第5講座　２次関数のグラフ

基本の整理

〈定義域と値域〉 ▶ x の変域を定義域といい，x に対応する y の変域を値域という。

1　次の関数の値域を求めよ。

(1)　$y=5x-1$　$(0\leqq x\leqq 2)$

(2)　$y=-3x+2$　$(-4\leqq x\leqq 3)$

(3)　$y=x^2-1$　$(-3\leqq x\leqq 1)$

(4)　$y=-2x^2+4$　$\left(-\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq \dfrac{1}{2}\right)$

〈$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ〉 ▶ $y=a(x-p)^2+q$ の軸の方程式は $x=p$，頂点は $(p,\ q)$ である。

2　次の放物線の軸の方程式と頂点の座標をいえ。また，そのグラフをかけ。

(1)　$y=2(x-1)^2-3$

(2)　$y=-\dfrac{1}{2}(x+4)^2+6$

〈$y=ax^2+bx+c$ のグラフ〉 ▶ $y=ax^2+bx+c$ は，$y=a(x-p)^2+q$ の形に変形する。

3　次の放物線の軸の方程式と頂点の座標をいえ。また，そのグラフをかけ。

(1)　$y=x^2-6x+7$

(2)　$y=-2x^2-8x$

〈２次関数の最大・最小①〉 ▶放物線の頂点で，y の値は最大または最小になる。

4　次の２次関数の最大値または最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1)　$y=(x-5)^2-1$

(2)　$y=-3(x+1)^2+10$

(3)　$y=2x^2-x-4$

(4)　$y=\dfrac{1}{3}x^2-x+1$

〈２次関数の最大・最小②〉 ▶定義域に制限があるときには，グラフにより，頂点と両端を確認する。

5　次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1)　$y=x^2-3x$　$(0\leqq x\leqq 4)$

(2)　$y=-2x^2+4x+5$　$(-2\leqq x\leqq 0)$

〈条件つきの最大・最小〉 ▶条件式により文字を消去し，変数を１つにする。

6　次の問いに答えよ。

(1)　$x+y=4$ のとき，$2x^2+y^2$ の最小値を求めよ。

(2)　$x^2+y^2=1$ のとき，x^2-4y の最大値，最小値を求めよ。

演　習

例題　2次関数の決定

7　2次関数のグラフが次の条件を満たすとき，各場合について，その2次関数を求めよ。

(1)　軸の方程式が $x=-2$ で，2点 $(-3,\ 7)$，$(2,\ -8)$ を通る。

(2)　3点 $(-2,\ 5)$，$(1,\ -4)$，$(3,\ 10)$ を通る。

解法のポイント　(1)　$y=a(x+2)^2+q$ とおく。

(2)　3点の座標が与えられたときは，$y=ax^2+bx+c$ とおく。

8　**類題**　2次関数のグラフが次の条件を満たすとき，各場合について，その2次関数を求めよ。

(1)　頂点の座標が $(-1,\ 2)$ で，点 $(-3,\ -6)$ を通る。

(2)　軸の方程式が $x=2$ で，2点 $(0,\ -1)$，$(6,\ 5)$ を通る。

(3)　3点 $(-3,\ -18)$，$(-1,\ 0)$，$(2,\ 12)$ を通る。

9　次の放物線の軸の方程式と頂点の座標をいえ。また，そのグラフをかけ。

(1)　$y=(x-4)(1-x)$　　(2)　$y=2(x+1)^2$

(3)　$y=\dfrac{3}{2}x^2-6x+1$　　(4)　$y=-2x^2-6x+\dfrac{7}{2}$

10　次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y=|x|(x-4)$　　(2)　$y=x^2-3|x+2|+3x+6$

11　次の問いに答えよ。

(1)　放物線 $y=x^2+4x-2$ は，放物線 $y=x^2-2x+1$ をどのように平行移動したものか。

(2)　放物線 $y=-2x^2+12x-11$ は，ある放物線を x 軸方向に5，y 軸方向に -10 だけ平行移動したものであるという。もとの放物線の方程式を求めよ。

12　**発展**　放物線 $y=2x^2-4x+1$ のグラフについて，次の問いに答えよ。

(1)　直線 $x=2$ に関して対称移動した放物線の方程式を求めよ。

(2)　点 $(0,\ 4)$ に関して対称移動した放物線の方程式を求めよ。

ヒント　まず，初めの放物線の頂点の座標を求めて，その移動を考えればよい。

例題　文字係数の２次関数の最大・最小

13　関数 $y=x^2+ax$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値および最小値を求めよ。

解法のポイント　軸の位置に注意して，場合分けを考える。

14 **類題**　関数 $y=x^2-2ax$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値および最小値を求めよ。

15　次の条件を満たすように，定数 a，b の値を定めよ。

(1)　関数 $y=2x^2+ax+b$ は，$x=1$ のとき，最小値 3 をとる。

(2)　関数 $y=ax^2+2ax+b\,(-2 \leqq x \leqq 2)$ の最大値は 9 で，最小値は -18 である。ただし，$a<0$ とする。

16　２次関数 $y=-2x^2+6x$ の定義域が次の範囲であるとき，各場合について，その関数の最大値と最小値を求めよ。

(1)　$-2 \leqq x \leqq -1$　　(2)　$-1 \leqq x \leqq 3$　　(3)　$2 < x \leqq 4$

17　次の関数の最大値および最小値を求めよ。

(1)　$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+y=2$ のとき，x^2-xy+y^2

(2)　$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$2x+y=4$ のとき，$4x^2+6xy+y^2$

18　２次関数 $f(x)=x^2-2ax+a$ の最小値を a の関数と考えたとき，その最大値を求めよ。

19　放物線 $y=4-x^2$ と x 軸に内接する長方形の周の長さの最大値を求めよ。

20　ある品物は，売価が１個200円のとき，１日300個の売り上げがある。売価を１個につき５円値上げすると，６個の割合で売り上げが減る。１日の売り上げ金額を最大にするには，売価をいくらにすればよいか。

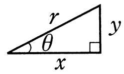
21 **発展**　関数 $f(x)=a(x^2+2x+2)^2+2a(x^2+2x+2)+b$ の最小値は 6 であり，$f(0)=11$ である。このとき，a，b の値を求めよ。

ヒント　$X=x^2+2x+2$ とおくと，$X=(x+1)^2+1$ より，$X \geqq 1$

第7講座 三角比

基本の整理

〈三角比〉▶右の図の直角三角形で，$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$，$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$



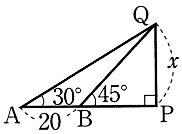
1　次の三角比の値を求めよ。

(1)　$\sin 60^\circ$　　(2)　$\cos 60^\circ$　　(3)　$\tan 60^\circ$

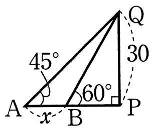
〈三角比の利用〉▶上の三角比の式より，$y=r\sin\theta$，$x=r\cos\theta$，$y=x\tan\theta$

2　右の図で，x の値を求めよ。

(1)



(2)



〈90°－θ の三角比〉▶$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$，$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$，$\tan(90^\circ-\theta)=\dfrac{1}{\tan\theta}$

3　次の三角比を 0° から 45° までの角の三角比で表せ。

(1)　$\sin 62^\circ$　　(2)　$\cos 55^\circ$　　(3)　$\tan 77^\circ$

〈鈍角の三角比〉▶P$(x,\ y)$，OP$=r$ のとき，$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$，$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$

4　次の三角比の値を求めよ。

(1)　$\sin 150^\circ$　　(2)　$\cos 150^\circ$　　(3)　$\tan 150^\circ$

〈180°－θ の三角比〉▶$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$，$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$，$\tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta$

5　次の三角比を鋭角の三角比で表せ。

(1)　$\sin 147^\circ$　　(2)　$\cos 113^\circ$　　(3)　$\tan 129^\circ$

〈等式を満たすθ〉▶単位円をかいて考える。単位円周上で，$\sin\theta=y$，$\cos\theta=x$ となる。

6　次の等式を満たすθの値を求めよ。ただし，$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ とする。

(1)　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$2\cos\theta+1=0$　　(3)　$3\tan\theta+\sqrt{3}=0$

〈三角比の相互関係〉▶$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

7　$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ とする。次の各場合について，他の２つの三角比の値をそれぞれ求めよ。

(1)　$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$　　(2)　$\cos\theta=-\dfrac{3}{4}$　　(3)　$\tan\theta=-3$

演　習

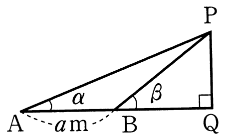
例題 三角比の式の計算

8 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ の値を求めよ。

解法のポイント　条件式の両辺を2乗して，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ の関係を利用する。

9 **類題** $\sin\theta-\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ $(0°\leqq\theta\leqq180°)$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$，$\sin\theta+\cos\theta$ の値を求めよ。

10 地点Aで，木の先端Pの仰角を測るとαで，木に向かってa m進んだ地点Bで仰角を測るとβであった。目の高さは考えないものとして，木の高さPQをa，α，βを用いて表せ。



11 次の式の値を求めよ。

(1) $\sin25°\cos65°+\sin65°\cos25°$　　(2) $(\sin10°-\cos10°)^2+(\sin80°+\cos80°)^2$

12 次の不等式を満たすθの値の範囲を求めよ。ただし，$0°\leqq\theta\leqq180°$ とする。

(1) $\sin\theta<\dfrac{1}{2}$　　(2) $\cos\theta\leqq-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(3) $\sin\theta>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

13 $0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき，次の等式または不等式を満たすθの値，またはθの値の範囲を求めよ。

(1) $2\sin^2\theta+\cos\theta=1$　　(2) $2\sin\theta-\tan\theta=0$

(3) $2\cos^2\theta+3\cos\theta-2<0$　　(4) $2+\cos\theta<2\sin^2\theta$

14 次の問いに答えよ。ただし，$0°<\theta<90°$ とする。

(1) $\cos\theta=\dfrac{5}{13}$ のとき，$\dfrac{2\sin\theta-3\cos\theta}{4\sin\theta-9\cos\theta}$ の値を求めよ。

(2) $\tan\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$(\sin\theta+\cos\theta)^2$ の値を求めよ。

15 $0°\leqq x\leqq180°$ のとき，$y=2\sin^2x-2\cos x-1$ の最大値，最小値とそのときのxの値を求めよ。

16 **発展** 2次方程式 $4x^2-2(a+1)x+a=0$ の2つの解が$\sin\theta$，$\cos\theta$であるとき，aとθの値を求めよ。ただし，$a>0$，$0°<\theta<180°$ とする。

ヒント　解と係数の関係から，$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{a+1}{2}$，$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{a}{4}$ である。

解　答　《selectⅢ 高１数学Ⅰ》

第1講座　数と式　(1)

【p.2】

1　(1)　$16x^3-x^2-2x+3$　　(2)　$-4a^2+2a$

2　(1)　a^{12}　　(2)　$-8x^3y^6$　　(3)　$-2x^4y^5$

3　(1)　$x^3-18x+27$

(2)　$a^6-2a^5-5a^4+17a^3-6a^2-20a+12$

4　(1)　$4a^2-12ab+9b^2$　　(2)　$25x^4-16y^4$

(3)　$8a^3-12a^2+6a-1$　　(4)　$27a^3-64b^3$

5　(1)　$3ac(3b^2-2ac-bc)$

(2)　$2(3a+b)(3a-b)$　　(3)　$x(a-b)(x+y)$

(4)　$(ax-b)(x+a)$

6　(1)　$(4x+3)(3x-5)$

(2)　$(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$

(3)　$(2x+y-1)(x+2y-1)$

(4)　$x^2-x=A$ とおくと，

与式$=A^2+4A-12=(A-2)(A+6)$

$=(x^2-x-2)(x^2-x+6)$

$\boldsymbol{=(x+1)(x-2)(x^2-x+6)}$

【p.3】

7　(1)　与式$=\{x+(y-z)\}\{x-(y-z)\}$

$=(x+A)(x-A)$　　　($y-z=A$ とおく)

$=x^2-A^2=x^2-(y-z)^2$

$\boldsymbol{=x^2-y^2+2yz-z^2}$

(2)　与式$=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$

$=(A+4)(A+6)$　　　($x^2+5x=A$ とおく)

$=A^2+10A+24$

$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24$

$\boldsymbol{=x^4+10x^3+35x^2+50x+24}$

8　(1)　$a^2-4b^2+16b-16$

(2)　$x^4+16x^3+86x^2+176x+105$

(3)　$a^4+a^2b^2+b^4$

(4)　$x^4-6x^3-5x^2+42x+40$

9　(1)　$4a^4b-2a^3b^2-3a^2b^3$　　(2)　$3a^5b^5$

10　$-4x^2-7x-4$

11　(1)　$15a^2+14ab-8b^2$

(2)　x^3-5x^2+4x+6　　(3)　$8a^3-27b^3$

(4)　x^5-5x-4

12　(1)　$8x^3+60x^2+150x+125$

(2)　$a^3-9a^2b+27ab^2-27b^3$

(3)　$a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$

(4)　$x^4-4x^3-2x^2+12x+9$

13　(1)　x^4-10x^2+9　　(2)　$x^8-32x^4y^4+256y^8$

(3)　$a^2-4b^2-9c^2+12bc$

(4)　x^4-x^2-2x-1

14　$ux+vy=a$，$vx+uy=b$ とおくと，

$a+b=(x+y)(u+v)=-20$

$ab=uv(x^2+y^2)+xy(u^2+v^2)=26$

与式$=a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=(-20)^3-3\times26\times(-20)=\boldsymbol{-6440}$

【p.4】

15　(1)　与式$=b^2c-a^2c+a^2b-b^3$

$=c(b^2-a^2)-b(b^2-a^2)$

$=(c-b)(b^2-a^2)$

$\boldsymbol{=(a+b)(a-b)(b-c)}$

(2)　与式$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$\boldsymbol{=(a+b)(b+c)(c+a)}$

16　(1)　与式$=x^2y-xy^2-2z(x^2-y^2)$

$\boldsymbol{=(x-y)(xy-2yz-2zx)}$

(2)　与式$=x^2y-y^3-z(x^2-y^2)$

$=(x^2-y^2)(y-z)$

$\boldsymbol{=(x+y)(x-y)(y-z)}$

(3)　与式$=(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc(c-b)$

$=(c-b)\{a^2-(c+b)a+bc\}$

$\boldsymbol{=(a-b)(b-c)(c-a)}$

(4)　与式$=a(b-c)^2+a^2(b+c)+bc^2+b^2c+4abc$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$

$\boldsymbol{=(b+c)(c+a)(a+b)}$

17　(1)　$(2x+3)(x-2)$　　(2)　$(2a-3b)(a-2b)$

(3)　$ab(a+b)(a-b)$　　(4)　$(x+y-1)(x-y+1)$

18　(1)　$(x-y)(2a+3b)(2a-3b)$

(2)　与式$=x^2-(y-z)^2=\boldsymbol{(x+y-z)(x-y+z)}$

(3)　$a^2+b^2-1=A$ とおくと，

与式$=A^2-(2ab)^2=(A+2ab)(A-2ab)$

$\boldsymbol{=(a+b+1)(a+b-1)(a-b+1)(a-b-1)}$

(4)　与式$=(ab-1)^2-(a+b)^2$

$\boldsymbol{=(ab+a+b-1)(ab-a-b-1)}$

19　(1)　$(3a+b)(9a^2-3ab+b^2)$

(2)　$(x-y+2z)(x^2+y^2+4z^2-2xy+2yz-2zx)$

(3)　$(x^2+4)(x+1)(x-1)$

(4)　与式$=(x^3)^2-(8y^3)^2$

$=(x^3+8y^3)(x^3-8y^3)$

$\boldsymbol{=(x+2y)(x-2y)(x^2-2xy+4y^2)}$

$\boldsymbol{\times(x^2+2xy+4y^2)}$

20　(1)　$(a-b-2)(a-b-3)$

(2)　$a^2-a+1=A$ とおくと，

与式$=A(A+2)-15=(A-3)(A+5)$

$=(a^2-a-2)(a^2-a+6)$

$\boldsymbol{=(a+1)(a-2)(a^2-a+6)}$

(3)　$(x+2)(x-3)(x^2-x+10)$