第2講座 図形と方程式

基本の整理

〈分点の座標〉 ▶ $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ のとき，線分 AB を $m:n$ に分ける点は $\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}, \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$

1 2 点 $A(-2,\ 5)$，$B(8,\ 3)$ を結ぶ線分 AB を $3:2$ に内分する点，外分する点の座標をそれぞれ求めよ。

〈2 直線の平行・垂直〉 ▶ $y=m_1x+n_1$，$y=m_2x+n_2$ で，平行条件は $m_1=m_2$，垂直条件は $m_1m_2=-1$

2 点 $(1,\ 3)$ を通り，直線 $y=2x+5$ に平行な直線，および，垂直な直線の方程式を求めよ。

〈点と直線との距離〉 ▶点 $P(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ との距離は，$\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

3 次の点と直線との距離を求めよ。

(1)　原点と直線 $y=3x+7$　　(2)　点 $(-2,\ 3)$ と直線 $3x-4y+5=0$

〈円の方程式〉 ▶点 $(a,\ b)$ を中心とし，半径 r の円の方程式は $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

4 次の円の方程式を求めよ。

(1)　点 $(1,\ 3)$ を中心とし，半径 5 の円　　(2)　点 $(-4,\ 5)$ を中心とし，原点を通る円

〈円と直線〉 ▶円と直線の方程式から 1 文字を消去した 2 次方程式の判別式 D の符号により調べる。

5 次の円と直線との位置関係を調べよ。共有点がある場合には，その座標を求めよ。

(1)　$x^2+y^2=5$，$x+y=1$　　(2)　$x^2+y^2-6x=0$，$2x-y+1=0$

〈円の接線〉 ▶円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は $x_1x+y_1y=r^2$

6 次の円周上の与えられた点における接線の方程式を求めよ。

(1)　$x^2+y^2=4$　$(-1,\ \sqrt{3})$　　(2)　$(x+1)^2+(y-4)^2=25$　$(-4,\ 8)$

〈軌跡〉 ▶2 点 A，B からの距離の比が $m:n\ (m \neq n)$ である点の軌跡はアポロニウスの円となる。

7 2 点 $A(0,\ 0)$，$B(4,\ 3)$ からの距離の比が $1:3$ であるような点の軌跡を求めよ。

〈不等式の表す領域〉 ▶ $y>f(x)$ は $y=f(x)$ の上側を表し，$x^2+y^2>r^2$ は円 $x^2+y^2=r^2$ の外部を表す。

8 次の不等式，連立不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$2x-y-3 \geqq 0$　　(2)　$\begin{cases} x^2+y^2>1 \\ y<x \end{cases}$

演　習

例題　領域と最大・最小

9　x，y が連立不等式 $x^2+y^2-2x-4y \leqq 0$，$y \geqq 2$ を満たすとき，$3x+y$ のとる最大値と最小値を求めよ。

解法のポイント　与えられた領域を図示し，直線 $3x+y=k$ がこの領域と共有点をもつときの k の値の範囲を求める。

10 **類題**　x，y が連立不等式 $y \geqq x^2$，$x+y \leqq 2$ を満たすとき，$y-x$ のとる最大値と最小値を求めよ。

11　2 直線 $(k+2)x+(k+3)y=10$，$6x+(2k-1)y=5$ について，この 2 直線が平行になるときの k の値，および，垂直になるときの k の値をそれぞれ求めよ。

12　次の円の方程式を求めよ。

(1)　点 $(3,\ -4)$ を中心とし，直線 $4x-3y=49$ に接する円

(2)　2 点 $(2,\ 10)$，$(6,\ 8)$ を通り，直線 $y=x+2$ 上に中心をもつ円

(3)　2 つの円 $x^2+y^2-4x-5=0$，$x^2+y^2+2y-15=0$ の交点と，原点を通る円

13　次の円の接線の方程式を求めよ。

(1)　円 $x^2+y^2=25$ の周上の点 $(-5,\ 0)$ におけるこの円の接線

(2)　点 $(-5,\ 0)$ から円 $x^2+y^2=9$ にひいた接線

14　次の問いに答えよ。

(1)　2 点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$，$\mathrm{B}(3,\ -2)$ から等距離にある点 P の軌跡を求めよ。

(2)　2 点 $\mathrm{A}(2,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$ に対して，$\mathrm{PA}^2+2\mathrm{PB}^2=9$ となる点 P の軌跡を求めよ。

(3)　放物線 $y=-x^2+tx$ について，t がすべての実数値をとりながら変化するとき，この放物線の頂点の軌跡を求めよ。

15　次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$|x|+|y|<1$　　　(2)　$(x-y+1)(x^2+y^2-2) \geqq 0$

16 **発展**　2 つの円 $x^2+y^2=4$，$x^2+y^2-2x-2y=0$ にひいた接線の長さが等しい点 P の軌跡を求めよ。

ヒント　接点，点 P，円の中心でできる直角三角形を考える。点 P の x 座標の値の範囲に注意する。

第3講座 三角関数

基本の整理

〈弧度法〉 ▶半径 1 の円において長さ 1 の弧に対する中心角の大きさを 1 ラジアンという。

1 次の角を，度数は弧度に，弧度は度数に，それぞれ表せ。

(1) $120°$　(2) $-225°$　(3) $\frac{5}{6}\pi$　(4) $-\frac{7}{12}\pi$

〈三角関数の性質〉 ▶ $\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta$，$\sin(-\theta)=-\sin\theta$，$\sin(\pi\pm\theta)=\mp\sin\theta$ (複号同順)

2 次の三角関数の値を求めよ。

(1) $\sin\frac{13}{6}\pi$　(2) $\cos\left(-\frac{10}{3}\pi\right)$　(3) $\tan\frac{19}{6}\pi$

〈三角関数のグラフ〉 ▶ $y=\sin\theta$，$y=\tan\theta$ のグラフは原点対称，$y=\cos\theta$ のグラフは y 軸対称。

3 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y=2\cos\theta$　(2) $y=\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$　(3) $y=-\sin2\theta$

〈三角方程式，三角不等式〉 ▶ $\sin\theta=a$，$\sin\theta<a$ などの形に導き，θ の変域に注意して解く。

4 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の等式，不等式を満たす θ の値，または θ の値の範囲を求めよ。

(1) $2\sin\theta=\sqrt{3}$　(2) $2\cos\theta<-\sqrt{3}$　(3) $\tan\theta\leqq\sqrt{3}$

〈加法定理〉 ▶ $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$，$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$ (複号同順)

5 次の値を求めよ。

(1) $\sin105°$　(2) $\cos15°$　(3) $\tan75°$

〈2 倍角の公式〉 ▶加法定理の公式で $\beta=\alpha$ とおくことによって，2 倍角の公式が得られる。

6 α が鋭角で，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin2\alpha$　(2) $\cos2\alpha$　(3) $\tan2\alpha$

〈三角関数の合成〉 ▶ $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ ただし，$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

7 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

(1) $\sin\theta+\cos\theta$　(2) $\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$

演　習

例題　最大値，最小値

8　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，関数 $y=\cos^2\theta-\sin\theta$ の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

解法のポイント　$\sin\theta=t$ とおくと，与えられた関数は t の 2 次関数に書き換えられる。$|t| \leqq 1$ での最大，最小を調べる。

9　**類題**　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の関数の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

(1)　$y=\sin^2\theta+4\cos\theta+1$　　(2)　$y=2\tan^2\theta+4\tan\theta-1$

10　次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$\left(\tan\theta+\dfrac{1}{\cos\theta}\right)^2=\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$　　(2)　$\dfrac{1+2\sin\theta\cos\theta}{1-2\sin\theta\cos\theta}=\left(\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}\right)^2$

11　次の関数のグラフをかけ。また，y の最大値，最小値を求めよ。

(1)　$y=\cos\dfrac{\theta}{2}-1$　　(2)　$y=2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$

12　次の問いに答えよ。

(1)　$\sin\theta-\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(2)　$\tan\theta=2-\sqrt{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

13　次の方程式，不等式を解け。ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1)　$4\cos^2\theta-4\sin\theta-1=0$　　(2)　$2\sin^2\theta \leqq 3\cos\theta$

(3)　$2\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$　　(4)　$\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)>1$

14　**発展**　方程式 $\sin^2\theta-2\sin\theta+a=0$ が実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

ヒント　$\sin\theta=t$ とおき，t の方程式が $-1 \leqq t \leqq 1$ に解をもつ条件を求める。

例題　合成による方程式の解法

15　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 1$ を解け。

解法のポイント　三角関数の合成を用いて，左辺を変形する。

16 類題　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}$　　(2)　$2\sin\theta + 2\cos\theta < -\sqrt{6}$

17　次の値を求めよ。ただし，α は鋭角，β は鈍角とする。

(1)　$\cos\alpha = \frac{5}{13}$，$\sin\beta = \frac{4}{5}$ のとき，$\sin(\alpha - \beta)$，$\cos(\alpha - \beta)$，$\tan(\alpha - \beta)$ の値

(2)　$\tan\alpha = 2$，$\tan\beta = -1$ のとき，$\sin(\alpha + \beta)$，$\cos(\alpha + \beta)$，$\tan(\alpha + \beta)$ の値

18　次の問いに答えよ。

(1)　不等式 $\sin 2\theta > \sin\theta$　$(0 \leqq \theta < 2\pi)$ を解け。

(2)　$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で，$\sin\alpha = \frac{4}{5}$ のとき，$\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$，$\tan\frac{\alpha}{2}$ の値を求めよ。

19　次の関数の最大値，最小値を求めよ。ただし，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする。

(1)　$y = \sin\theta - \cos\theta$　　(2)　$y = 2\cos^2\theta + \sqrt{3}\sin 2\theta + 1$

20　次の問いに答えよ。

(1)　$\sin 65^\circ - \sin 55^\circ - \sin 5^\circ$ の値を求めよ。

(2)　方程式 $\sin 5\theta + \sin 3\theta = 0$　$(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ を解け。

(3)　関数 $y = \sin\theta \sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right)$　$(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ の最大値，最小値を求めよ。

21　△ABC において，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$$

22 発展　次の方程式，不等式を満たす点 $(x,\ y)$ は，どのような図形上にあるか。その図形を示せ。ただし，$0 \leqq x < 2\pi$，$0 \leqq y < 2\pi$ とする。

(1)　$\cos x = \cos y$　　(2)　$\sin x \geqq \sin y$

ヒント　方程式や不等式を解く要領で，x と y の関係式を導く。

解　答　《selectⅢ 高2数学Ⅱ》

第1講座　式と証明，方程式

【p.2】

1 (1)　$a+2=b$，$b+1=3$ より，$\boldsymbol{a=0}$，$\boldsymbol{b=2}$

(2)　$x=2$ を代入して，$8=c$，$x=3$ を代入して，$a+b=18$，$x=1$ を代入して，$a-b=-6$
これを解いて，$\boldsymbol{a=6}$，$\boldsymbol{b=12}$，また，$\boldsymbol{c=8}$

2 (1)　左辺$=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$
右辺$=a^2c^2-2abcd+b^2d^2+a^2d^2+2abcd+b^2c^2$
$=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$
よって，左辺＝右辺

(2)　左辺$=a^3+b^3+(-a-b)^3$（$c=-a-b$ より）
$=a^3+b^3+(-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3)$
$=-3ab(a+b)=-3ab(-c)=3abc=$右辺

3 (1)　$x^2+9y^2-6xy=(x-3y)^2\geqq 0$ より，
$x^2+9y^2\geqq 6xy$　（等号は$x=3y$ のとき成立）

(2)　$a^2+2b^2+1-2b(a+1)$
$=(a-b)^2+(b-1)^2\geqq 0$より，
$a^2+2b^2+1\geqq 2b(a+1)$
（等号は，$a=b=1$ のとき成立）

4 (1)　$\dfrac{2}{3i}=\dfrac{2\cdot i}{3i\cdot i}=\boldsymbol{-\dfrac{2i}{3}}$

(2)　m を整数として，$i^{4m}=1$，$i^{4m+1}=i$，$i^{4m+2}=-1$，$i^{4m+3}=-i$より，
$i^5-(-i)^{19}=i-i=0$

(3)　$\dfrac{4+5i}{4-5i}=\dfrac{(4+5i)^2}{(4-5i)(4+5i)}=\boldsymbol{-\dfrac{9}{41}+\dfrac{40}{41}i}$

5 (1)　異なる２つの実数解

(2)　異なる２つの虚数解

6 (1)　$-\dfrac{20}{9}$　　(2)　$-\dfrac{56}{9}$　　(3)　$\dfrac{5}{3}$

7　$f(-2)=(-2)^3-2\cdot(-2)+5=1$ より，余りは**1**

8　$f(-2)=-8k-4=0$ より，$\boldsymbol{k=-\dfrac{1}{2}}$

【p.3】

9　左辺－右辺$=a^3-b^3-2ab(a-b)$
$=(a-b)(a^2-ab+b^2)$
$=(a-b)\left\{\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2\right\}\geqq 0$
（等号は $a=b$ のとき成立）

10　右辺－左辺$=2(ax+by)-(a+b)(x+y)$
$=ax+by-ay-bx=(a-b)(x-y)\geqq 0$
（等号は $a=b$ または $x=y$ のとき成立）

11　$x=0$ のとき，$\boldsymbol{d=-3}$，$x=1$ のとき，
$c+d=2$　よって，$\boldsymbol{c=5}$，$x=2$ のとき，
$2b+2c+d=3$ より，$\boldsymbol{b=-2}$
$x=-1$ のとき，$-6a+2b-c+d=-18$ より，
$\boldsymbol{a=1}$

12　$(x+2y-1)k+8x-5y-8=0$
k についての恒等式だから，$x+2y-1=0$
$8x-5y-8=0$　これを解いて，$\boldsymbol{x=1}$，$\boldsymbol{y=0}$

13 (1)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと，$a=bk$，$c=dk$

左辺$=\dfrac{bk-dk}{b-d}=k$

右辺$=\dfrac{(bk)d+b(dk)}{2bd}=k$

よって，左辺＝右辺

(2)　$x^2+y^2+\dfrac{1}{2}-(x+y)$

$=\left(x^2-x+\dfrac{1}{4}\right)+\left(y^2-y+\dfrac{1}{4}\right)$

$=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=0$ より，$x=y=\dfrac{1}{2}$

14　$x^3+y^3+z^3-3xyz$
$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ より
$1-3xyz=1\cdot\{(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\}$
$=1-3(xy+yz+zx)$
よって，$xyz=xy+yz+zx$　これより，
$(x-1)(y-1)(z-1)$
$=xyz-(xy+yz+zx)+(x+y+z)-1=0$
ゆえに，$(x-1)(y-1)(z-1)=0$
したがって，x，y，z のうち少なくとも１つは1。

15 (1)　$a^3-b^3-3b^2(a-b)=(a-b)^2(a+2b)\geqq 0$
よって，$a^3-b^3\geqq 3b^2(a-b)$
（等号は $a=b$ のとき成立）

(2)　左辺>0，右辺>0 より，
$\{\sqrt{2(x+y)}\}^2-(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$
$=x+y-2\sqrt{x}\sqrt{y}=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geqq 0$
$\{\sqrt{2(x+y)}\}^2\geqq(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$
よって，$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqq\sqrt{2(x+y)}$
（等号は $x=y$ のとき成立）

(3)　$|a+b|^2-(|a|+|b|)^2$
$=a^2+2ab+b^2-(a^2+2|a||b|+b^2)$
$=2(ab-|ab|)$
$ab\geqq 0$ のとき，$ab-|ab|=0$
$ab<0$ のとき，$ab-|ab|=2ab<0$
よって，$|a+b|^2\leqq(|a|+|b|)^2$
ゆえに，$|a+b|\leqq|a|+|b|$……①
次に，①において，a を $a+b$，b を $-b$ とおきかえると，$|a+b-b|\leqq|a+b|+|-b|$
よって，$|a|\leqq|a+b|+|b|$
ゆえに，$|a|-|b|\leqq|a+b|$……②
（等号は，$(a+b)(-b)\geqq 0$ より，$0\leqq b\leqq -a$ または，$-a\leqq b\leqq 0$ のとき）
①，②より，$|a|-|b|\leqq|a+b|\leqq|a|+|b|$