

● ● ● 本書の使い方 ● ● ●

高校ゼミ エクスプレインは高品質の動画をご覧いただくため、独自の動画視聴方法を提供しています。
 以下の使用方法をご覧いただき、ぜひ本書を有効にご活用ください。
 ※解説授業動画の視聴はすべて無料です。アカウントの管理も不要です。

解説授業動画の視聴方法

アプリのダウンロードに料金は
かかりません

1

SUUZボードに
アクセスしてください。

SUUZボードアプリを
ダウンロード。
(I PHONE、ANDROID対応)


PC (WEB版) の場合
[https://suuz.jp/system/
modules/](https://suuz.jp/system/modules/)

説明部分及び各問題の脇にある
9ケタのコードを入力

2

9ケタのコードを
入力してください。

ここに入力されます。



スマホ：タップで入力
PC：カーソルでクリック
キーボードで数字を入力

3


「Go」をタップまたは
クリックしてください。

タップ or クリック



4

再生ボタンをタップまたは
クリックし、画面を拡大して
ご覧ください。



再生 全画面

詳細な解説映像が視聴できます。

※スマホで動画をご視聴する場合、スマホを横に傾けることで、より大きな画面での視聴が可能になります。

補足：授業内で使う記号と意味

記号	意味	記号	意味
\therefore	ゆえに	\mathbb{R}	実数全体の集合
\because	なぜならば	\mathbb{Q}	有理数全体の集合
\mathbb{N}	自然数全体の集合	\mathbb{C}	複素数全体の集合
\mathbb{Z}	整数全体の集合	■	証明終了

目次

CONTENTS

第

1

章

式と証明

1. 二項定理 p.4
2. 整式の除法 p.7
3. 恒等式 p.9
4. 等式と不等式の証明 p.11

第

2

章

高次方程式

1. 複素数 p.16
2. 2次方程式 p.20
3. 剰余定理と因数定理 p.24
4. 高次方程式 p.28

第

3

章

図形と方程式

1. 点と直線 p.32
2. 円と直線 p.35
3. 2つの円 p.40
4. 軌跡 p.43
5. 領域 p.46
6. 図形の通過領域 p.51

第

4

章

平面上のベクトル

1. ベクトル p.56
2. 座標平面上のベクトル p.62
3. ベクトルの内積 p.64
4. ベクトルと図形 p.68
5. ベクトルと方程式 p.72
6. ベクトルと存在範囲 p.75
7. 円のベクトル方程式 p.78

第

5

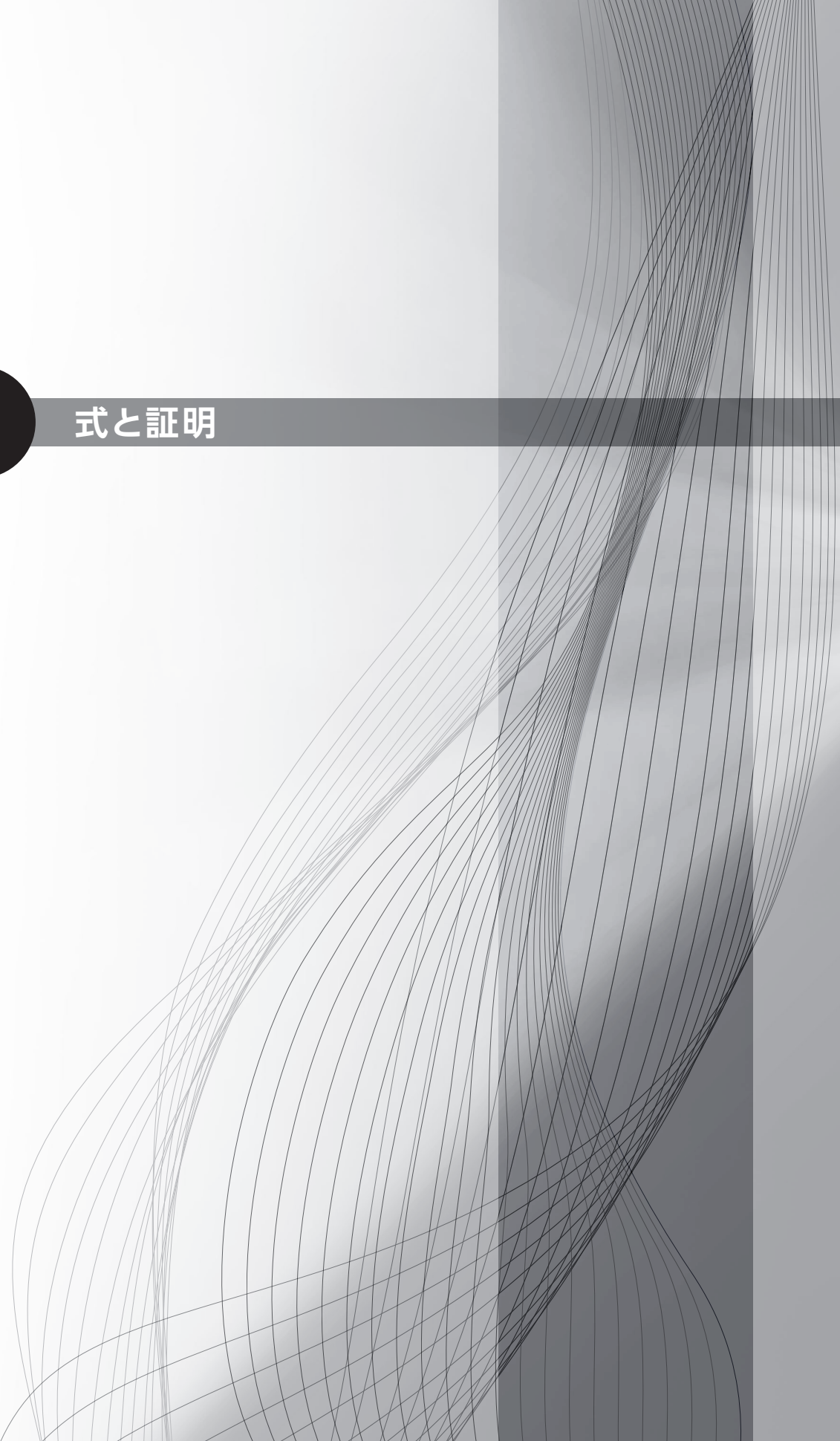
章

空間上のベクトル

1. 座標空間とベクトル p.82
2. 空間図形とベクトル p.87
3. ベクトル方程式 p.90
4. 球とベクトル p.92

1

式と証明



◇ パスカルの三角形

◇ 272-011-001

$(a+b)^2$ や $(a+b)^3$ の展開公式は、数学 I ですすでに学習しました。それでは、 $(a+b)^n$ を展開したらどのようなようになるのか考えてみましょう。

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

となりますが、その係数を取り出してみます。

$(a+b)^1$	1	1				
$(a+b)^2$	1	2	1			
$(a+b)^3$	1	3	3	1		
$(a+b)^4$	1	4	6	4	1	
$(a+b)^5$	1	5	10	10	5	1

$(a+b)^2$ の係数は、左から順に 1, 2, 1, $(a+b)^3$ の係数は、左から順に 1, 3, 3, 1 となります。同様にして、 $(a+b)^n$ の係数をかき出していき、順に並べたものをまとめたものが上の図のようになります。このように、係数をかき出していったものを**パスカルの三角形**といいます。各段の両端は 1 で、その他はすぐ左上と右上の数の和になっています。

◇ 二項定理

◇ 272-011-002

パスカルの三角形を用いれば、次々に $(a+b)^n$ の係数を求めることができます。たとえば、 $(x+2y)^5$ の x^2y^3 の係数を求めたい場合、 $(a+b)^5$ の展開式

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

の $10a^2b^3$ に $a = x$, $b = 2y$ を代入することで考えることができます。 $10(x)^2(2y)^3 = 80x^2y^3$ ですから、 x^2y^3 の係数は 80 であることがわかります。

しかし、 $(a+b)^{10}$ のように、 n が大きな値のとき、パスカルの三角形を全部かくのは大変です。また、 $(a+b)^n$ のように指数が具体的な数でなく、文字で与えられたときに $(a+b)^n$ の展開を考えることができなくなります。 n が自然数のとき、 $(a+b)^n$ の展開がどのようなになるか考えてみましょう。

$(a+b)^5$ を展開したとき、 a^3b^2 の係数を調べてみます。まず、 $(a+b)^5$ は次のようになります。

$$(a+b)^5 = \overset{\textcircled{1}}{(a)} + b)(a + \overset{\textcircled{2}}{b})(\overset{\textcircled{3}}{a} + b)(a + \overset{\textcircled{4}}{b})(\overset{\textcircled{5}}{a} + b)$$

上のように、 $(a+b)^5$ は $(a+b)$ という式を 5 回かけ合わせたものです。 $(a+b)^5$ の展開式の各項は ① から ⑤ の () 内にある文字 (a と b) を、それぞれ 1 個ずつ選んでいくことで、1 つの項が出来上がります。

a^5 の項は ① から ⑤ までの () 内から「すべて a を選んでかけ合わせて作られる項」です。 a^3b^2 の項は ① から ⑤ までの () 内から「 a を 3 個、 b を 2 個選んでかけ合わせて作られる項」になります。上の例の場合、①, ③, ⑤ の () 内から a を選び、②, ④ の () 内から b を選ぶことで a^3b^2 という項が作られています。

a^3b^2 の係数とは、結局のところ「 a^3b^2 という項は何個できるのか」ということなので、5 つの () の中か

ら「 a を 3 個, b を 2 個選ぶ方法は何通りあるか」を考えればよいことになります。つまり,

「5 つの () のうち, どの () から b を選ぶのか」

を考えればよいので, ${}_5C_2$ (通り) の選び方ができるのです。もちろん, 5 つの () のうち, どの () から a を選ぶのかを考え, ${}_5C_3$ 通りとしても OK です。

したがって, a^3b^2 は全部で ${}_5C_2 = 10$ 個できることになりますから, a^3b^2 の係数は 10 ということになります。このように, 「どの () から, いくつの b (または a) を選ぶのか」を考えることで, 展開した各項の係数を考えることができます。

$(a+b)^n$ を展開したとき, 各項の次数は n になるので, 各項は $a^{n-k}b^k$ ($0 \leq k \leq n$) と表すことができます。 $a^{n-k}b^k$ は「 $(a+b)(a+b)(a+b)\cdots(a+b)$ の n 個の () 内から b を k 個選んでかけ合わせた項」ですから, その選び方は ${}_nC_k$ 通りあります。したがって, $a^{n-k}b^k$ の係数は ${}_nC_k$ となります。

以上より, $(a+b)^n$ の展開式は次のようになります。この展開を**二項定理** (または**二項展開**) といいます。また, $a^{n-k}b^k$ の係数 ${}_nC_k$ を**二項係数**といいます。

二項定理

$$(a+b)^n = {}_nC_0a^n b^0 + {}_nC_1a^{n-1}b^1 + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \cdots \\ + {}_nC_ka^{n-k}b^k + \cdots + {}_nC_{n-1}a^1b^{n-1} + {}_nC_na^0b^n$$

二項定理は, 非常に重要な定理ではありますが, 丸暗記をするのは避けたほうがよいでしょう。二項定理の仕組みをしっかりと理解し, いつでも導出できるようにしておくことが大切です。

また, 数学 B の「数列」の単元を学習すると, 二項定理を次のように表すことができます。

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_ka^{n-k}b^k$$

Ex.1 | 次の式を展開したとき, [] 内の項の係数は何になるか求めよ。

$$(1) (a+b)^5 \quad [a^4b] \qquad (2) (a-b)^4 \quad [a^2b^2] \qquad (3) (x-2y)^7 \quad [x^4y^3]$$

多項定理

※ 272-011-003

二項定理は, $(a+b)^n$ の () の中が, $a+b$ のような「項数が 2 の式」を展開したことから名前がついています。では, $(a+b+c)^n$ のように, () の中の項数が 3 になったとき, どのような展開式になるのでしょうか。また, 一般的な多項式の n 乗の展開式を考えることはできないのでしょうか。

$(a+b+c)^n$ を例にとって考えてみましょう。 $(a+b+c)^n$ を展開したときの各項の次数は n になりますから, 展開したときの各項は, $a^pb^qc^r$ ($p+q+r=n$) と表すことができます。 $a^pb^qc^r$ の係数は, n 個の () から, a を p 個, b を q 個, c を r 個選んだときの総数です。これは, a を p 個, b を q 個, c を r 個を一列に並べたときの並べ方の総数と同じですから,

$$a^pb^qc^r \text{ の係数} = \frac{n!}{p!q!r!}$$

と表すことができます。

このように, $(a+b+c)^n$ の展開であつたとしても, 二項定理の考え方を応用することで, 各項の係数を考えることはできるのです。

Ex.2 | $(a+b+c)^{10}$ の展開式における, $a^5b^2c^3$ の係数を求めよ。

□□ 【1】 ※ 272-012-001

次の式の展開式における, [] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1) $(3x + 2)^5$ $[x^2]$

(2) $(x - \frac{1}{3})^8$ $[x^4]$

(3) $(2x + 3y)^7$ $[x^3y^4]$

(4) $(x^2 - 2y)^6$ $[x^8y^2]$

□□ 【2】 ※ 272-012-002

次の式の展開式における, [] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1) $(a + b + c)^6$ $[a^2b^3c]$

(2) $(1 + 2a + 3b)^7$ $[a^2b^3]$

□□ 【3】 ※ 272-012-003

次の式の展開式における, [] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1) $(2x - \frac{1}{x^3})^{12}$ $[x^7], [x^8]$

(2) $(1 + 2a^2 + \frac{3}{a})^7$ $[a]$

□□ 【4】 ※ 272-012-004

21^{21} を 400 で割ったときの余りを求めよ。

□□ 【5】 ※ 272-012-005

(1) $k_n C_k = n_{n-1} C_{k-1}$ ($n \geq 2, k = 1, 2, \dots, n$) が成り立つことを証明せよ。

(2) 二項定理を利用して, 次の等式が成り立つことを示せ。

(ア) ${}_n C_0 + {}_n C_1 + {}_n C_2 + \dots + {}_n C_n = 2^n$

(イ) ${}_n C_0 - {}_n C_1 + {}_n C_2 - \dots + (-1)^n {}_n C_n = 0$

(ウ) $2^n {}_n C_0 - 2^{n-1} {}_n C_1 + 2^{n-2} {}_n C_2 - \dots + (-1)^n {}_n C_n = 1$

(エ) ${}_n C_1 + 2 {}_n C_2 + 3 {}_n C_3 + \dots + n {}_n C_n = n \cdot 2^{n-1}$

演習問題
解答・解説



Section 1 二項定理

[1] ※ 272-012-001

次の式の展開式における, [] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1) $(3x+2)^5$ $[x^2]$

(3) $(2x+3y)^7$ $[x^3y^4]$

(2) $(x-\frac{1}{3})^8$ $[x^4]$

(4) $(x^2-2y)^6$ $[x^8y^2]$

(1) 一般項は, ${}_5C_r(3x)^{5-r}2^r$

$5-r=2$ とすると, $r=3$

よって, x^2 の係数は, ${}_5C_33^22^3 = \mathbf{720}$

(2) 一般項は, ${}_8C_r x^{8-r}(-\frac{1}{3})^r$

$8-r=4$ とすると, $r=4$

よって, x^4 の係数は, ${}_8C_4(-\frac{1}{3})^4 = \frac{\mathbf{70}}{\mathbf{81}}$

(3) 一般項は, ${}_7C_r(2x)^{7-r}(3y)^r$

$r=4$ の場合で, 係数は, ${}_7C_42^33^4 = \mathbf{22680}$

(4) 一般項は,

${}_6C_r(x^2)^{6-r}(-2y)^r = {}_6C_r(-2)^r x^{12-2r}y^r$

$r=2$ の場合で, 係数は, ${}_6C_2(-2)^2 = \mathbf{60}$

[2] ※ 272-012-002

次の式の展開式における, [] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1) $(a+b+c)^6$ $[a^2b^3c]$

(2) $(1+2a+3b)^7$ $[a^2b^3]$

(1) 一般項は, $\frac{6!}{p!q!r!}a^p b^q c^r$

$p=2, q=3, r=1$ のときで, a^2b^3c の項の係数は,

$\frac{6!}{2!3!1!} = \mathbf{60}$

(2) 一般項は, $\frac{7!}{p!q!r!}1^p(2a)^q(3b)^r$

$q=2, r=3, p=7-(2+3)=2$ のときで, a^2b^3 の項の係数は,

$\frac{7!}{2!2!3!} \cdot 2^2 \cdot 3^3 = \mathbf{22680}$

[3] ※ 272-012-003

次の式の展開式における, [] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1) $(2x-\frac{1}{x^3})^{12}$ $[x^7], [x^8]$

(2) $(1+2a^2+\frac{3}{a})^7$ $[a]$

(1) 一般項は,

${}_{12}C_r(2x)^{12-r}(-\frac{1}{x^3})^r$

$= {}_{12}C_r 2^{12-r}(-1)^r x^{12-4r}$

ここで, $12-4r=7$ をみたす整数 r は存在しない。したがって, x^7 の項は存在しない。

$12-4r=8$ とすると, $r=1$

よって, x^8 の係数は,

${}_{12}C_1 2^{11}(-1)^1 = \mathbf{-24576}$

(2) 一般項は,

$\frac{7!}{p!q!r!}1^p(2a^2)^q(\frac{3}{a})^r = \frac{7!2^q 3^r}{p!q!r!}a^{2q-r}$

a の係数は, 0 以上の整数 p, q, r が,

$p+q+r=7, 2q-r=1$

を満たす場合で,

$(p, q, r) = (5, 1, 1), (2, 2, 3)$

よって, 求める係数は,

$\frac{7!2^1 3^1}{5!1!1!} + \frac{7!2^2 3^3}{2!2!3!} = \mathbf{22932}$

[4] ※ 272-012-004

21^{21} を 400 で割ったときの余りを求めよ。

$21^{21} = (20+1)^{21}$

$= {}_{21}C_0 \cdot 20^{21} + {}_{21}C_1 \cdot 20^{20} \cdot 1 + {}_{21}C_2 \cdot 20^{19} \cdot 1^2 + \cdots + {}_{21}C_{19} \cdot 20^2 \cdot 1^{19} + {}_{21}C_{20} \cdot 20 \cdot 1^{20} + {}_{21}C_{21} \cdot 1^{21}$

$= 20^2({}_{21}C_0 \cdot 20^{19} + {}_{21}C_1 \cdot 20^{18} + {}_{21}C_2 \cdot 20^{17} + \cdots + {}_{21}C_{19}) + 21 \cdot 20 + 1$

$= 20^2({}_{21}C_0 \cdot 20^{19} + {}_{21}C_1 \cdot 20^{18} + {}_{21}C_2 \cdot 20^{17} + \cdots + {}_{21}C_{19} + 1) + 21$

${}_{21}C_0 \cdot 20^{19} + {}_{21}C_1 \cdot 20^{18} + {}_{21}C_2 \cdot 20^{17} + \cdots + {}_{21}C_{19} + 1$ は整数であるから、求める余りは、**21**

[5] ※ 272-012-005

- (1) $k_n C_k = n_{n-1} C_{k-1}$ ($n \geq 2, k = 1, 2, \dots, n$) が成り立つことを証明せよ。
 (2) 二項定理を利用して、次の等式が成り立つことを示せ。
 (ア) ${}_n C_0 + {}_n C_1 + {}_n C_2 + \cdots + {}_n C_n = 2^n$
 (イ) ${}_n C_0 - {}_n C_1 + {}_n C_2 - \cdots + (-1)^n {}_n C_n = 0$
 (ウ) $2^n {}_n C_0 - 2^{n-1} {}_n C_1 + 2^{n-2} {}_n C_2 - \cdots + (-1)^n {}_n C_n = 1$
 (エ) ${}_n C_1 + 2 {}_n C_2 + 3 {}_n C_3 + \cdots + n {}_n C_n = n \cdot 2^{n-1}$

$$(1) k_n C_k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$n_{n-1} C_{k-1} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)! \{(n-1)-(k-1)\}!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

よって、 $k_n C_k = n_{n-1} C_{k-1}$ が成り立つ。 ■

(2) 二項定理より、

$$(1+x)^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 x + {}_n C_2 x^2 + \cdots + {}_n C_r x^r + \cdots + {}_n C_n x^n \quad \cdots \textcircled{1}$$

(ア) 等式①で、 $x=1$ とおくと、

$$(1+1)^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 \cdot 1 + {}_n C_2 \cdot 1^2 + \cdots + {}_n C_r \cdot 1^r + \cdots + {}_n C_n \cdot 1^n$$

よって、 ${}_n C_0 + {}_n C_1 + {}_n C_2 + \cdots + {}_n C_n = 2^n$ ■

(イ) 等式①で、 $x=-1$ とおくと、

$$(1-1)^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 \cdot (-1) + {}_n C_2 \cdot (-1)^2 + \cdots + {}_n C_r \cdot (-1)^r + \cdots + {}_n C_n \cdot (-1)^n$$

よって、 ${}_n C_0 - {}_n C_1 + {}_n C_2 - \cdots + (-1)^n {}_n C_n = 0$ ■

(ウ) 二項定理

$$(a+b)^n = {}_n C_0 a^n b^0 + {}_n C_1 a^{n-1} b^1 + {}_n C_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_n C_{n-1} a^1 b^{n-1} + {}_n C_n a^0 b^n$$

の式において、 $a=2, b=-1$ とすると、

$$(2-1)^n = {}_n C_0 2^n (-1)^0 + {}_n C_1 2^{n-1} (-1)^1 + {}_n C_2 2^{n-2} (-1)^2 + \cdots + {}_n C_{n-1} 2^1 (-1)^{n-1} + {}_n C_n 2^0 (-1)^n$$

よって、 $2^n {}_n C_0 - 2^{n-1} {}_n C_1 + 2^{n-2} {}_n C_2 - \cdots + (-1)^n {}_n C_n = 1$ ■

(エ) (1) より、

$${}_n C_1 + 2 {}_n C_2 + 3 {}_n C_3 + \cdots + n {}_n C_n = n_{n-1} C_0 + n_{n-1} C_1 + n_{n-1} C_2 + \cdots + n_{n-1} C_{n-1}$$

$$= n({}_{n-1} C_0 + {}_{n-1} C_1 + {}_{n-1} C_2 + \cdots + {}_{n-1} C_{n-1})$$

ここで、上式の () の中の式は、(ア) において、 n を $n-1$ に置き換えた式なので、 2^{n-1} に等しいことがいえる。

よって、 ${}_n C_1 + 2 {}_n C_2 + 3 {}_n C_3 + \cdots + n {}_n C_n = n \cdot 2^{n-1}$ ■

Section 2 整式の除法

[6] ※ 272-012-006

次の整式 A を整式 B で割った商と余りを求め、 $A = BQ + R$ の形に表せ。

(1) $A = x^3 - 3x - 8, B = x - 3$

(2) $A = 2x^3 - 5x^2 + 6, B = 2x - 3 + x^2$

$$(1) \begin{array}{r} x^2 + 3x + 6 \\ x-3 \overline{) x^3 - 3x - 8} \\ \underline{x^3 - 3x^2} \\ 3x^2 - 3x \\ \underline{3x^2 - 9x} \\ 6x - 8 \\ \underline{6x - 18} \\ 10 \end{array}$$

よって、商は $x^2 + 3x + 6$ 、余りは 10 であり、

$$x^3 - 3x - 8 = (x-3)(x^2 + 3x + 6) + 10$$

$$(2) \begin{array}{r} 2x - 9 \\ x^2 + 2x - 3 \overline{) 2x^3 - 5x^2 + 6} \\ \underline{2x^3 + 4x^2 - 6x} \\ -9x^2 + 6x + 6 \\ \underline{-9x^2 - 18x + 27} \\ 24x - 21 \end{array}$$

よって、商は $2x - 9$ 、余りは $24x - 21$ であり、

$$2x^3 - 5x^2 + 6 = (2x - 3 + x^2)(2x - 9) + 24x - 21$$