第2講座 関　数

標準問題

1 **[2次関数のグラフ]** 2つの放物線 $C_1: y=x^2+4x+m$，$C_2: y=x^2+2mx-m^2-3$ がある。放物線 C_1 の頂点の y 座標は，C_2 の頂点の y 座標よりも大きいとする。次の問いに答えよ。ただし，m は定数とする。

(1) 放物線 C_2 の頂点の座標を m の式で表せ。

(2) m のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) 放物線 C_1 と C_2 の交点の x 座標は $-\dfrac{3}{4}$ である。m の値を求めよ。

2 **[2次関数の最大・最小①]** 関数 $y=(x^2-4x+3)^2-2x^2+8x+3+a$ について，次の問いに答えよ。ただし，$0 \leqq x \leqq 3$ とする。

(1) $t=x^2-4x+3$ とおくとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) y の最大値が6であるとき，a の値を求めよ。

3 **[2次関数の最大・最小②]** x，y が実数で，$x^2-2xy+2y^2=2$ であるとき

(1) x のとる値の範囲を求めよ。

(2) $-x^2-2x+1$ のとる値の範囲を求めよ。

(3) $x+2y$ のとる値の範囲を求めよ。

4 **[2次関数の最大・最小③]** 放物線 $y=x^2$ 上に2点 A$(-2,\ 4)$，B$(6,\ 36)$ がある。弧 AB 上の動点 P に対し，△ABP の面積を S とおく。

(1) S を，P の x 座標 x を用いて表せ。

(2) S を最大にする x の値と，S の最大値を求めよ。

5 **［２次不等式］** 次の問いに答えよ。

(1)　$x^2-3|x-1|-13<0$，$x^2-x-6>0$ を同時に満たす x の値の範囲を求めよ。

(2)　不等式 $x^2-(a+2)x+2a<0$ を満たす x の整数値がただ１つ存在するような整数 a の値を求めよ。

(3)　不等式 $x^2-2x \geqq kx-4$ の解がすべての実数であるような定数 k の値の範囲を求めよ。

6 **［２次関数と２次不等式］** $k \geqq 0$ とする。関数 $f(x)=x^2-2kx+\frac{1}{2}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　定義域が $0 \leqq x \leqq 1$ である２次関数 $y=f(x)$ の最小値を m とするとき，m を k を用いて表せ。

(2)　$0 \leqq x \leqq 1$ であるすべての x について $0 \leqq f(x) \leqq 1$ が成り立つような k の値の範囲を求めよ。

7 **［解の配置］** 次の問いに答えよ。

(1)　２次方程式 $x^2-x+p=0$ が，絶対値が１より小さい異なる２つの実数解をもつとき，定数 p の値の範囲を定めよ。

(2)　２次方程式 $3x^2-2(a-1)x+3(a-2)=0$ は相異なる２つの解 α，β をもつ。そのとき，α，β が $0<\alpha<1$，$0<\beta<1$ となるように定数 a の値の範囲を定めよ。

発展問題

8 連立方程式 $x+y+z=3$……①，$x^2+y^2+z^2=27$……②を満たす x，y，z を考える。

(1)　連立方程式①，②から，$xy+yz+zx$ の値を求めよ。

(2)　(1)の結果を利用して，連立方程式①，②において，x，y が実数となる実数 z の値の範囲を求めよ。

ヒント (2)　$x+y$，xy をそれぞれ z の式で表し，実数解をもつ条件を考える。

9 次の２条件(イ)，(ロ)を同時に満たす整数 a，b の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

(イ)　２次方程式 $X^2+aX+b=0$ の２つの解が共に２以上の整数である。

(ロ)　不等式 $3a+2b \leqq 0$ が成り立つ。

ヒント 解と係数の関係から，２つの解 α，β についての条件を考える。

第5講座　数　　列

標準問題

1　**［等差数列］**　次の問いに答えよ。

(1)　第５項が５，第10項が20であるような等差数列の初項と公差を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ について，第 n 項までの和 S_n が $S_n=2n^2-25n\ (n\geqq 1)$ で表されるとき，一般項 a_n を求めよ。また，数列 $\{a_n\}$ のすべての負の項の和を求めよ。

2　**［等比数列］**　等比数列 $\{a_n\}$ が，$a_1+a_2=\dfrac{3}{2}$，$a_4+a_5=12$ を満たしているとする。次の問いに答えよ。

(1)　初項 a と公比 r を求めよ。

(2)　初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(3)　$S_{100}-S_{50}$ は何桁の数か。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

3　**［等差数列と等比数列］**　３つの実数 a，b，c が a，b，c の順序で等差数列になっていて，b，c，a の順序で等比数列になっているとする。

(1)　a，b，c の和が18であるとき，a，b，c の値を求めよ。

(2)　a，b，c の積が125であるとき，a，b，c の値を求めよ。

4　**［いろいろな数列］**　自然数 n が n 個連続してあらわれる数列

$$1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ \cdots\cdots$$

について，次の問いに答えよ。

(1)　この数列の第100項目を求めよ。

(2)　この数列の第100項までの和を求めよ。

5　**［漸化式①］**　$a_1=1$, $a_2=2$, $3a_{n+2}-4a_{n+1}+a_n=0$　($n=1, 2, 3, \cdots\cdots$) で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくとき，b_{n+1} と b_n の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2)　a_n を n を用いて表せ。

6　**［漸化式②］**　各項が正の数である数列 $\{a_n\}$ が $a_1=2$ と関係式

$$a_{n+1}{}^2 \cdot a_n=a_{n+1}+\frac{2(n+2)}{n(n+1)}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1)　a_2, a_3 を求めよ。

(2)　a_n を n の式で表せ。

7　**［数学的帰納法］**　n が4以上の自然数であるとき，不等式 $3^n>n^3$ が成り立つことを証明せよ。

発展問題

8　(1)　数列 1, 2, 3, ……, n において，隣接する2数の積の総和を求めよ。

(2)　数列 1, 2, 3, ……, n において，互いに相異なり，かつ隣接しない2数の積の総和を求めよ。

ヒント (2)　$(1+2+\cdots\cdots+n)(1+2+\cdots\cdots+n)$ の展開式と(1)を利用する。

9　3×3 のます目とは図1のようなものをいう。

81×81 のます目に数字を書き入れる。中央のます目に1を入れ，2, 3, 4, ……, 6561 ($=81\times81$) を図2のような順序で書き入れていき，すべてのます目を埋めたものとする。

このとき，右上の角と左下の角を結ぶ対角線にならぶ数字の和を求めよ。

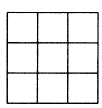

図 1

·	·	·	·	·	·	·
·	17	16	15	14	13	·
·	18	5	4	3	12	·
·	19	6	1	2	11	·
·	20	7	8	9	10	·
·	21	22	23	24	25	·
·	·	·	·	·	·	·

図 2

ヒント 中央のます目から右下の角まで，順に 1^2, 3^2, ……, 81^2 が並んでいる。

解　答　《selectⅢ 高３数学総合》

第1講座　数と式

【p.2】

1 (1)　与式$=(t^2-t)^2-32(t^2-t)+60$
$=(t^2-t-2)(t^2-t-30)$
$=\boldsymbol{(t+1)(t-2)(t+5)(t-6)}$

(2)　与式$=2x^2+(3y+7)x-(2y+3)(y-1)$
$=\boldsymbol{(x+2y+3)(2x-y+1)}$

(3)　与式$=(x^2+3x)^2+7(x^2+3x)+12$
$=\boldsymbol{(x^2+3x+3)(x^2+3x+4)}$

(4)　与式$=x^3+y^3+1^3-3\cdot x\cdot y\cdot 1$
$=\boldsymbol{(x+y+1)(x^2-xy+y^2-x-y+1)}$

2 (1)　$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{10})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{10})^2}{(\sqrt{2}+\sqrt{10})(\sqrt{2}-\sqrt{10})}=\boldsymbol{-3}$

(2)　$x+\dfrac{1}{x}=t$ とおくと，$t^3-3t-18=0$
$(t-3)(t^2+3t+6)=0$　t は実数だから，$t=3$
よって，$x+\dfrac{1}{x}=\boldsymbol{3}$
また，$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=\boldsymbol{7}$

3 (1)　$\dfrac{y+z}{1}=\dfrac{z+x}{2}=\dfrac{x+y}{3}=k\,(\neq 0)$ とおく。
$y+z=k$，$z+x=2k$，$x+y=3k$
これを解いて，$x=2k$，$y=k$，$z=0$
よって，$\dfrac{x^2+y^2}{y^2+z^2}=\dfrac{4k^2+k^2}{k^2}=\boldsymbol{5}$

(2)　条件式$=k$ とおく。
$-a+b+c=ka$，$a-b+c=kb$，$a+b-c=kc$
辺々加えて，$a+b+c=k(a+b+c)$
(i) $a+b+c\neq 0$ のとき，$k=1$
与式$=\dfrac{2c\cdot 2b}{bc}+\dfrac{2a\cdot 2c}{ac}+\dfrac{2b\cdot 2a}{ab}=12$
(ii) $a+b+c=0$ のとき，$k=-2$
与式$=\dfrac{(-c)\cdot(-b)}{bc}+\dfrac{(-a)\cdot(-c)}{ac}+\dfrac{(-b)\cdot(-a)}{ab}=3$
(i)，(ii)より，**$\boldsymbol{a+b+c\neq 0}$ のとき 12**
$\boldsymbol{a+b+c=0}$ のとき 3

4 (1)　与式より，
$\{p^2q-4(p^2+q)+16\}+\sqrt{10}(p^2+q-8)=0$
よって，$p^2q-4(p^2+q)+16=0$，$p^2+q-8=0$
これを解いて，$(p,\ q)=(\pm 2,\ 4)$
$p>0$，$q>0$ だから，$\boldsymbol{p=2}$，$\boldsymbol{q=4}$

(2)　$\alpha=\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{4})^2}=2+\sqrt{3}$
$\alpha=2+\sqrt{3}$ より，$\alpha-2=\sqrt{3}$
両辺を2乗して整理すると，$\alpha^2-4\alpha+1=0$
よって，与式$=(\alpha^2-4\alpha+1)(\alpha^3+\alpha)-2=-2$

【p.3】

5 (1)　$|x|^2-4|x|+3=0$ より，$|x|=1,\ 3$
よって，$\boldsymbol{x=\pm 1,\ \pm 3}$

(2)　異なる2つの解を α，β とすると，
$\dfrac{D}{4}=(a+1)^2-(a+7)>0$
$\alpha+\beta=-2(a+1)>0$，$\alpha\beta=a+7>0$
これを解いて，$\boldsymbol{-7<a<-3}$

(3)　共通解を α とすると，
$\alpha^2+\alpha+a=0$ ……①　$\alpha^2-\alpha+a+4=0$ ……②
①−②から，$\alpha=2$　　∴　$a=-6$
よって，**$\boldsymbol{a=-6}$ のとき共通解 2**

6 (1)　$\alpha^2-\alpha+1=0$ より，
$\alpha^3+1=(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0$
∴　$\alpha^3=-1$　　同様に，$\beta^3=-1$
よって，$\alpha^3+\beta^3=-1-1=-2$
$\alpha^{10}+\beta^{10}=(\alpha^3)^3\alpha+(\beta^3)^3\beta=(-1)^3\alpha+(-1)^3\beta$
$=-(\alpha+\beta)$
$\alpha+\beta=1$ より，$\boldsymbol{\alpha^{10}+\beta^{10}=-1}$

(2)　$\alpha+\beta=-5$，$\alpha\beta=3$ より，
$(\alpha^2+4\alpha+\beta)+(\beta^2+4\beta+\alpha)$
$=(\alpha^2+\beta^2)+5(\alpha+\beta)$
$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+5(\alpha+\beta)$
$=(-5)^2-2\cdot 3+5\cdot(-5)=-6$……①
また，$\alpha^2+5\alpha+3=0$，$\beta^2+5\beta+3=0$ より，
$\alpha^2+4\alpha=-\alpha-3$，$\beta^2+4\beta=-\beta-3$ だから，
$(\alpha^2+4\alpha+\beta)(\beta^2+4\beta+\alpha)$
$=(-\alpha-3+\beta)(-\beta-3+\alpha)=-(\alpha-\beta)^2+9$
$=-\{(\alpha-\beta)^2-4\alpha\beta\}+9$
$=-\{(-5)^2-4\cdot 3\}+9=-4$……②
①，②より，求める2次方程式は，
$\boldsymbol{x^2+6x-4=0}$

7 (1)　$4x^2+10x-y^2-y+6$
$=4x^2+10x-(y-2)(y+3)$
$=\boldsymbol{(2x-y+2)(2x+y+3)}$

(2)　$4x^2+10x-y^2-y=0$ より，
$4x^2+10x-y^2-y+6=6$
(1)より，$(2x-y+2)(2x+y+3)=6$
$(2x-y+2,\ 2x+y+3)$
$=(\pm 1,\ \pm 6)$，$(\pm 2,\ \pm 3)$，
$(\pm 3,\ \pm 2)$，$(\pm 6,\ \pm 1)$（複号同順）
このうち，x，y が整数となる組は，
$\boldsymbol{(x,\ y)=(0,\ -1),\ (0,\ 0),}$
$\boldsymbol{(-3,\ 2),\ (-3,\ -3)}$