第3講座　1次不等式，2次方等式

パターンの修得

例題 1　不等式の解法

1　次の1次不等式，連立不等式を解け。

(1)　$4(2x+3)<-2$　　(2)　$2(x-1)\geqq 5(2+x)-3$

(3)　$\begin{cases} 3(4x+11)>8x+13 \\ -7(8-3x)<18x-29 \end{cases}$　　(4)　$\begin{cases} 3(x-2)\geqq 4(x-1)-5 \\ 2(x-3)<3(5x-3) \end{cases}$

解法のポイント　不等式は，両辺に負の数をかけたり，負の数で割ると不等号の向きが変わる。

2　類題　次の1次不等式，連立不等式を解け。

(1)　$-(2x+3)\leqq 6(x-2)$　　(2)　$\dfrac{x-2}{3}>\dfrac{4x+1}{2}-\dfrac{8}{9}$

(3)　$\begin{cases} 0.7x+2\geqq 0.2x+1 \\ 23x-14\leqq 7(2x+7) \end{cases}$　　(4)　$\begin{cases} 3(2x-1)+5<2(4+x) \\ 9-(5x-1)\leqq 3(2x+1) \end{cases}$

例題 2　絶対値を含む不等式

3　次の不等式を満たす x の値の範囲を求めよ。

(1)　$|x-2|\leqq 4$　　(2)　$1<|x+1|<3$

解法のポイント　$c>0$ のとき，$|x|<c$ ならば $-c<x<c$，$|x|>c$ ならば $x<-c$，$c<x$

4　類題　次の不等式を満たす x の値の範囲を求めよ。

(1)　$2|3x-2|-1>5$　　(2)　$3\leqq|2x-1|\leqq 5$

例題 3　絶対値を含む方程式

5　次の方程式を満たす x の値を求めよ。

(1)　$x+|2x-1|=2$　　(2)　$|3-x|=-2x$

解法のポイント　絶対値の中の符号により場合分け。得られた解の適，不適を調べる。

6　類題　次の方程式を満たす x の値を求めよ。

(1)　$|x+5|=2x$　　(2)　$|3x-4|=x+2$

例題 4　2 次方程式の解

7 次の 2 次方程式を解け。

(1)　$6x^2-x-2=0$　　(2)　$x^2+5x+3=0$

(3)　$7x^2-4x-4=0$　　(4)　$2x^2+\sqrt{3}x-1=0$

解法のポイント　(1)　たすきがけにより因数分解する。
(2)〜(4)　2 次方程式の解の公式にあてはめる。

8 類題　次の 2 次方程式を解け。

(1)　$8x^2-10x-7=0$　　(2)　$-x^2+7x-7=0$

(3)　$0.2x^2+x+0.3=0$　　(4)　$\sqrt{2}x^2-2x-\sqrt{2}=0$

例題 5　2 次方程式の係数決定

9 2 次方程式 $x^2+3x-k-8=0$ の解の 1 つが $x=k$ であるとき，定数 k の値と他の解を求めよ。

解法のポイント　$x=k$ を 2 次方程式に代入し，k の 2 次方程式を解く。

10 類題　次の問いに答えよ。

(1)　2 次方程式 $x^2+4x-2k-3=0$ の解の 1 つが $x=k$ であるとき，定数 k の値と他の解を求めよ。

(2)　2 つの 2 次方程式 $ax^2+bx-2=0$，$2bx^2+x+a=0$ が，ともに $x=-1$ を解にもつように，定数 a，b の値を求めよ。

例題 6　2 次方程式の実数解の個数

11 2 次方程式 $x^2-x+2k-1=0$ の実数解の個数を調べよ。ただし，k は定数とする。

解法のポイント　$ax^2+bx+c=0$ で $D=b^2-4ac$ とする。$D>0$ のとき 2 個，$D=0$ のとき 1 個，$D<0$ のとき 0 個である。

12 類題　次の 2 次方程式の実数解の個数を求めよ。

(1)　$9x^2-24x+16=0$　　(2)　$2x^2-5x+3=0$　　(3)　$-x^2+x-1=0$

13 類題　次の 2 次方程式の実数解の個数を調べよ。

(1)　$(k+2)x^2+x-1=0$　　(2)　$2x^2+12x-k+9=0$

演習

14 次の 1 次不等式を解け。

(1) $\dfrac{7(x+3)}{12}-\dfrac{3}{2}\leqq\dfrac{5(2x-1)}{6}$　　(2) $0.6(2x-1)+0.3>2.2x-0.1$

15 次の 2 次方程式を解け。

(1) $(x+1)^2=4x+9$　　(2) $x^2-0.1x-0.1=0$

(3) $(\sqrt{2}+1)x^2+x=2+\sqrt{2}$　　(4) $x^2+3x-\sqrt{2}=0$

16 連立不等式 $\begin{cases} 4+3x>6x-2 \\ 5x+2>4x-a \end{cases}$ を満たす整数 x が $x=1$ だけのとき，a の値の範囲を求めよ。

17 次の方程式，不等式を解け。

(1) $x^2-7=|x-5|$　　(2) $|3x-2|\leqq x+1$

18 次の問いに答えよ。

(1) 2 次方程式 $x^2+2mx+m+12=0$ が重解をもつように定数 m の値を定めよ。また，そのときの重解を求めよ。

(2) 2 つの 2 次方程式 $ax^2-2x+5=0$，$2x^2+x-a=0$ が共に実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

19 周囲の長さが44 m の長方形がある。この長方形の縦の長さを 2 m，横の長さを 4 m それぞれ短くしたところ，その面積はもとの面積の半分になった。このとき，もとの長方形の面積を求めよ。

20 発展 2 次方程式 $x^2-ax+b=0$ は $x=-1$ を解にもち，2 次方程式 $x^2+ax+3b=0$ と 1 つの解を共有している。このとき，定数 a，b の値を求めよ。

ヒント $x=-1$ を共有する場合と，他の解($x=\alpha$ とおく)を共有する場合を考える。

第4講座　2次関数(1)

パターンの修得

例題1　関数のグラフ

1 次の関数のグラフをかけ。また，その最大値，最小値を求めよ。

$y=|x-1|\quad(0\leqq x\leqq 4)$

解法のポイント　$x-1\geqq 0$ のとき $|x-1|=x-1$，$x-1<0$ のとき $|x-1|=-(x-1)$

2 類題　次の関数のグラフをかけ。また，その最大値，最小値を求めよ。

(1)　$y=|x-2|\quad(-1\leqq x\leqq 3)$

(2)　$y=-|x+2|\quad(-3\leqq x\leqq 1)$

例題2　2次関数のグラフ

3 次の 2 次関数のグラフの頂点の座標と軸を求め，そのグラフをかけ。

(1)　$y=(x-2)^2$　　(2)　$y=-x^2+2x+1$

解法のポイント　$y=a(x-p)^2+q$ の頂点の座標は$(p,\ q)$，軸は $x=p$ である。

4 類題　次の 2 次関数のグラフをかけ。

(1)　$y=(x+1)^2-1$　　(2)　$y=x^2-2x+3$

(3)　$y=-x^2+4x-2$　　(4)　$y=2x^2-6x+3$

5 次の問いに答えよ。

(1)　放物線 $y=2x^2$ を，x 軸方向に 3，y 軸方向に 1 だけ平行移動した放物線の方程式を求めよ。また，このグラフをかけ。

(2)　放物線 $y=-x^2+6x-7$ は，放物線 $y=-x^2-2x+3$ をどのように平行移動したものか。

例題 3　2次関数の決定

6 次の条件を満たす2次関数を求めよ。

(1)　グラフの頂点の座標が(2, 3)で，点(1, 1)を通る。

(2)　グラフが3点(1, 0), (2, 6), (−1, −6)を通る。

解法のポイント　(1)　$y=a(x-2)^2+3$ と表せる。　(2)　$y=ax^2+bx+c$ とおいて，通る点の座標の値を代入する。

7 類題　次の条件を満たす2次関数を求めよ。

(1)　グラフが2点(4, 1), (2, 1)を通り，x軸に接する。

(2)　グラフがx軸と2点(1, 0), (4, 0)で交わり，y軸と点(0, −4)で交わる。

(3)　x^2の係数が1で，グラフが点(2, 3)を通り，頂点が直線$y=x+1$上にある。

例題 4　2次関数の最大・最小①

8 次の2次関数の最大値，最小値と，そのときのxの値を求めよ。

(1)　$y=2x^2+5x-3$　　(2)　$y=-x^2-2x+1$　$(-2 \leqq x \leqq 3)$

解法のポイント　$y=a(x-p)^2+q$ の形に変形。
(1)　最小値が存在する。　(2)　最大値，最小値とも存在する。

9 類題　次の2次関数の最大値，最小値と，そのときのxの値を求めよ。

(1)　$y=-5x^2+10x$　　(2)　$y=-2x^2+8x-5$　$(0 \leqq x \leqq 4)$

例題 5　2次関数の最大・最小②

10 次の問いに答えよ。

(1)　$x+y=4$ のとき，x^2+y^2 の最小値と，そのときのx，yの値を求めよ。

(2)　2次関数$y=-x^2-2ax+5$ が $x=3$ で最大になるとき，その最大値を求めよ。

解法のポイント　(1)　yを消去し，xの2次関数にする。
(2)　$y=-(x+a)^2+a^2+5$ と変形される。

11 類題　次の問いに答えよ。

(1)　$x^2+y^2=1$ のとき，$4x+y^2$ の最大値，最小値と，そのときのx，yの値を求めよ。

(2)　2次関数$y=x^2+px+p+1$ の最小値mをpの式で表せ。また，mの最大値を求め，そのときのpの値を求めよ。

演習

12 次の問いに答えよ。

(1) 放物線 $y=2x^2$ を x 軸方向に 3，y 軸方向に -5 だけ平行移動したグラフの式を求めよ。

(2) 2 次関数 $y=x^2+ax+b$ のグラフの頂点の座標が $(2,\ 1)$ のとき，a，b の値を求めよ。

13 グラフが次の条件を満たす 2 次関数を求めよ。

(1) 軸が $x=-3$ で，2 点 $(1,\ -15)$，$(-2,\ 0)$ を通る。

(2) 2 点 $(1,\ 1)$，$(4,\ 4)$ を通り，頂点の y 座標が 0 である。

14 次の問いに答えよ。

(1) 2 次関数 $y=x^2+2ax+b$ が $x=1$ で最小値 4 をとるとき，定数 a，b の値を求めよ。

(2) 放物線 $y=x^2-2ax+b$ が点 $(1,\ 1)$ を通り，その頂点が直線 $y=x-2$ 上にあるとき，定数 a，b の値を求めよ。

(3) 放物線 $y=ax^2+bx+c$ が 3 点 $(2,\ 0)$，$(-2,\ -4)$，$(1,\ -4)$ を通るとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

15 $a>0$ のとき，2 次関数 $y=x^2-2ax-1$ の $0 \leqq x \leqq 2$ における最大値，最小値を求めよ。

16 x，y が $x^2+4y^2=1$ を満たすとき，$x+5y^2$ の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの x，y の値を求めよ。

17 直角をはさむ 2 辺の長さの和が16である直角三角形の面積の最大値と，そのときの 3 辺の長さを求めよ。

18 **発展** $f(x)$ は 2 次関数であって，2 つの条件，$f(x+1)-f(x)=2x$，$f(0)=1$ を満たす。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) $-1 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最大値および最小値を求めよ。

ヒント (1) $f(x)=ax^2+bx+c$ とおき，条件式 $f(x+1)-f(x)=2x$ の両辺の係数を比較する。

解　答　《select Ⅰ　数学Ⅰのまとめ》

第1講座　数と式

【p.2】

1 (1) $3x^2+6y^2$　(2) $-5x^2+5xy-13y^2$
(3) $x^2+14xy-4y^2$

2 (1) $-x^2+5y^2$　(2) $6x^2-3xy$

3 (1) x^3+x^2-8x+4
(2) $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$
(3) $(x^2-y^2)^2=\boldsymbol{x^4-2x^2y^2+y^4}$
(4) $a^2-2ab+b^2+7a-7b+10$

4 (1) $8x^3+1$　(2) $2x^3+6xy^2$
(3) $a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$
(4) x^4-1　(5) $x^2-2y^2+z^2-xy-yz+2zx$
(6) $\{(x+4)(x-3)\}\{(x+2)(x-1)\}$
$=\boldsymbol{x^4+2x^3-13x^2-14x+24}$

5 (1) $(a-1)(b+1)$　(2) $(x-4y)(3x+5y)$
(3) $(1-2x)(1+2x+4x^2)$
(4) $(x^2+1)(x-3)(x+3)$

6 (1) $(a-b)(3p+q)(3p-q)$
(2) $(4a+9b)(a-3b)$
(3) $(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)$
(4) $(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$
(5) $(x-2y+z)(x-2y-z)$
(6) $(x^2+x-3)(x^2-x-3)$

【p.3】

7 (1) 与式$=-a-(a+2)=\boldsymbol{-2a-2}$
(2) 与式$=-a+(a+2)=\boldsymbol{2}$
(3) 与式$=a+(a+2)=\boldsymbol{2a+2}$

8 $\boldsymbol{x<-1}$ **のとき** $P=-(x+1)-\{-(x-3)\}=\boldsymbol{-4}$
$\boldsymbol{-1\leqq x<3}$ **のとき** $P=x+1-\{-(x-3)\}=\boldsymbol{2x-2}$
$\boldsymbol{x\geqq 3}$ **のとき** $P=x+1-(x-3)=\boldsymbol{4}$

9 (1) $x+y=2\sqrt{3}$，$xy=1$ を利用して，
与式$=(x+y)^2+xy=(2\sqrt{3})^2+1=\boldsymbol{13}$
(2) 与式$=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=(2\sqrt{3})^3-3\cdot1\cdot2\sqrt{3}=\boldsymbol{18\sqrt{3}}$

10 (1) $x+y=3$，$xy=1$ を利用して，
与式$=3^3-3\cdot1\cdot3=\boldsymbol{18}$
(2) 与式$=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$
$=(3^2-2\cdot1)^2-2\cdot1^2=\boldsymbol{47}$

11 $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=\dfrac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\sqrt{5}+2$
$2<\sqrt{5}<3$ より，$a=4$
よって，$b=\sqrt{5}+2-a=\sqrt{5}-2$
ゆえに，$ab+b^2=b(a+b)$
$=(\sqrt{5}-2)(4+\sqrt{5}-2)$
$=(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)=\boldsymbol{1}$

12 $\dfrac{6}{3-\sqrt{3}}=\dfrac{6(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}=3+\sqrt{3}$
$1<\sqrt{3}<2$ より，整数部分は 4
よって，$b=3+\sqrt{3}-4=\sqrt{3}-1$
ゆえに，

$$b^2+\frac{2}{b^2}=(\sqrt{3}-1)^2+\frac{2}{(\sqrt{3}-1)^2}$$
$$=(4-2\sqrt{3})+\frac{2}{4-2\sqrt{3}}$$
$$=(4-2\sqrt{3})+\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$
$$=4-2\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=\boldsymbol{6-\sqrt{3}}$$

13 (1) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$　(2) $2-\sqrt{3}$
(3) $\sqrt{8+\sqrt{15}}=\sqrt{\dfrac{16+2\sqrt{15}}{2}}=\dfrac{1+\sqrt{15}}{\sqrt{2}}$
$=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{30}}{2}}$

14 (1) $\sqrt{7}+\sqrt{2}$　(2) $2\sqrt{3}-1$
(3) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$　(4) $\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

【p.4】

15 (1) $-72a^9b^4c^{14}$　(2) $a^4+a^2b^2+b^4$
(3) $4bc-4ad$
(4) $\{(x+1)(x^2-x+1)\}\{(x-1)(x^2+x+1)\}$
$=\boldsymbol{x^6-1}$
(5) $-\{x+(y+z)\}\{x-(y+z)\}$
$\times\{x-(y-z)\}\{x+(y-z)\}$
$=\boldsymbol{-x^4-y^4-z^4+2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2}$

16 (1) $2xy(4x^2-9)=\boldsymbol{2xy(2x+3)(2x-3)}$
(2) $5^3-(3x)^3=\boldsymbol{(5-3x)(25+15x+9x^2)}$
(3) $x^2+xy-z(x+y)=\boldsymbol{(x+y)(x-z)}$
(4) $-(b-c)a^2+(b^2-c^2)a-bc(b-c)$
$=\boldsymbol{(b-c)(c-a)(a-b)}$
(5) $3x^2+7x(y-2)+2y^2-3y-5$
$=\boldsymbol{(3x+y+1)(x+2y-5)}$
(6) $(x+4)(x-3)\times(x+2)(x-1)+24$
$=(x^2+x)^2-14(x^2+x)+48$
$=\boldsymbol{(x-2)(x+3)(x^2+x-8)}$
(7) $(b+c)a^2+\{(b+c)^2+bc\}a+bc(b+c)$
$=\boldsymbol{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$
(8) $(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$
$=(a+b+c)^3-3c(a+b)(a+b+c)$