(8) $4x^2 - 4x + 1$

(9) $x^2 - 6x + 9$

(10) $a^2 - 16$

(11) $4x^2 - y^2$

(12) $25x^2 - 9y^2$

9 次の式を因数分解せよ。

(1) $3x^2 - 12x + 12$

(2) $4x^2 - 16x + 16$

(3) $3x^2 - 12y^2$

(4) $x(x+7) - 18$

(5) $x^2 - 2(x+4)$

(6) $a(a-2) - (a-2)$

10 くふうして、次の計算をせよ。

(1) $62 \times 91 + 38 \times 91$

(2) $54^2 - 46^2$

11 次の各問いに答えよ。

(1) $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{7}{2}$ のとき, $(a-b)^2 - (a^2+b^2)$ の値を求めよ。

(2) $x+y=4$, $xy=-3$ のとき, x^2+y^2-3xy の値を求めよ。

12 $8^2 - 7^2 = 8 + 7$ のように, 連続する2つの整数の平方の差は, その2つの整数の和に等しいことを証明せよ。

13 右の図は, 直径が $2a$ cm, $2b$ cm, $2(a+b)$ cm の3つの半円を組み合わせてつくった図形である。影をつけた部分の面積を a , b を用いた式で表せ。ただし, 円周率を π とする。

