

第3講座

空間ベクトル

基本の整理

〈2点間の距離〉 ▶ $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3)$ のとき, $AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

1 2点 $A(1, 4, -1), B(4, 7, -7)$ のとき, 線分 AB の長さを求めよ。

〈分点の公式〉 ▶ 線分 AB を $m:n$ に分ける点の座標は, $\left(\frac{na_1 + mb_1}{m+n}, \frac{na_2 + mb_2}{m+n}, \frac{na_3 + mb_3}{m+n}\right)$

2 2点 $A(-2, 1, 5), B(2, 5, -3)$ について, 線分 AB を $3:2$ の比に内分する点を P , $3:2$ の比に外分する点を Q とするとき, 点 P, Q の座標を求めよ。

〈空間の位置ベクトル〉 ▶ 空間内に1点 O を定めると, 点 A の位置ベクトルは, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$

3 四面体 $ABCD$ の辺 AB, CD, AD, BC, AC, BD の中点をそれぞれ M, N, P, Q, R, S とするとき, 次のことをベクトルを用いて証明せよ。

- (1) 4点 M, Q, N, P を頂点とする四角形は平行四辺形である。
- (2) MN, PQ, RS は1点で交わる。

〈空間ベクトルの成分〉 ▶ $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3)$ のとき, $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

4 $A(1, -1, 2), B(5, 1, -1)$ のとき, \overrightarrow{AB} を成分で表せ。

〈ベクトルの成分と大きさ〉 ▶ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ のとき, $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

5 $\vec{a} = (1, -3, 4), \vec{b} = (-1, 0, 3)$ について, 次の問いに答えよ。

- (1) $2\vec{a} - \vec{b}$ の成分と大きさを求めよ。
- (2) \vec{a} と同じ向きの単位ベクトルの成分を求めよ。

〈空間ベクトルの内積〉 ▶ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ のとき, $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

6 $\vec{a} = (1, 1, 2), \vec{b} = (1, -2, -1)$ のとき, 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

演習

例題 空間の座標

7 空間に3点 $A(1, 1, 4)$, $B(2, 2, 2)$, $C(3, 0, 3)$ がある。次の問いに答えよ。

- (1) 3点 A , B , C を頂点とする三角形 ABC はどんな三角形か。
- (2) xy 平面上にあって、3点から等距離にある点 P の座標を求めよ。

解法のポイント → (2) P は xy 平面上の点より、 $(x, y, 0)$ とおく。

8 類題 3点 $A(2, 1, -1)$, $B(1, 2, 5)$, $C(1, -2, 3)$ から等距離にあって、 yz 平面上にある点の座標を求めよ。

9 次の各点の座標を求めよ。

- (1) $A(-2, 1, 5)$ の原点に関する対称点 A_1 , zx 平面に関する対称点 A_2
- (2) 3点 $A(4, 5, 1)$, $B(-2, 4, 2)$, $C(4, 0, 3)$ を頂点とする三角形 ABC の重心 G
- (3) $A(2, 1, -4)$, $B(3, 3, 1)$ のとき、線分 AC を $1:3$ の比に内分する点が B となるような点 C
- (4) 3点 $A(2, 2, 1)$, $B(1, 3, -1)$, $C(1, 1, -1)$ から等距離にある点のうち、原点に最も近い点 P

10 空間における2点 $A(6, 6, 8)$, $B(5, 12, 16)$ に対し、 x 軸上に点 P をとり、線分の長さの和 $AP+PB$ が最小となるようにするとき、点 P の座標を求めよ。

11 正四面体の4つの頂点を $A(2, 2, 0)$, $B(2, 0, -2)$, $C(0, 2, -2)$, $D(x, y, z)$ とするとき、点 D の座標を求めよ。

12 4点 $A(1, 1, 2)$, $B(0, -4, 0)$, $C(-1, 1, -2)$, $D(2, 3, 5)$ がある。 AB , AC , AD を3辺にもつ平行六面体の他の頂点の座標を求めよ。

13 発展 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$ で決定される四面体の表面の4個の三角形 $\triangle OAB$, $\triangle OAC$, $\triangle OBC$, $\triangle ABC$ のうち面積が最大なもの面積を求めよ。

ヒント $\triangle OAB$, $\triangle OAC$, $\triangle OBC$ は直角三角形より、大小関係がすぐわかる。

例題 ベクトルの分解

14 $\vec{a}=(1, 1, 0)$, $\vec{b}=(1, 0, 1)$, $\vec{c}=(0, 1, 1)$ とするとき、ベクトル $\vec{x}=(2, 2, -2)$ を $l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$ の形に表せ。

解法のポイント $\vec{x}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$ として成分で表し、 l, m, n の連立方程式を解く。

15 類題 $\vec{a}=(1, 2, 3)$, $\vec{b}=(-2, 0, 1)$, $\vec{c}=(0, 1, 2)$ のとき、ベクトル $\vec{x}=(-3, 0, 2)$ を $l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$ の形に表せ。



16 平行六面体 OADB-CEFG において、 $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$, $\vec{OC}=\vec{c}$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) \vec{OF} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} で表せ。
- (2) 三角形 ABC の重心を M とするとき、 \vec{OM} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} で表せ。
- (3) 対角線 OF は三角形 ABC の重心 M を通ることを示せ。

17 四面体 OABC において、 $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$, $\vec{OC}=\vec{c}$ とし、辺 AB, 辺 BC を $m:n$ に内分する点をそれぞれ P, Q とする。このとき、ベクトル \vec{PQ} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} で表せ。

18 次の問いに答えよ。

- (1) $\vec{a}=(2, 2, 1)$, $\vec{b}=(2, -3, -4)$ の両方に垂直で大きさが 3 のベクトルを求めよ。
- (2) $\vec{a}=(1, 1, 1)$, $\vec{b}=(2, -1, 2)$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。

19 正四面体 ABCD の辺 AB, AC, AD, BC, CD, DB の中点を、それぞれ、M, P, Q, R, S, T とし、 $\vec{MP}=\vec{p}$, $\vec{MQ}=\vec{q}$, $\vec{MR}=\vec{r}$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) \vec{MS} を \vec{q} , \vec{r} で表せ。
- (2) \vec{PS} を \vec{p} , \vec{q} , \vec{r} で表せ。
- (3) 内積 $\vec{MP} \cdot \vec{PS}$ を計算して、 $\vec{MP} \perp \vec{PS}$ を示せ。

20 発展 1 辺の長さ 2 の正四面体 ABCD において、辺 AB, CD の中点をそれぞれ M, N とし、 $\triangle BCD$ の重心を G とするとき、内積 $\vec{AG} \cdot \vec{MN}$ を求めよ。

ヒント $\vec{AB}=\vec{b}$, $\vec{AC}=\vec{c}$, $\vec{AD}=\vec{d}$ において、 \vec{AG} , \vec{MN} を \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} で表す。

第7講座

いろいろな数列

基本の整理

〈自然数の平方の和〉 ▶ $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

1 次の和を求めよ。

(1) $1+2+3+\cdots+100$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+100^2$

〈分数で表された数列の和〉 ▶ $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ のように部分分数に変形できる。

2 $S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$ を求めよ。

〈和の記号 Σ 〉 ▶ a_k を数列の一般項とすると, $\sum_{k=1}^n a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

3 次の式を Σ を用いない式で表せ。

(1) $\sum_{k=1}^5 4k$

(2) $\sum_{k=1}^5 3^k$

〈 Σ の性質〉 ▶ $\sum_{k=1}^n (a_k+b_k)=\sum_{k=1}^n a_k+\sum_{k=1}^n b_k$, $\sum_{k=1}^n ca_k=c\sum_{k=1}^n a_k$ (c は定数)

4 次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^n (2k-7)$

(2) $\sum_{k=1}^n (3^k+2k)$

〈和の公式〉 ▶ $\sum_{k=1}^n k=\frac{1}{2}n(n+1)$, $\sum_{k=1}^n k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, $\sum_{k=1}^n k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

5 次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^n (k^2+2k+3)$

(2) $\sum_{k=1}^n k(k^2+1)$

〈階差数列と一般項〉 ▶ 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると, $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k$ ($n\geq 2$)

6 次の数列の一般項を求めよ。

$3, 4, 7, 12, 19, 28, 39, \cdots$

〈数列の和と一般項〉 ▶ $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ ($n\geq 2$) が成り立つ。

7 初項から第 n 項までの和 S_n が n^2+6n で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

演習

例題 部分分数の応用

8 次の和を求めよ。

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

解法のポイント $\rightarrow \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right\}$ と変形できる。

9 類題 次の和を求めよ。 $\frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{1}{6 \cdot 8 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+2)(2n+4)}$

10 次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^n (2k+1)$

(2) $\sum_{k=1}^n 2 \cdot 3^{k-1}$

(3) $\sum_{k=1}^n k(2k+3)$

(4) $\sum_{k=1}^n k^2(k-1)$

11 次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1) $1 \cdot 3, 3 \cdot 4, 5 \cdot 5, 7 \cdot 6, \cdots$

(2) $1 \cdot 2 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 5, 3 \cdot 4 \cdot 7, 4 \cdot 5 \cdot 9, \cdots$

(3) $1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, \cdots$

(4) $\frac{1}{1 \cdot 3}, \frac{1}{2 \cdot 4}, \frac{1}{3 \cdot 5}, \frac{1}{4 \cdot 6}, \cdots$

12 次の和を求めよ。

(1) $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \cdots + n(n+1)^2$

(2) $1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \cdots + (n-2) \cdot 3 + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1$

(3) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

13 発展 正の奇数を、次のように、第 n 群に n 個の奇数が含まれるように組み分ける。

(1), (3, 5), (7, 9, 11), (13, 15, 17, 19), (21, 23, \cdots), \cdots

次の問いに答えよ。

(1) 第 n 群の初項を求めよ。(2) 第 n 群に含まれる数の総和を求めよ。ヒント (1) 第 n 群の初項は、初項 1、公差 2 の等差数列の第 $\{1+2+\cdots+(n-1)+1\}$ 番目の項である。

例題 階差数列の利用

14 数列 $\{a_n\}: 1, 2, 6, 15, 31, 56, \dots$ について、次の問いに答えよ。

- (1) この数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の一般項を n の式で表せ。
- (2) この数列 $\{a_n\}$ の一般項を n の式で表せ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を n の式で表せ。

解法のポイント \rightarrow (2) 一般項 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ ($n \geq 2$) を利用する。 (3) $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ を計算する。

15 類題 数列 $\{a_n\}: 2, 2, 4, 8, 14, 22, \dots$ について、次の問いに答えよ。

- (1) この数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の一般項を n の式で表せ。
- (2) この数列 $\{a_n\}$ の一般項を n の式で表せ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を n の式で表せ。



16 次の数列の一般項を求めよ。

- (1) $1, 2, 5, 14, 41, \dots$
- (2) $1, 2, 4, 9, 19, 36, \dots$

17 次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

- (1) $1, 3x, 5x^2, 7x^3, \dots$
- (2) $2, 22, 222, 2222, \dots$
- (3) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}+2}, \frac{1}{2+\sqrt{5}}, \dots$

18 初項から第 n 項までの和 S_n が次の式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

- (1) $S_n = n^2 + 4n$
- (2) $S_n = 2^n + 3$

19 和 $S_n = 1 + 4x + 7x^2 + 10x^3 + \dots + (3n-2)x^{n-1}$ を求めよ。

20 発展 数列 $1, 2, 3, \dots, n$ について、次のものを求めよ。

- (1) 異なる 2 項の積の和
- (2) 互いに隣り合う 3 項の積の和

ヒント (1) 求める和を S とすると、 $(1+2+3+\dots+n)^2 = (1^2+2^2+3^2+\dots+n^2) + 2S$

解答

《selectⅢ 高2数学B》

第1講座 ベクトルと演算

[p.2]

1 $2\vec{x} + \vec{y} = \vec{a}$ ……① $\vec{x} - 3\vec{y} = \vec{b}$ ……②

①×3+② $7\vec{x} = 3\vec{a} + \vec{b}$

①-②×2 $7\vec{y} = \vec{a} - 2\vec{b}$

よって、 $\vec{x} = \frac{3}{7}\vec{a} + \frac{1}{7}\vec{b}$ 、 $\vec{y} = \frac{1}{7}\vec{a} - \frac{2}{7}\vec{b}$

2 $\overline{AB} + \overline{DC} - \overline{AC} - \overline{DB} = \overline{AB} + \overline{DC} + \overline{CA} + \overline{BD}$
 $= (\overline{AB} + \overline{BD}) + (\overline{DC} + \overline{CA}) = \overline{AD} + \overline{DA} = \overline{AA} = \vec{0}$

よって、 $\overline{AB} + \overline{DC} = \overline{AC} + \overline{DB}$

3 $\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$ とおくと

$(8, 1) = s(1, 2) + t(2, -1) = (s+2t, 2s-t)$

ゆえに、 $s+2t=8$ 、 $2s-t=1$ これを解いて、

$s=2$ 、 $t=3$ よって、 $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$

4 $\vec{a} - \vec{b} = (-4, 1)$ ……①

$3\vec{a} + 2\vec{b} = (3, 8)$ ……②

①×2+② $5\vec{a} = (-5, 10)$

①×3-② $-5\vec{b} = (-15, -5)$

ゆえに、 $\vec{a} = (-1, 2)$ 、 $\vec{b} = (3, 1)$

よって、 $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

5 (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 120^\circ$

$= 3 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -3$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$

6 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1 \cdot (-2) + (-3) \cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-3)^2} \sqrt{(-2)^2 + 1^2}}$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$ よって、 $\theta = 135^\circ$

7 求める単位ベクトルを $\vec{e} = (x, y)$ とする。

$\vec{a} \perp \vec{e}$ より、 $\vec{a} \cdot \vec{e} = 0$ また、 $|\vec{e}| = 1$ から

$-4x + 3y = 0$ ……① $x^2 + y^2 = 1$ ……②

①、②を解いて求めるベクトルは

$\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ 、 $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

8 $|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$

$= |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 41 + 4\vec{a} \cdot \vec{b}$

$4\vec{a} \cdot \vec{b} + 41 = 9$ より、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -8$

また、 $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$

$= 29 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 45$ よって、 $|\vec{a} - \vec{b}| = 3\sqrt{5}$

[p.3]

9 $\vec{p} = (-1, 3) + t(1, 2) = (-1+t, 3+2t)$

$|\vec{p}|^2 = (-1+t)^2 + (3+2t)^2 = 5(t+1)^2 + 5$

ゆえに、 $|\vec{p}|^2$ は $t = -1$ のとき最小値 5

よって、 $|\vec{p}|$ の最小値は $\sqrt{5}$ ($t = -1$ のとき)

10 (1) $\vec{p} = (-2+t, 1-t)$

$|\vec{p}|^2 = (-2+t)^2 + (1-t)^2 = 2\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$

ゆえに、 $|\vec{p}|$ は $t = \frac{3}{2}$ のとき最小となる。

よって、 $\vec{p}_0 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

(2) $\vec{p}_0 \cdot \vec{b} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1) = 0$

よって、 $\vec{p}_0 \perp \vec{b}$

11 (1) $\overline{OC} = -\vec{a}$

(2) $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB} = -\vec{a} - \vec{b}$

12 対角線の交点を O とすると、

$\overline{AO} = \overline{AB} + \overline{AF} = \vec{a} + \vec{b}$

(1) $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{AO}$

$= \vec{a} + (\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} + \vec{b}$

(2) $\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB} = 2\overline{AO} - \overline{AB}$

$= 2(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a} = \vec{a} + 2\vec{b}$

(3) $\overline{EC} = \overline{FB} = \overline{AB} - \overline{AF} = \vec{a} - \vec{b}$

13 (1) 3点 A, B, C が一直線上にあるから

$k\overline{AB} = \overline{AC}$ となる実数 k が存在する。

$\overline{AB} = (-3, 2-x)$ 、 $\overline{AC} = (x-4, 6-x)$

から、 $-3k = x-4$ 、 $k(2-x) = 6-x$

これを解いて、 $x = -2$ 、 5

(2) 四角形 ABCD が平行四辺形であるから

$AD \parallel BC$ かつ $AD = BC$ より、 $\overline{AD} = \overline{BC}$

$(1, 2) = (4-x, y-4)$

$4-x=1$ 、 $y-4=2$ から、 $x=3$ 、 $y=6$

(3) $(\vec{a} - \vec{b}) \parallel (2\vec{b} - \vec{a})$ のとき

$t(\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{b} - \vec{a}$ となる実数 t が存在するから、

$t(1-k, -2) = (2k-1, 6)$

$t(1-k) = 2k-1$ 、 $-2t = 6$ より

$t = -3$ よって、 $k = 2$

また、 $(3\vec{a} - \vec{b}) \perp (\vec{a} + \vec{b})$ のとき

$(3\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0$ より

$(3-k)(1+k) + 2 \cdot 6 = 0$ 、 $k^2 - 2k - 15 = 0$

これを解いて、 $k = -3$ 、 5

14 (1) $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16$

$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 4$

辺々引いて、 $4\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$ より、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$

(2) (1)の2式を辺々加えて、 $2(|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2) = 20$

$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = 10$ より

$|2\vec{a} - 3\vec{b}|^2 + |3\vec{a} - 2\vec{b}|^2$

$= 13(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) - 24\vec{a} \cdot \vec{b}$

$= 13 \cdot 10 - 24 \times 3 = 58$

[p.4]

15 (1) $\cos \theta = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| |\overline{AC}|} = \frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot 1}{\sqrt{3^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + 1^2}}$

$= \frac{8}{\sqrt{65}}$