第2講座　組 合 せ

基本の整理

〈組合せ〉 ▶異なる n 個のものから r 個取り出して1組とした組合せの総数は ${}_nC_r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

1 男子6人，女子4人の中から4人を選ぶとき，次のような選び方は何通りあるか。

(1) 全体から4人を選ぶ　　(2) 男子から2人，女子から2人を選ぶ

〈順列と組合せ〉 ▶組合せで選んでから，順列で並べる。

2 次の問いに答えよ。

(1) 男子4人，女子6人から男子2人，女子3人を選んで1列に並べる並べ方は何通りあるか。

(2) 1から9までの整数から，異なる3数を選び，3桁の整数をつくる。3数の和が奇数になるような3桁の整数は何個あるか。

〈同じものを含む順列〉 ▶ p 個，q 個，r 個，……が同じものである順列の総数は $\dfrac{n!}{p!q!r!\cdots\cdots}$

3 SUCCESSの7文字を並べるとき，次のような並べ方は何通りあるか。

(1) 7文字の並べ方の総数　　(2) U，Eが隣り合わない

(3) UがEより左側にある

〈組合せと図形〉 ▶平行四辺形…縦2本，横2本の平行線で1つ決まる。

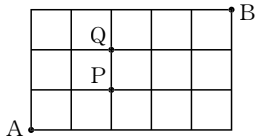
4 等間隔に引いた5本の平行線と，それに垂直に交わる等間隔の5本の平行線がある。これらの平行線によってできる長方形(正方形を含む)は何個あるか。また，正方形は何個あるか。

〈最短距離〉 ▶↑と→の順列で考える。各区間で，↑と→の数を数えて同じものを含む順列を利用。

5 右の図で，次の場合，最短距離で行く道順は何通りあるか。

(1) AからPを通ってBへ行く

(2) AからQを通らないでBへ行く



〈重複組合せ〉 ▶異なる n 個のものから重複を許して r 個取る組合せの総数は ${}_{n+r-1}C_r$

6 次の問いに答えよ。

(1) 4個の文字a，b，c，dから重複を許して7個取り出す方法は何通りあるか。ただし，1つも取り出さない文字があってもよいとする。

(2) 候補者3名に対し，25名が1人1票の無記名投票を行う。票の分かれ方は何通りあるか。

演　習

例題 **組分け**

7 12人の生徒を次のように分ける方法は何通りあるか。

(1) 5人，4人，3人の3つの組に分ける。

(2) 4人ずつ3組に分ける。

(3) 6人，3人，3人の3つの組に分ける。

(4) 3人ずつA，B，C，Dの4組に分ける。

解法のポイント　同じ数に分けるときに注意が必要である。

8 類題 7人の生徒を次のように分ける方法は何通りあるか。

(1) 3人，2人，2人の3つの組に分ける。

(2) A，B，Cの部屋に4人，2人，1人に分ける。

9 男子10人，女子5人の中から合計3人の代表を選ぶ方法は何通りあるか。また，代表3人のうちに女子が少なくとも1人含まれるような選び方は何通りあるか。

10 赤玉4個，青玉3個，白玉2個がある。次のような場合の並べ方は何通りあるか。

(1) 9個全部を1列に並べる。

(2) 8個を取り出して1列に並べる。

11 白い碁石7個と黒い碁石3個を1列に並べるとき，黒い碁石が隣り合わないような並べ方は何通りあるか。

12 1，2，3，4，5，6の数字のうち，2種類の数字を用いて表される3桁の数字はいくつあるか。

13 ▶発展◀ 1つのさいころを4回振るとき，ちょうど2種類の目が出る場合は何通りあるか。また，4つの同じ大きさのさいころを同時に振るとき，ちょうど2種類の目が出る場合は何通りあるか。

ヒント 1回目から4回目までの中で，2種類の目のどちらが出てもよい。(重複順列の考え方)

例題 **重複組合せ**

14 7個の同じ品物をA，B，Cの3人に分ける方法について，次の問いに答えよ。

(1) 品物を1個ももらえない人がいてもよいとすると，分け方は何通りあるか。

(2) A，B，Cがいずれも，少なくとも1個の品物をもらう分け方は何通りあるか。

解法のポイント (1) A，B，Cの3個から重複を許して7個取る重複組合せ。 ○｜○○○○｜○○（A　B　C）
→7個の○と2本の仕切り｜の並びかえで考えることができる。

15 類題 次の問いに答えよ。

(1) 8個の同じ球をA，B，C，Dの4つの箱に分けて入れる方法は何通りあるか。ただし，球を1個も入れない箱があってもよいとする。

(2) $x+y+z=9$ を満たす次のような整数の組(x, y, z)は何組あるか。

① 負でない整数の組　　② 正の整数の組

16 excellentの9文字を並べるとき，次のような並べ方は何通りあるか。

(1) c，n，tがこの順序で並ぶ　　(2) eはすべてlより左側にある

(3) eとlはすべて奇数番目に並ぶ

17 1つの正六角形の辺と対角線は合計 (1) 本ある。これらの線分全体から異なる2本の線分を選ぶ組合せは (2) 通りである。これらのうち，

選んだ2本の線分が平行である場合は (3) 通りである。

選んだ2本の線分が頂点以外の点で交わる場合は (4) 通りである。

18 赤球5個，白球9個がある。これらをA，B，Cの3つの箱に分けるとき，次のような分け方は何通りあるか。ただし，同じ色の球は区別しないものとする。

(1) すべての箱に白球を同数ずつ入れ，すべての箱に赤玉を少なくとも1つは入れる。

(2) 球が1つも入っていない箱があってもよいとして入れる。

19 発展 互いに身長の異なる8人を，山の形に整列させる。すなわち，i 番目に並ぶ人の身長をh_iとするとき，あるk $(2 \leqq k \leqq 7)$ があって，$h_1 < \cdots\cdots < h_k$ (この部分を「登り坂」という)かつ $h_k > \cdots\cdots > h_8$ (この部分を「下り坂」という)が成立するようにする。次の問いに答えよ。

(1) $k=2$ となる並べ方は何通りあるか。

(2) $k=3$ となるとき，登り坂に並ぶ人の定め方は何通りあるか。

(3) 並べ方は全体で何通りあるか。

ヒント k 番目に1番身長の高い人を並べて，「登り坂」の$(k-1)$人の選び方を考える。

解 答　《selectⅢ 数学A》

第1講座　集合の要素の個数，順列

【p.2】

1　(1)　33　(2)　21　(3)　7　(4)　47

2　$n(\overline{A})=$**35**

$n(\overline{A}\cap B)=n(B)-n(A\cap B)=20-5=$**15**

3　(1)　一方の目が1，他方の目が素数の場合だから，(大の目，小の目)の順に表すと，

(1，2)，(1，3)，(1，5)，(2，1)，(3，1)，(5，1)の**6通り**。

(2)　$360=2^3\cdot3^2\cdot5$ より，

約数の個数は，$4\times3\times2=$**24**　約数の和は，

$(2^0+2^1+2^2+2^3)\times(3^0+3^1+3^2)\times(5^0+5^1)$

$=$**1170**

4　(1)　${}_9\mathrm{P}_4=9\cdot8\cdot7\cdot6=$**3024**

(2)　千の位は1から9までの9通り，一，十，百の位は0を含めた残りの9個の数から3個選んで並べると考えて，$9\times{}_9\mathrm{P}_3=$**4536**

(または，${}_{10}\mathrm{P}_4-{}_9\mathrm{P}_3$ と考える。)

(3)　隣り合う2人を1まとめにして考える。隣り合う2人の並び方を考えて，

${}_2\mathrm{P}_2\times{}_5\mathrm{P}_5=$**240(通り)**

(4)　両端の子音の並べ方が${}_3\mathrm{P}_2$通り。残りの文字の並べ方が${}_3\mathrm{P}_3$通り。

よって，${}_3\mathrm{P}_2\times{}_3\mathrm{P}_3=$**36(通り)**

5　(1)　$(8-1)!=7!=$**5040(通り)**

(2)　$\dfrac{(8-1)!}{2}=\dfrac{7!}{2}=$**2520(通り)**

6　(1)　$5^4=$**625(通り)**

(2)　$3\times4^3=$**192(通り)**

【p.3】

7　$n(A)=500$，$n(B)=333$，$n(C)=200$

(1)　$A\cap C=\{10\cdot1,\ 10\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 10\cdot100\}$

ド・モルガンの法則より，$\overline{A}\cup\overline{C}=\overline{A\cap C}$

よって，$n(\overline{A}\cup\overline{C})=n(\overline{A\cap C})$

$=n(U)-n(A\cap C)$

$=1000-100=$**900**

(2)　$B\cap C=\{15\cdot1,\ 15\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 15\cdot66\}$ より，

$n(B\cup C)=n(B)+n(C)-n(B\cap C)$

$=333+200-66=467$

$n(\overline{B}\cap\overline{C})=n(\overline{B\cup C})=n(U)-n(B\cup C)$

$=1000-467=$**533**

(3)　$A\cap B\cap C=\{30\cdot1,\ 30\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 30\cdot33\}$

よって，$n(A\cap B\cap C)=$**33**

(4)　$n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$

$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$n(A\cap B)=\{6\cdot1,\ 6\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 6\cdot166\}$ より，求める要素の個数は，

$500+333+200-166-66-100+33=$**734**

8　(1)　$n(A\cap B)=13$　(2)　$n(\overline{A})=134$

(3)　$n(\overline{A}\cup\overline{B})=187$　(4)　$n(\overline{B\cap C})=195$

(5)　$n(A\cap B\cap C)=1$

(6)　$n(A\cup B\cup C)=108$

9　(1)　$6=2\cdot3$ より，2の倍数でも3の倍数でもない数の個数を求める。1から200までの整数のうち，2の倍数は100個，3の倍数は66個，6の倍数は33個あるから，

$200-100-66+33=$**67**

(2)　$Z=\{6\cdot1,\ 6\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 6\cdot16\}$

$X\cap Y=\{20\cdot1,\ 20\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 20\cdot5\}$

$X\cap Y\cap Z=\{60\cdot1\}$ より，

$n((X\cap Y)\cup Z)=16+5-1=$**20**

10　全体をU，兄弟のいる人をA，姉妹のいる人をBとする。

(1)　ひとりっ子の人数をxとすると，

$x=n(U)-n(A)-n(B)+n(A\cap B)$

$=n(A\cap B)-3$

ここで，$n(A\cap B)\leqq19$ であるから，

$x\leqq19-3=16$

よって，**16人以下**

(2)　兄弟だけいる人は$n(A)-n(A\cap B)$

また，$3\leqq n(A\cap B)\leqq n(B)$ より，

5人以上21人以下

11　(1)　5g，10g，20gの分銅の個数を，それぞれx，y，zとすれば，$5x+10y+20z=60$

$z=1$ のとき，

$(x,\ y)=(6,\ 1)$，$(4,\ 2)$，$(2,\ 3)$

$z=2$ のとき，$(x,\ y)=(2,\ 1)$

よって，組合せは，**4通り**。

(2)　最大公約数は $2^3\cdot3\cdot5$ であるから，

公約数の個数は，

$(3+1)(1+1)(1+1)=$**16(個)**

公約数の総和は，

$(1+2+2^2+2^3)(1+3)(1+5)=$**360**

12　(1)　一の位が0または5となるから，

0のとき…${}_5\mathrm{P}_5=120$

5のとき…$4\times{}_4\mathrm{P}_4=96$