# 第 5 講座　複素数，2 次方程式

## 基本の整理

**〈複素数の相等〉▶$a$，$b$，$c$，$d$ が実数のとき，$a+bi=c+di \Longleftrightarrow a=c,\ b=d$**

**1** 次の等式を満たす実数 $x$，$y$ の値を求めよ。

(1) $x-yi=i$　　(2) $(2+3i)x-(1-2i)y=7$

**〈複素数の計算〉▶虚数単位 $i$ を含む計算では，まず $i$ をふつうの文字として扱ってから，$i^2=-1$ とする。**

**2** 次の計算をせよ。

(1) $(6+3i)-(-6-2i)$　　(2) $3i\times(-i)^2\times(2i)^2$

(3) $\dfrac{6}{i}$　　(4) $\dfrac{2-i}{3+2i}$

**〈解の公式による解き方〉▶$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ $(b=2b')$**

**3** 次の 2 次方程式を解の公式を用いて解け。

(1) $x^2-x+1=0$　　(2) $2x^2-5x+6=0$

(3) $x^2+2x+5=0$　　(4) $2x^2-6x+5=0$

**〈解の判別〉▶判別式 $D=b^2-4ac$ について，$D>0$，$D=0$，$D<0$ により判別する。**

**4** 次の 2 次方程式の解を判別せよ。

(1) $6x^2+7x+3=0$　　(2) $x^2+\sqrt{2}x-3=0$

(3) $4x^2+4x+1=0$　　(4) $\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{5}=0$

**〈解と係数の関係〉▶ 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を $\alpha$，$\beta$ とすると，$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$**

**5** 2 次方程式 $3x^2-3x-1=0$ の 2 つの解を $\alpha$，$\beta$ とするとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^2+\beta^2$　　(2) $(\alpha+1)(\beta+1)$　　(3) $\alpha^3+\beta^3$

**〈2 つの数を解とする 2 次方程式〉▶$\alpha$，$\beta$ を 2 つの解とする 2 次方程式は，**

$$a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=0\ (a\neq 0)$$

**6** 次の 2 つの数を解とする 2 次方程式をつくれ。ただし，$x^2$ の係数は 1 とする。

(1) $2+\sqrt{7}$，$2-\sqrt{7}$　　(2) $5+i$，$5-i$

## 演　習

**例題　2次方程式の解**

**7**　2次方程式 $x^2-(k+1)x-k+2=0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　方程式が重解をもつように，定数 $k$ の値を定めよ。

(2)　方程式が異なる2つの正の実数解をもつように，定数 $k$ の値の範囲を定めよ。

**解法のポイント**　(1)　重解をもつための条件は，$D=0$

(2)　2次方程式の2つの解を $\alpha$，$\beta$ とすると，条件は，$D>0$，$\alpha+\beta>0$，$\alpha\beta>0$

**8**　**類題**　2次方程式 $x^2-2(k-3)x+4k=0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　方程式が重解をもつように，定数 $k$ の値を定めよ。

(2)　方程式が異なる2つの負の実数解をもつように，定数 $k$ の値の範囲を定めよ。

**9**　次の2次方程式を解け。

(1)　$x^2+2=0$　　(2)　$6x^2-4x+3=0$　　(3)　$\sqrt{2}\,x^2-x-\sqrt{2}=0$

**10**　次の $x$ についての方程式の解を判別せよ。ただし，$a$ は実数の定数とする。

(1)　$ax^2+(a-1)x-1=0$　　(2)　$(a+1)x^2+(a-2)x-1=0$

**11**　次の問いに答えよ。

(1)　2次方程式 $x^2-mx-m+2=0$ の2つの解を $\alpha$，$\beta$ とするとき，$\alpha^2+\beta^2=11$ となるように，定数 $m$ の値を定めよ。

(2)　2次方程式 $x^2-mx+2=0$ の2つの解の差が1になるように，定数 $m$ の値を定めよ。

**12**　2次方程式 $x^2-3x-4=0$ の2つの解を $\alpha$，$\beta$ とするとき，$\dfrac{\beta}{\alpha}$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ を解とする2次方程式をつくれ。ただし，$x^2$ の係数は1とする。

**13**　**発展**　$\alpha$，$\beta$ が2次方程式 $x^2-x+1=0$ の解であるとき，$\alpha^3+\beta^3$，$\alpha^{10}+\beta^{10}$ の値をそれぞれ求めよ。

**ヒント**　$\alpha^2=\alpha-1$ より，$\alpha^3=\alpha^2-\alpha=-1$　　同様に，$\beta^3=-1$

# 第 8 講座　円の方程式

## 基本の整理

**〈円の中心と半径①〉** ▶方程式 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ $(r>0)$ で表される図形は中心$(a,\ b)$，半径 $r$ の円。

**1** 次の円の中心の座標，半径を求めよ。

(1)　$(x+2)^2+(y-3)^2=25$　　(2)　$(x-4)^2+y^2=9$

**〈円の中心と半径②〉** ▶方程式を $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の形に変形する。

**2** 次の円の中心の座標，半径を求めよ。

(1)　$x^2+y^2+2x=0$　　(2)　$x^2+y^2-6x+4y-3=0$

**〈円の方程式①〉** ▶中心$(a,\ b)$，半径 $r$ の円の方程式は，$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

**3** 次の円の方程式を求めよ。

(1)　中心$(0,\ 0)$，半径 3 の円　　(2)　中心$(-7,\ 2)$，半径 4 の円

**〈円の方程式②〉** ▶中心と円周上の 1 点の座標がわかれば，距離の公式から半径を求められる。

**4** 次の円の方程式を求めよ。

(1)　点$(1,\ 3)$を中心とし，点$(3,\ 0)$を通る円

(2)　2 点 A$(1,\ 3)$，B$(9,\ 5)$を直径の両端とする円

**〈3 点を通る円の方程式〉** ▶中心の座標がすぐに求められないときは，方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおく。

**5** 次の 3 点を通る円の方程式を求めよ。

(1)　$(0,\ 0)$，$(0,\ 5)$，$(-2,\ 3)$　　(2)　$(4,\ 6)$，$(5,\ 5)$，$(1,\ 7)$

**〈円と直線の共有点〉** ▶円と直線の共有点の座標は，それぞれの方程式を連立させた解である。

**6** 次の円と直線の共有点の座標を求めよ。

(1)　$x^2+y^2=4$，$x+y-2=0$　　(2)　$x^2+y^2-4x-6y-12=0$，$2x-y-6=0$

# 演　習

**例題　三角形の外接円**

**7**　3 直線 $x-2y=0$，$x+3y-5=0$，$2x+y+5=0$ によって囲まれた三角形に外接する円の中心の座標と半径を求めよ。

解法のポイント　まず三角形の 3 つの頂点の座標を求める。

**8** 類題　3 直線 $x+y=0$，$x+3y=0$，$x+2y+1=0$ によって囲まれた三角形に外接する円の中心の座標と半径を求めよ。

**9**　次の円の方程式を求めよ。

(1)　点 $(-1,\ -3)$ を中心とし，半径が $\sqrt{3}$ の円

(2)　点 $(-2,\ 1)$ を中心とし，点 $(2,\ 4)$ を通る円

(3)　2 点 $(3,\ 2)$，$(11,\ 6)$ を直径の両端とする円

(4)　3 点 $(0,\ 1)$，$(-1,\ 2)$，$(-3,\ 3)$ を通る円

**10**　次の円の方程式を求めよ。

(1)　点 $(2,\ -3)$ を中心とし，$x$ 軸に接する円

(2)　点 $(4,\ 2)$ を通り，$x$ 軸および $y$ 軸に接する円

(3)　2 点 $(1,\ -2)$，$(2,\ -3)$ を通り，$y$ 軸に接する円

**11**　中心が直線 $y=2x+1$ 上にあり，2 点 $(2,\ 1)$，$(6,\ 5)$ を通る円の方程式を求めよ。

**12**　次の点または直線に関して，円 $x^2+y^2=4$ と対称な円の方程式を求めよ。

(1)　点 $(2,\ -3)$　　(2)　直線 $2x+y-3=0$

**13** 発展　方程式 $x^2+y^2+2(t+1)x-2ty+5t^2=0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　方程式が円を表すような定数 $t$ の値の範囲を求めよ。

(2)　(1)のとき，円の面積を最大にする $t$ の値と，円の面積の最大値を求めよ。

ヒント (1)　$(x-a)^2+(y-b)^2=r$ の形に変形したとき，$r>0$ ならば，この方程式は円を表す。

# 解 答 《S高2数学Ⅱ》

## 第1講座 3次式の展開と因数分解，二項定理

【p.2】

**1** (1) $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$

(2) $27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3$

(3) $x^3+27$ (4) $8a^3-b^3$

**2** (1) $(x+4)(x^2-4x+16)$

(2) $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$

(3) $(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$

(4) $2b(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$

**3** (1) $16x^4-32x^3+24x^2-8x+1$

(2) $a^5-5a^4+10a^3-10a^2+5a-1$

(3) $64x^6-192x^5y+240x^4y^2-160x^3y^3+60x^2y^4-12xy^5+y^6$

(4) $x^6+2x^5+\frac{5}{3}x^4+\frac{20}{27}x^3+\frac{5}{27}x^2+\frac{2}{81}x+\frac{1}{729}$

**4** (1) 一般項は，

${}_5C_r(3x)^{5-r}\cdot(-2)^r=3^{5-r}\cdot(-2)^r{}_5C_rx^{5-r}$

$5-r=3$ のとき，$r=2$

求める係数は，$3^3\cdot(-2)^2{}_5C_2=\mathbf{1080}$

(2) 280 (3) 112 (4) $-\frac{45}{4}$

**5** (1) $\frac{5!}{2!1!2!}=\mathbf{30}$ (2) $\frac{8!}{2!3!3!}=\mathbf{560}$

(3) $a^4b^2c$ の項は，$\frac{7!}{4!2!1!}\cdot a^4\cdot(2b)^2\cdot(-c)$

求める係数は，$105\cdot2^2\cdot(-1)=\mathbf{-420}$

(4) $x^5yz^2$ の項は，$\frac{8!}{5!1!2!}\cdot x^5\cdot y\cdot(-3z)^2$

求める係数は，$168\cdot(-3)^2=\mathbf{1512}$

【p.3】

**6** 二項定理より，

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n$ ……①

$x=2$ を代入して，

$3^n={}_nC_0+{}_nC_1\cdot2+{}_nC_2\cdot2^2+\cdots\cdots+{}_nC_n\cdot2^n$

よって，

${}_nC_0+2{}_nC_1+2^2{}_nC_2+\cdots\cdots+2^n{}_nC_n=3^n$

**7** (1) **6**の等式①に $x=-\frac{1}{2}$ を代入して，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n={}_nC_0+{}_nC_1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+{}_nC_2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+{}_nC_n\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

よって，

$${}_nC_0-\frac{{}_nC_1}{2}+\frac{{}_nC_2}{2^2}-\cdots\cdots+(-1)^n\cdot\frac{{}_nC_n}{2^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(2) **6**の等式①に $x=-2$ を代入して，

$(-1)^n={}_nC_0+{}_nC_1\cdot(-2)+{}_nC_2\cdot(-2)^2+\cdots\cdots+{}_nC_n\cdot(-2)^n$

よって，

${}_nC_0-2{}_nC_1+2^2{}_nC_2-\cdots\cdots+(-2)^n{}_nC_n=(-1)^n$

**8** (1) 与式$=(a+b)(a^2-ab+b^2)\times(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$

$=\boldsymbol{a^6-b^6}$

(2) 与式$=\{(a+b)(a-b)\}^3$

$=(a^2-b^2)^3$

$=\boldsymbol{a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6}$

(3) 与式$=\{(1-x^2)+x(1-x^2)\}\times\{(1-x^2)-x(1-x^2)\}$

$=(1-x^2)^2-x^2(1-x^2)^2$

$=(1-x^2)^3$

$=\boldsymbol{1-3x^2+3x^4-x^6}$

(4) 与式$=\{a+(b+c)\}\times\{a^2-(b+c)a+(b^2-bc+c^2)\}$

$=a^3+\{(b+c)-(b+c)\}a^2+\{(b^2-bc+c^2)-(b+c)^2\}a+(b+c)(b^2-bc+c^2)$

$=a^3-3bca+b^3+c^3$

$=\boldsymbol{a^3+b^3+c^3-3abc}$

**9** (1) 与式$=(x+y)(x^2-xy+y^2)+xy(x+y)$

$=\boldsymbol{(x+y)(x^2+y^2)}$

(2) 与式$=(x^3)^2-(y^3)^2$

$=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$=\boldsymbol{(x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)}$

(3) 与式$=(x^3+27)(x^3-1)$

$=\boldsymbol{(x+3)(x-1)(x^2-3x+9)(x^2+x+1)}$

(4) 与式$=\{(2x+y)+(x-2y)\}\times\{(2x+y)^2-(2x+y)(x-2y)+(x-2y)^2\}$

$=\boldsymbol{(3x-y)(3x^2+3xy+7y^2)}$

(5) 与式$=x^3+1+3x(x+1)$

$=(x+1)(x^2-x+1)+3x(x+1)$

$=(x+1)(x^2+2x+1)=\boldsymbol{(x+1)^3}$

(6) 与式$=a^3-8b^3-6ab(a-2b)$

$=(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)-6ab(a-2b)$

$=(a-2b)(a^2-4ab+4b^2)=\boldsymbol{(a-2b)^3}$

**10** (1) 一般項は，${}_5C_r(3x^2)^{5-r}\cdot1^r=3^{5-r}{}_5C_rx^{10-2r}$

$10-2r=6$ のとき，$r=2$