第4講座　集合と命題

基本の整理

〈集合の表し方〉 ▶要素の個数が多かったり，無限に多くの要素がある場合，……を用いる。

1　次の集合を，要素を書き並べて表せ。

(1)　12の正の約数全体の集合　　(2)　$\{3n+1 \mid n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots\}$

〈共通部分と和集合〉 ▶$A\cap B=\{x \mid x\in A$ かつ $x\in B\}$，$A\cup B=\{x \mid x\in A$ または $x\in B\}$

2　次の2つの集合 A，B について，共通部分 $A\cap B$ と和集合 $A\cup B$ を求めよ。

(1)　$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$，$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$

(2)　$A=\{x \mid x$ は4の倍数，$0<x<20\}$，$B=\{x \mid x$ は6の倍数，$0<x<20\}$

〈補集合，ド・モルガンの法則〉 ▶$\overline{A}=\{x \mid x\in U$ かつ $x\notin A\}$，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

3　$U=\{n \mid n$ は10以下の自然数$\}$ を全体集合とする。U の部分集合 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，$B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9\}$ について，次の集合を求めよ。

(1)　$\overline{A}$，$\overline{B}$　　(2)　$A\cap\overline{B}$，$\overline{A}\cup B$　　(3)　$\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A}\cup\overline{B}$

〈命題の真偽〉 ▶命題「p ならば q」を $p\Longrightarrow q$ と書く。命題が正しい…真，正しくない…偽。

4　次の命題の真偽を調べよ。偽ならば，反例をあげよ。

(1)　n は6の約数 $\Longrightarrow$ n は18の約数　　(2)　$x^2=4\Longrightarrow x=2$

(3)　$|x|<2\Longrightarrow x>-2$　　(4)　$x+y>2$ かつ $xy>1\Longrightarrow x>1$ かつ $y>1$

〈必要条件・十分条件〉 ▶$p\Longrightarrow q$ が真のとき，(十分条件) $p\Longrightarrow q$ (必要条件)

5　次の条件 p は，条件 q であるための，必要条件か，十分条件か，必要十分条件か。

(1)　$p：xy=0$　$q：x=0$　　(2)　$p：x^2+6x+9=0$　$q：x=-3$

(3)　$p：a=b$　$q：a^2=b^2$　　(4)　$p：ab>0$　$q：a>0$ かつ $b>0$

〈条件の否定〉 ▶$\overline{p}$…p の否定「p でない」。$\overline{p\text{ かつ }q}\Longleftrightarrow\overline{p}$ または $\overline{q}$，$\overline{p\text{ または }q}\Longleftrightarrow\overline{p}$ かつ $\overline{q}$

6　次の条件の否定を述べよ。

(1)　$x\neq1$ かつ $y\neq1$　　(2)　$x<-2$ または $x>3$　　(3)　$-3\leqq x\leqq1$

〈逆・裏・対偶〉 ▶命題 $p\Longrightarrow q$ に対して，$q\Longrightarrow p$…逆，$\overline{p}\Longrightarrow\overline{q}$…裏，$\overline{q}\Longrightarrow\overline{p}$…対偶

7　次の命題の逆・裏・対偶を述べよ。また，それらの真偽を調べよ。

(1)　$x^2=x\Longrightarrow x=1$　　(2)　$x\leqq1$ かつ $y\leqq1\Longrightarrow x+y\leqq2$

演　習

例題　背理法による証明

8 $\sqrt{10}$ が無理数ならば，$\sqrt{2}+\sqrt{5}$ は無理数であることを証明せよ。

解法のポイント　「$\sqrt{10}$ が無理数」という条件のもとで，「$\sqrt{2}+\sqrt{5}$ は無理数」が成り立たないと仮定して，矛盾を導く。$\sqrt{2}+\sqrt{5}=r$（r は有理数）として，両辺を２乗する。

9 類題 $\sqrt{3}$ が無理数であることを用いて，次のことを証明せよ。

(1) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$ は無理数である。

(2) a，b を有理数とする。$a+\sqrt{3}b=0$ ならば，$a=b=0$ である。

10 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$を全体集合とする。$U$の部分集合$A$，$B$について，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,\ 6,\ 9\}$，$\overline{A}\cap B=\{2,\ 7\}$，$A\cap\overline{B}=\{3,\ 5,\ 8\}$であるとき，次の集合を求めよ。

(1) $A\cup B$　　(2) A　　(3) B

11 $U=\{x\mid 1\leqq x\leqq 100,\ x\text{は整数}\}$を全体集合とし，$U$の部分集合$A=\{x\mid x\text{は偶数}\}$，$B=\{x\mid x\text{はある整数の平方}\}$，$C=\{x\mid x\text{は}3\text{の倍数}\}$，$D=\{x\mid x\text{は}4\text{の倍数}\}$とする。

(1) 集合$A\cap B$，$A\cap B\cap C$，$B\cap(C\cup D)$を要素を書き並べて表せ。

(2) $\overline{D}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$であることを証明せよ。

12 全体集合を $U=\{x\mid -5\leqq x\leqq 5,\ x\text{は整数}\}$とする。$U$の部分集合$A=\{2,\ a-1,\ a\}$，$B=\{-4, a-3,\ 10-a\}$ について，$A\cap B=\{2,\ 5\}$となるようにaの値を定めよ。

13 次の$\boxed{}$の中に，必要，十分，必要十分のうち，適当なものを入れよ。

(1) $xy>0$ は，$x^2+y^2>0$ であるための$\boxed{}$条件

(2) 自然数a，bで，a，bがともに奇数であることは，abが奇数であるための$\boxed{}$条件

(3) $(x-y)(y-z)=0$ は，$x=y=z$ であるための$\boxed{}$条件

14 次の命題の対偶を述べよ。また，対偶を用いて，命題が真であることを証明せよ。

自然数nについて，n^2が３の倍数ならば，nは３の倍数である。

15 発展 自然数a_k（$1\leqq k\leqq 4$）を要素とする集合$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\}$と$a_k^2$を要素とする集合$B=\{a_1^2,\ a_2^2,\ a_3^2,\ a_4^2\}$があり，$a_1<a_2<a_3<a_4$である。このとき，$A\cap B=\{a_2,\ a_4\}$，$a_2+a_4=20$であり，$A\cup B$のすべての要素の和が410となった。集合$A$を求めよ。

ヒント　a_2，a_4はともに平方数となる。a_kは自然数であることから，まず，a_1，a_2，a_4が定まる。

第８講座　２次関数のグラフと直線

基本の整理

〈放物線と x 軸との共有点〉 ▶$y=ax^2+bx+c$ で $D=b^2-4ac$　$D>0$…2個，$D=0$…1個，$D<0$…0個

1　次の２次関数のグラフと x 軸との共有点の個数を求めよ。また，共有点がある場合は，共有点の座標を求めよ。

(1)　$y=3x^2-4x+1$　　(2)　$y=-x^2+6x-9$

(3)　$y=2x^2+3x+5$　　(4)　$y=-3x^2+3x-1$

〈放物線と直線の共有点の個数〉 ▶２つの式から y を消去して，D の符号を調べる。

2　放物線 $y=x^2-5x+4$ と次の直線との共有点の個数を求めよ。

(1)　$y=2x+5$　　(2)　$y=-3x+3$

(3)　$y=-x-2$　　(4)　$y=x-5$

〈放物線と直線の共有点の座標〉 ▶ y を消去した x の２次方程式から，まず x 座標を求める。

3　次の２次関数のグラフと直線との共有点の座標を求めよ。

(1)　$y=2x^2+x$，$y=-x+4$　　(2)　$y=-x^2+3x-1$，$y=2x-7$

〈接する条件〉 ▶２式から y を消去して得られる x の２次方程式で，$D=b^2-4ac=0$

4　次の放物線と直線とが接するように k の値を定めよ。また，そのときの接点の座標を求めよ。

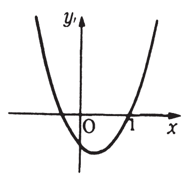
(1)　$y=2x^2-3x$，$y=kx-2$　　(2)　$y=-x^2+7x-4$，$y=kx$

〈共有点をもつ条件〉 ▶共有点をもつ条件は $D\geqq 0$，異なる２つの交点をもつ条件は $D>0$

5　放物線 $y=x^2+4$ と直線 $y=2x+k$ が共有点をもつ条件を求めよ。

〈係数の符号とグラフ〉 ▶x 軸，y 軸との交点，軸の位置などにより，符号がわかる。

6　２次関数 $y=ax^2+2bx+c$ のグラフが右の図のようになるとき，次の値は，正，負，０のいずれになるか。



(1)　a　　(2)　b

(3)　b^2-ac　　(4)　$a+2b+c$

演　習

例題　放物線と直線の位置関係

7　頂点の座標が $(2,\ 5)$ である放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線 $y=2x$ とが接しているとき，a，b，c の値を求めよ。

解法のポイント　$y=a(x-2)^2+5$ と $y=2x$ より，y を消去して x の 2 次方程式をつくる。$\dfrac{D}{4}=0$ として a の値を求めればよい。

8　**類題**　頂点の座標が $(1,\ 3)$ である放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線 $y=4x-3$ とが接しているとき，a，b，c の値を求めよ。

9　2 次関数 $y=4x^2-(k+5)x+k+2$ のグラフが x 軸に接するように，定数 k の値を定めよ。また，そのときの接点の座標を求めよ。

10　放物線 $y=x^2-5x+k$ と x 軸との共有点の個数を調べよ。

11　次の放物線と直線とが共有点をもたないように k の値の範囲を定めよ。

(1)　$y=-x^2+3x+1$，$y=2x+k$

(2)　$y=kx^2$，$y=x+1$

12　2 次関数 $y=-3x^2+2x+k$ のグラフが次の条件を満たすように，定数 k の値または値の範囲を定めよ。

(1)　x 軸に接する

(2)　直線 $y=3$ と 2 点で交わる

(3)　直線 $y=x$ と接する

(4)　直線 $y=-x$ と共有点をもたない

13　**発展**　放物線 $y=x^2+ax+b$ は点 $(-1,\ -2)$ を通り，直線 $y=2x-1$ に接している。このとき，定数 a，b の値を求めよ。また，そのときの接点の座標を求めよ。

ヒント　点 $(-1,\ -2)$ を代入した式と，y を消去した x の 2 次方程式で $D=0$ とした式の連立方程式を解く。

解　答　　　《S高1数学Ⅰ》

第1講座　式の計算

【p.2】

1　(1)　x^3-13x^2+9x-3　　(2)　$-15x-2$

2　(1)　a^8　　(2)　$-x^{15}$　　(3)　$-8x^9y^8$

3　(1)　$9a^2-12ab+4b^2$　　(2)　$4x^2-y^2$

(3)　x^2-x-42　　(4)　$9a^2+3ab-2b^2$

(5)　$3x^2+7x-20$　　(6)　$6x^2-5x-4$

4　(1)　$x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$

(2)　$27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3$

(3)　x^3+27　　(4)　$8a^3-b^3$

5　(1)　$(a+6b)^2$　　(2)　$x(3x-4)^2$

(3)　$2(x+3)(x-3)$　　(4)　$(8xy+3z)(8xy-3z)$

(5)　$(x+2)(x+12)$　　(6)　$(ab+3)(ab-4)$

6　(1)　$(2x+3)(3x+1)$　　(2)　$(2x-1)(5x-2)$

(3)　$2(3x+5y)(x-y)$

7　(1)　$(x+4)(x^2-4x+16)$

(2)　$(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$

(3)　$(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$

【p.3】

8　(1)　$(x^2-x-1)(x^2+x-1)$

$=\{(x^2-1)-x\}\{(x^2-1)+x\}=(x^2-1)^2-x^2$

$=x^4-2x^2+1-x^2=\boldsymbol{x^4-3x^2+1}$

(2)　$(x+4)(x+2)(x-5)(x-3)$

$=(x+4)(x-5)\cdot(x+2)(x-3)$

$=(x^2-x-20)(x^2-x-6)$

$=\{(x^2-x)-20\}\{(x^2-x)-6\}$

$=(x^2-x)^2-26(x^2-x)+120$

$=x^4-2x^3+x^2-26x^2+26x+120$

$=\boldsymbol{x^4-2x^3-25x^2+26x+120}$

9　(1)　$(a+b-3)(a+b+2)$

$=\{(a+b)-3\}\{(a+b)+2\}$

$=(a+b)^2-(a+b)-6$

$=\boldsymbol{a^2+2ab+b^2-a-b-6}$

(2)　$(a-b+c)(a+b-c)$

$=\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}$

$=a^2-(b-c)^2=a^2-(b^2-2bc+c^2)$

$=\boldsymbol{a^2-b^2+2bc-c^2}$

(3)　$(x-8)(x-6)(x+2)(x+4)$

$=(x-8)(x+4)\cdot(x-6)(x+2)$

$=(x^2-4x-32)(x^2-4x-12)$

$=(x^2-4x)^2-44(x^2-4x)+384$

$=\boldsymbol{x^4-8x^3-28x^2+176x+384}$

(4)　$(a+1)(a-1)(a^2-a+1)(a^2+a+1)$

$=(a+1)(a^2-a+1)\cdot(a-1)(a^2+a+1)$

$=(a^3+1)(a^3-1)=\boldsymbol{a^6-1}$

10　(1)　$5x^2+4x-19$　　(2)　$-3x-2$

11　(1)　$-x^{11}$　　(2)　$-2x^{11}y^7$

(3)　$x^3+2x^2y-16xy^2+3y^3$

(4)　$a^5-2a^4-a^3+7a^2-8a+3$

12　(1)　$\frac{1}{4}x^2-\frac{2}{3}xy+\frac{4}{9}y^2$　　(2)　$a^2-6+\frac{9}{a^2}$

(3)　$(a+b+c)^2=\{(a+b)+c\}^2$

$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$

$=\boldsymbol{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}$

注　この式を公式として使ってもよい。

(4)　$a^2+4b^2+c^2+4ab-4bc-2ca$

(5)　x^4-y^4

(6)　$(3a-2)^2(3a+2)^2=\{(3a-2)(3a+2)\}^2$

$=(9a^2-4)^2=\boldsymbol{81a^4-72a^2+16}$

(7)　$(a+b+c-d)(a-b+c+d)$

$=\{(a+c)+(b-d)\}\{(a+c)-(b-d)\}$

$=(a+c)^2-(b-d)^2$

$=a^2+2ac+c^2-b^2+2bd-d^2$

$=\boldsymbol{a^2-b^2+c^2-d^2+2ac+2bd}$

(8)　$(a+b)^3(a-b)^3=\{(a+b)(a-b)\}^3$

$=(a^2-b^2)^3=\boldsymbol{a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6}$

13　(1)　$(a-3b+2c)^2-(a+3b-2c)^2$

$=\{a-(3b-2c)\}^2-\{a+(3b-2c)\}^2$

$=a^2-2a(3b-2c)+(3b-2c)^2$

$-\{a^2+2a(3b-2c)+(3b-2c)^2\}$

$=-4a(3b-2c)=\boldsymbol{-12ab+8ac}$

(2)　$(x-y)^2(x+y)^2(x^2+y^2)^2$

$=\{(x-y)(x+y)\}^2(x^2+y^2)^2$

$=(x^2-y^2)^2(x^2+y^2)^2=(x^4-y^4)^2$

$=\boldsymbol{x^8-2x^4y^4+y^8}$

(3)　$3a-2b=A$ とおく。

$(3a-2b+c)^3=(A+c)^3=A^3+3A^2c+3Ac^2+c^3$

$=(3a-2b)^3+3(3a-2b)^2c+3(3a-2b)c^2+c^3$

$=\boldsymbol{27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3+27a^2c-36abc}$

$\boldsymbol{+12b^2c+9ac^2-6bc^2+c^3}$

(4)　$(x-2)(x-3)(2x-1)(2x-3)$

$=(x-2)(2x-3)\cdot(x-3)(2x-1)$

$=(2x^2-7x+6)(2x^2-7x+3)$

$=(2x^2-7x)^2+9(2x^2-7x)+18$

$=4x^4-28x^3+49x^2+18x^2-63x+18$

$=\boldsymbol{4x^4-28x^3+67x^2-63x+18}$

14　x^4 の項を計算すると

$x^3\cdot x-3x^2\cdot bx^2+ax\cdot x^3=(a-3b+1)x^4$