第2講座　組合せ

基本の整理

〈組合せ〉 ▶異なる n 個のものから r 個取り出して1組とした組合せの総数は ${}_n\mathrm{C}_r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

1 男子6人，女子4人の中から4人を選ぶとき，次のような選び方は何通りあるか。

(1)　全体から4人を選ぶ

(2)　男子から2人，女子から2人を選ぶ

〈順列と組合せ〉 ▶組合せで選んでから，順列で並べる。

2 次の問いに答えよ。

(1)　男子4人，女子6人から男子2人，女子3人を選んで1列に並べる並べ方は何通りあるか。

(2)　1から9までの整数から，異なる3数を選び，3桁の整数をつくる。3数の和が奇数になるような3桁の整数は何個あるか。

〈同じものを含む順列〉 ▶ p 個，q 個，r 個，……が同じものである順列の総数は $\dfrac{n!}{p!q!r!\cdots\cdots}$

3 SUCCESSの7文字を並べるとき，次のような並べ方は何通りあるか。

(1)　7文字の並べ方の総数

(2)　U，Eが隣り合わない

(3)　UがEより左側にある

〈組合せと図形〉 ▶平行四辺形…縦2本，横2本の平行線で1つ決まる。

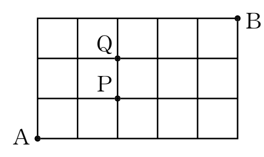
4 等間隔に引いた5本の平行線と，それに垂直に交わる等間隔の5本の平行線がある。これらの平行線によってできる長方形(正方形を含む)は何個あるか。また，正方形は何個あるか。

〈最短距離〉 ▶↑と→の順列で考える。各区間で，↑と→の数を数えて同じものを含む順列を利用。

5 右の図で，次の場合，最短距離で行く道順は何通りあるか。

(1)　AからPを通ってBへ行く

(2)　AからQを通らないでBへ行く



〈重複組合せ〉 ▶異なる n 個のものから重複を許して r 個取る組合せの総数は ${}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$

6 次の問いに答えよ。

(1)　4個の文字a，b，c，dから重複を許して7個取り出す方法は何通りあるか。ただし，1つも取り出さない文字があってもよいとする。

(2)　候補者3名に対し，25名が1人1票の無記名投票を行う。票の分かれ方は何通りあるか。

演　習

例題 組分け

7　12人の生徒を次のように分ける方法は何通りあるか。

(1)　5人，4人，3人の3つの組に分ける。

(2)　4人ずつ3組に分ける。

(3)　6人，3人，3人の3つの組に分ける。

(4)　3人ずつA，B，C，Dの4組に分ける。

解法のポイント　同じ数に分けるときに注意が必要である。

8 類題　7人の生徒を次のように分ける方法は何通りあるか。

(1)　3人，2人，2人の3つの組に分ける。

(2)　A，B，Cの部屋に4人，2人，1人に分ける。

9　男子10人，女子5人の中から合計3人の代表を選ぶ方法は何通りあるか。また，代表3人のうちに女子が少なくとも1人含まれるような選び方は何通りあるか。

10　赤玉4個，青玉3個，白玉2個がある。次のような場合の並べ方は何通りあるか。

(1)　9個全部を1列に並べる。　　(2)　8個を取り出して1列に並べる。

11　白い碁石7個と黒い碁石3個を1列に並べるとき，黒い碁石が隣り合わないような並べ方は何通りあるか。

12　1，2，3，4，5，6の数字のうち，2種類の数字を用いて表される3桁の数字はいくつあるか。

13 発展　1つのさいころを4回振るとき，ちょうど2種類の目が出る場合は何通りあるか。また，4つの同じ大きさのさいころを同時に振るとき，ちょうど2種類の目が出る場合は何通りあるか。

ヒント　1回目から4回目までの中で，2種類の目のどちらが出てもよい。(重複順列の考え方)

例題　重複組合せ

14　7 個の同じ品物をA，B，Cの 3 人に分ける方法について，次の問いに答えよ。

(1)　品物を 1 個ももらえない人がいてもよいとすると，分け方は何通りあるか。

(2)　A，B，Cがいずれも，少なくとも 1 個の品物をもらう分け方は何通りあるか。

解法のポイント　(1)　A，B，Cの 3 個から重複を許して 7 個取る重複組合せ。
→ 7 個の○と 2 本の仕切り｜の並びかえで考えることができる。

○｜○○○○｜○○
A　　B　　C

15　**類題**　次の問いに答えよ。

(1)　8 個の同じ球をA，B，C，Dの 4 つの箱に分けて入れる方法は何通りあるか。ただし，球を 1 個も入れない箱があってもよいとする。

(2)　$x+y+z=9$ を満たす次のような整数の組$(x,\ y,\ z)$は何組あるか。

①　負でない整数の組　　　②　正の整数の組

16　excellentの 9 文字を並べるとき，次のような並べ方は何通りあるか。

(1)　c，n，t がこの順序で並ぶ　　(2)　e はすべて l より左側にある

(3)　e と l はすべて奇数番目に並ぶ

17　1 つの正六角形の辺と対角線は合計 $\boxed{(1)}$ 本ある。これらの線分全体から異なる 2 本の線分を選ぶ組合せは $\boxed{(2)}$ 通りである。これらのうち，

選んだ 2 本の線分が平行である場合は $\boxed{(3)}$ 通りである。

選んだ 2 本の線分が頂点以外の点で交わる場合は $\boxed{(4)}$ 通りである。

18　赤球 5 個，白球 9 個がある。これらをA，B，Cの 3 つの箱に分けるとき，次のような分け方は何通りあるか。ただし，同じ色の球は区別しないものとする。

(1)　すべての箱に白球を同数ずつ入れ，すべての箱に赤玉を少なくとも 1 つは入れる。

(2)　球が 1 つも入っていない箱があってもよいとして入れる。

19　**発展**　互いに身長の異なる 8 人を，山の形に整列させる。すなわち，i 番目に並ぶ人の身長を h_i とするとき，ある k $(2\leqq k\leqq 7)$ があって，$h_1<\cdots\cdots<h_k$（この部分を「登り坂」という）かつ $h_k>\cdots\cdots>h_8$（この部分を「下り坂」という）が成立するようにする。次の問いに答えよ。

(1)　$k=2$ となる並べ方は何通りあるか。

(2)　$k=3$ となるとき，登り坂に並ぶ人の定め方は何通りあるか。

(3)　並べ方は全体で何通りあるか。

ヒント　k 番目に 1 番身長の高い人を並べて，「登り坂」の $(k-1)$ 人の選び方を考える。

解 答　《selectⅢ 高１数学Ａ》

第1講座　集合の要素の個数，順列

【p.2】

1 (1) 33　(2) 21　(3) 7　(4) 47

2 $n(\overline{A})=$**35**

$n(\overline{A}\cap B)=n(B)-n(A\cap B)=20-5=$**15**

3 (1) 一方の目が１，他方の目が素数の場合だから，(大の目，小の目)の順に表すと，

(1，2)，(1，3)，(1，5)，(2，1)，(3，1)，(5，1)の**6通り**。

(2) $360=2^3\cdot3^2\cdot5$ より，

約数の個数は，$4\times3\times2=$**24**　約数の和は，

$(2^0+2^1+2^2+2^3)\times(3^0+3^1+3^2)\times(5^0+5^1)$

$=$**1170**

4 (1) ${}_9P_4=9\cdot8\cdot7\cdot6=$**3024**

(2) 千の位は１から９までの９通り，一，十，百の位は０を含めた残りの９個の数から３個選んで並べると考えて，$9\times{}_9P_3=$**4536**

(または，${}_{10}P_4-{}_9P_3$ と考える。)

(3) 隣り合う２人を１まとめにして考える。隣り合う２人の並び方を考えて，

${}_2P_2\times{}_5P_5=$**240(通り)**

(4) 両端の子音の並べ方が${}_3P_2$通り。残りの文字の並べ方が${}_3P_3$通り。

よって，${}_3P_2\times{}_3P_3=$**36(通り)**

5 (1) $(8-1)!=7!=$**5040(通り)**

(2) $\dfrac{(8-1)!}{2}=\dfrac{7!}{2}=$**2520(通り)**

6 (1) $5^4=$**625(通り)**

(2) $3\times4^3=$**192(通り)**

【p.3】

7 $n(A)=500$，$n(B)=333$，$n(C)=200$

(1) $A\cap C=\{10\cdot1,\ 10\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 10\cdot100\}$

ド・モルガンの法則より，$\overline{A}\cup\overline{C}=\overline{A\cap C}$

よって，$n(\overline{A}\cup\overline{C})=n(\overline{A\cap C})$

$=n(U)-n(A\cap C)$

$=1000-100=$**900**

(2) $B\cap C=\{15\cdot1,\ 15\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 15\cdot66\}$ より，

$n(B\cup C)=n(B)+n(C)-n(B\cap C)$

$=333+200-66=467$

$n(\overline{B}\cap\overline{C})=n(\overline{B\cup C})=n(U)-n(B\cup C)$

$=1000-467=$**533**

(3) $A\cap B\cap C=\{30\cdot1,\ 30\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 30\cdot33\}$

よって，$n(A\cap B\cap C)=$**33**

(4) $n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$

$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$n(A\cap B)=\{6\cdot1,\ 6\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 6\cdot166\}$ より，求める要素の個数は，

$500+333+200-166-66-100+33=$**734**

8 (1) $n(A\cap B)=13$　(2) $n(\overline{A})=134$

(3) $n(\overline{A}\cup\overline{B})=187$　(4) $n(\overline{B\cap C})=195$

(5) $n(A\cap B\cap C)=1$

(6) $n(A\cup B\cup C)=108$

9 (1) $6=2\cdot3$ より，２の倍数でも３の倍数でもない数の個数を求める。１から200までの整数のうち，２の倍数は100個，３の倍数は66個，６の倍数は33個あるから，

$200-100-66+33=$**67**

(2) $Z=\{6\cdot1,\ 6\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 6\cdot16\}$

$X\cap Y=\{20\cdot1,\ 20\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 20\cdot5\}$

$X\cap Y\cap Z=\{60\cdot1\}$ より，

$n((X\cap Y)\cup Z)=16+5-1=$**20**

10 全体をU，兄弟のいる人をA，姉妹のいる人をBとする。

(1) ひとりっ子の人数を x とすると，

$x=n(U)-n(A)-n(B)+n(A\cap B)$

$=n(A\cap B)-3$

ここで，$n(A\cap B)\leqq19$ であるから，

$x\leqq19-3=16$

よって，**16人以下**

(2) 兄弟だけいる人は $n(A)-n(A\cap B)$

また，$3\leqq n(A\cap B)\leqq n(B)$ より，

５人以上21人以下

11 (1) 5 g，10 g，20 g の分銅の個数を，それぞれ x，y，z とすれば，$5x+10y+20z=60$

$z=1$ のとき，

$(x,\ y)=(6,\ 1)$，$(4,\ 2)$，$(2,\ 3)$

$z=2$ のとき，$(x,\ y)=(2,\ 1)$

よって，組合せは，**４通り**。

(2) 最大公約数は $2^3\cdot3\cdot5$ であるから，

公約数の個数は，

$(3+1)(1+1)(1+1)=$**16(個)**

公約数の総和は，

$(1+2+2^2+2^3)(1+3)(1+5)=$**360**

12 (1) 一の位が０または５となるから，

０のとき…${}_5P_5=120$

５のとき…$4\times{}_4P_4=96$