数学A

特　色

本書は，学習指導要領をふまえ，各単元の標準的なレベルの問題を，年間を通じてじっくり完全マスターし，あわせて，受験への基礎対策用としても使用できるように編集されています。

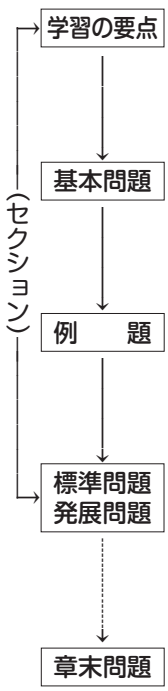
数学は体系が整然としている学問ですから，1つの単元を把握するためには，それを構成している基本事項を正確に理解し，さらに，その単元における典型的な問題の解法パターンを習得することが必要です。

そこで本書では，各単元において，基本事項や重要事項を習得するための基本レベルの問題を取り上げ，それらを反復練習することでまず基礎を固め，続いて，単元の内容をより深く理解する上で必須となる標準レベルの問題を精選して，その解き方をパターンとして学ぶことによって，幅広い応用力が定着するようにしました。

構　成

○数学Aで学習する事項を，4章28セクションに分けました。
○各セクションは見開き2ページ構成で，年間計画がたてやすいよう配慮されています。

☆1セクションの構成



学習の要点：言葉による基本事項の説明。公式や計算法則の例示。

基本問題：新しく学習する内容についての理解度をチェックする。基本レベルの問題で構成。

例題：単元を代表する標準レベルの問題を，解き方のパターンをも含めて学習する。

標準問題 発展問題：例題の関連問題を解きながら，応用範囲の広い実戦力の養成をめざす。

章末問題：章全体のまとめと，程度の高い問題で応用力を養う。

もくじ

1章　場合の数

1　集合の要素の個数 …… 4
2　場合の数 …… 6
3　順列(1) …… 8
4　順列(2) …… 10
5　組合せ(1) …… 12
6　組合せ(2) …… 14
7　いろいろな問題 …… 16
章末問題 …… 18

2章　確率

1　確率の意味 …… 20
2　確率の基本性質(1) …… 22
3　確率の基本性質(2) …… 24
4　独立な試行の確率 …… 26
5　条件付き確率 …… 28
6　期待値 …… 30
7　いろいろな問題 …… 32
章末問題 …… 34

3章　図形の性質

1　三角形の辺と角 …… 36
2　三角形の辺の比 …… 38
3　三角形の五心 …… 40
4　円に内接する四角形 …… 42
5　円と直線 …… 44
6　方べきの定理 …… 46
7　作図 …… 48
8　空間図形 …… 50
章末問題 …… 52

4章　数学と人間の活動

1　約数と倍数 …… 54
2　最大公約数，最小公倍数 …… 56
3　整数の割り算と商・余り …… 58
4　ユークリッドの互除法 …… 60
5　2元1次不定方程式の整数解 …… 62
6　整数の性質の活用 …… 64
7　いろいろな問題 …… 66
8　遊びと数学 …… 68
9　測量と数学 …… 70
章末問題 …… 72

重要事項 …… 74
平方・立法・平方根の表 …… 79
三角比の表 …… 80

第1章 場合の数

1 集合の要素の個数

★学習の要点★

❶ 有限集合と無限集合

(1) 要素の個数が有限である集合を**有限集合**といい，有限集合 A の要素の個数を $n(A)$ で表す。

(2) 要素の個数が有限でない集合を**無限集合**という。

❷ 和集合の要素の個数

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

とくに，$A\cap B=\phi$ のとき，$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

❸ 補集合の要素の個数

$n(\overline{A})=n(U)-n(A)$

● 基本問題 ●●

1 ［**集合の要素の個数**］ 次の集合 A について，$n(A)$ の値を求めよ。

(1) $A=\{x\,|\,x^2-1=0\}$　　(2) $A=\{x\,|\,x^2+4=0,\ x$ は実数$\}$

(3) $A=\{x\,|\,-2\leqq x<2,\ x$ は整数$\}$　　(4) $A=\{x\,|\,x$ は 28 の正の約数$\}$

2 ［**和集合の要素の個数**］ 1 から 100 までの整数のうち，3 の倍数の集合を A，5 の倍数の集合を B とする。次の集合の要素の個数を求めよ。

(1) A　　(2) B　　(3) $A\cap B$　　(4) $A\cup B$

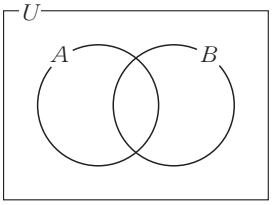
3 ［**補集合の要素の個数**］ 1 から 100 までの整数のうち，4 で割り切れる数の集合を P とする。次の集合の要素の個数を求めよ。

(1) P　　(2) $\overline{P}$

4 ［**和集合，補集合の要素の個数**］ 全体集合 U と，その部分集合 A，B について，

$n(U)=50,\quad n(A)=28,\quad n(B)=19,\quad n(A\cap B)=6$

であるとき，次の集合の要素の個数を求めよ。



(1) $A\cup B$　　(2) $\overline{A}\cap\overline{B}$

(3) $\overline{A}\cap B$　　(4) $A\cup\overline{B}$

例題 ① 要素の個数

1 から 100 までの整数について，2，3，5 のいずれかで割り切れる数はいくつあるか。

着眼点　$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$ が成り立つ。

解　2 の倍数の集合を A，3 の倍数の集合を B，5 の倍数の集合を C とすると，

$n(A)=50$，　$n(B)=33$，　$n(C)=20$

$A\cap B$ は，2 でも 3 でも割り切れる整数の集合だから，6 の倍数の集合。よって，$n(A\cap B)=16$

同様に，$B\cap C$ は 15 の倍数，$C\cap A$ は 10 の倍数の集合より，$n(B\cap C)=6$，　$n(C\cap A)=10$

また，$A\cap B\cap C$ は 30 の倍数の集合だから，$n(A\cap B\cap C)=3$

求める集合は $A\cup B\cup C$ だから，その個数は，

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$=50+33+20-16-6-10+3=74$　　答　74 個

5 類題　1 から 200 までの自然数の集合を N とし，A，B，C を N の部分集合とする。A は 3 の倍数のすべての集合，B は 5 の倍数のすべての集合，C は 7 の倍数のすべての集合とする。集合 S の要素の個数を $n(S)$ で表すとき，次の各個数を求めよ。

(1)　$n(A)$，$n(B)$，$n(C)$　　(2)　$n(A\cap B)$，$n(A\cap B\cap C)$

(3)　$n(A\cup B)$，$n(A\cup B\cup C)$

▶ 標準問題 ◀◀

6　1 から 100 までの自然数で，2 の倍数全体の集合を A，3 の倍数全体の集合を B，5 の倍数全体の集合を C とするとき，次の各個数を求めよ。

(1)　$n(A\cup B)$　　(2)　$n(A\cup C)$　　(3)　$n(\overline{A}\cup\overline{B})$

(4)　$n(\overline{A}\cap\overline{C})$　　(5)　$n(A\cap B\cap C)$　　(6)　$n(A\cup B\cup C)$

7　200 以下の正の整数の中で，3 の倍数であるが，4 の倍数でも 5 の倍数でもない数はいくつあるか。

◆ 発展問題 ◆◆

8　ある市場調査に 300 人のモニターが回答し，電気製品 A，B，C を持っているかどうかが調べられた。A を持っている人，B を持っている人，C を持っている人はそれぞれ 100 人，120 人，130 人であった。3 種類とも持っている人は 10 人，3 種類とも持っていない人は 60 人であった。

どれか 2 種類を持っているのは何人か。

ヒント　まず，$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$ を求める。

2 場合の数

★学習の要点★

❶ 和の法則

2つのことがらA，Bがあって，Aの起こる場合がa通り，Bの起こる場合がb通りある。AとBは同時には起こらないとき，AまたはBの起こる場合は，$a+b$通りある。

❷ 積の法則

2つのことがらA，Bがあって，Aの起こる場合がa通り，そのどの場合についてもBの起こる場合がb通りあるとき，AとBがともに起こる場合は，$a\times b$通りある。

●基本問題●●

9 ［**和の法則**①］ 大小2つのサイコロを投げるとき，次の場合の数を求めよ。

(1) 目の和が5

(2) 目の和が5または8

(3) 目の和が9以上

(4) 目の積が偶数

10 ［**和の法則**②］ 1から7までの整数を1つずつ書いたカードから2枚を選び，そのカードを並べて2けたの整数をつくる。このとき，できた整数が5または6の倍数となる場合は何通りあるか。

11 ［**積の法則**①］ A市からB市に行く道は4通り，B市からC市に行く道は3通りある。このとき，A市からB市を経てC市へ行くのに，何通りの行き方があるか。

12 ［**積の法則**②］ 1個のサイコロを続けて3回投げるとき，次の場合の数を求めよ。

(1) 出た目が3回とも5以上になる目の出方

(2) 出た目の積が奇数になる目の出方

13 ［**積の法則**③］ 次の式を展開したときの項の個数を求めよ。

(1) $(a+b+c+d)(x+y)$

(2) $(a+b)(p+q)(x+y+z)$

例題 ② 約数の個数

72 の正の約数の個数を求めよ。また，これらの約数全体の和を求めよ。

着眼点 素因数分解をする。$A=x^a y^b z^c$ とすると，A の正の約数の個数は $(a+1)(b+1)(c+1)$，A の正の約数の総和は $(1+x+\cdots+x^a)(1+y+\cdots+y^b)(1+z+\cdots+z^c)$

解 素因数分解すると，$72=2^3\times3^2$ であるから，
72 の正の約数は，2^3 の約数と 3^2 の約数の積の形で表される。
2^3 の約数は，1，2，2^2，2^3 の 4 個，3^2 の約数は，1，3，3^2 の 3 個あるから，
求める約数の個数は，積の法則より，$4\times3=12$（個）　……答
また，72 の約数は，$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)$ の展開式にすべて現れる。
よって，約数の総和は，$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)=15\times13=195$　……答

14 **類題** 次の数の正の約数の個数を求めよ。また，これらの約数全体の和を求めよ。

(1) 180　　(2) 800

▶ 標準問題 ◀◀

15 大中小 3 つのサイコロを同時に投げるとき，次の場合の数を求めよ。

(1) 目の和が 14 以上　　(2) 目の積が奇数

(3) 目の積が偶数　　(4) 少なくとも 2 つの目が奇数

16 かき 2 個，りんご 4 個，みかん 6 個がある。これらから，6 個取り出す方法は，何通りあるか。

17 5 個の数字 0，1，2，3，4 の中から 3 個取り出してできる 3 けたの整数は，いくつあるか。また，そのうち奇数はいくつあるか。

18 3 けたの自然数で，少なくとも 1 つのけたに 3 の倍数があるものはいくつあるか。

19 $3x+2y+z=10$ を満たす正の整数の組は全部でいくつあるか。

◆ 発展問題 ◆◆

20 長さが 3 cm，5 cm，7 cm，8 cm，10 cm の 5 本の棒から 3 本を使って作ることができる三角形の個数を求めよ。

ヒント a，b，c が三角形の各辺の長さであるための条件は，$c\leqq b\leqq a$ のとき，$b+c>a$ である。

3　順列(1)

★学習の要点★

❶ 順列

異なる n 個のものから r 個取る順列 $(n \geqq r)$ の数は,

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$$

❷ n の階乗

1 から n までの正の整数の積を n の階乗といい，$n!$ で表す。$(0!=1$ と定める$)$

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad {}_nP_n = n!$$

● 基本問題 ●●

21 ［**順列の計算**］ 次の値を求めよ。

(1) ${}_5P_3$　　(2) ${}_8P_6$　　(3) ${}_3P_3 \times {}_4P_2$

22 ［**順列①**］ 次の問いに答えよ。

(1) 1，2，3，4，5 の 5 個の数字の中から異なる数字を使ってできる 3 けたの整数の個数を求めよ。

(2) 7 名の生徒からリレーのメンバー 4 名を選び，走る順序を考えてメンバーを決めたい。何通りの決め方があるか。

(3) 5 枚の異なった色の旗から 4 枚取り出し，1 列に並べる仕方は，何通りあるか。

(4) 40 人のクラスで委員長 1 人，副委員長 1 人，書記 1 人を選ぶ方法は何通りあるか。

23 ［**順列②**］ 次の問いに答えよ。

(1) 0，1，2，3，4 の 5 つの数字を 1 回ずつ用いてできる 5 けたの整数は全部で何個あるか。

(2) 男子 4 人，女子 3 人が 1 列に並ぶとき，女子 3 人が皆隣り合う並び方は何通りあるか。

(3) 7 冊の異なる本を 1 列に本だなに並べるとき，特定の 2 冊が隣り合うようにする方法は何通りあるか。

例題 ③ 条件付きの並べ方

男子 5 人と女子 4 人が 1 列に並ぶとき，次の場合は何通りあるか。

(1) 男女が交互に並ぶ。

(2) 両端に女子がくる。

(3) 男女が交互に並び，かつ特定の男女が隣り合うように並ぶ。

着眼点 (3) 特定の男女をひとまとめにして 1 人と考える。

解 (1) 男子 5 人の並び方は 5! 通り。そのおのおのに対して女子 4 人の並び方は 4! 通り。
よって，積の法則より，$5!\times4!=120\times24=2880$ (通り) ……答

(2) 両端の女子の並び方は ${}_4P_2$ 通り。そのおのおのに対して，残り 7 人が並ぶので，積の法則より，
${}_4P_2\times7!=12\times5040=60480$ (通り) ……答

(3) 特定の男女を 1 人と考える。(男女)男女男女男女
特定の(男女)の並び方は 8 通り ((男女)と(女男)の時も考える)。そのおのおのに対して，残りの男子 4 人の並び方は 4! 通り，女子 3 人の並び方は 3! 通りあるから，積の法則より，
$8\times4!\times3!=8\times24\times6=1152$ (通り) ……答

24 類題 a，b，c，d，e の 5 文字を 1 列に並べるとき，次の場合は何通りあるか。

(1) 何も条件がないとき

(2) a，e がつねに隣り合うとき

(3) a，e が決して隣り合わないとき

(4) a，e が必ず両端にくるとき

▶ 標準問題 ◀◀

25 0，1，2，3，4，5 の 6 個の数字から異なる 3 個の数字を使用してできる 3 けたの自然数のうちで，小さい方から数えて 41 番目の数を求めよ。

26 triangle の文字の全部を用いてつくる順列の中で，次のものはそれぞれ何通りあるか。

(1) 少なくとも一端には子音 t，r，n，g，l のいずれかがくるもの

(2) 母音 3 個と子音 5 個が続いて並んでいるもの

(3) t と a との間に文字が 2 つあるもの

◆ 発展問題 ◆◆

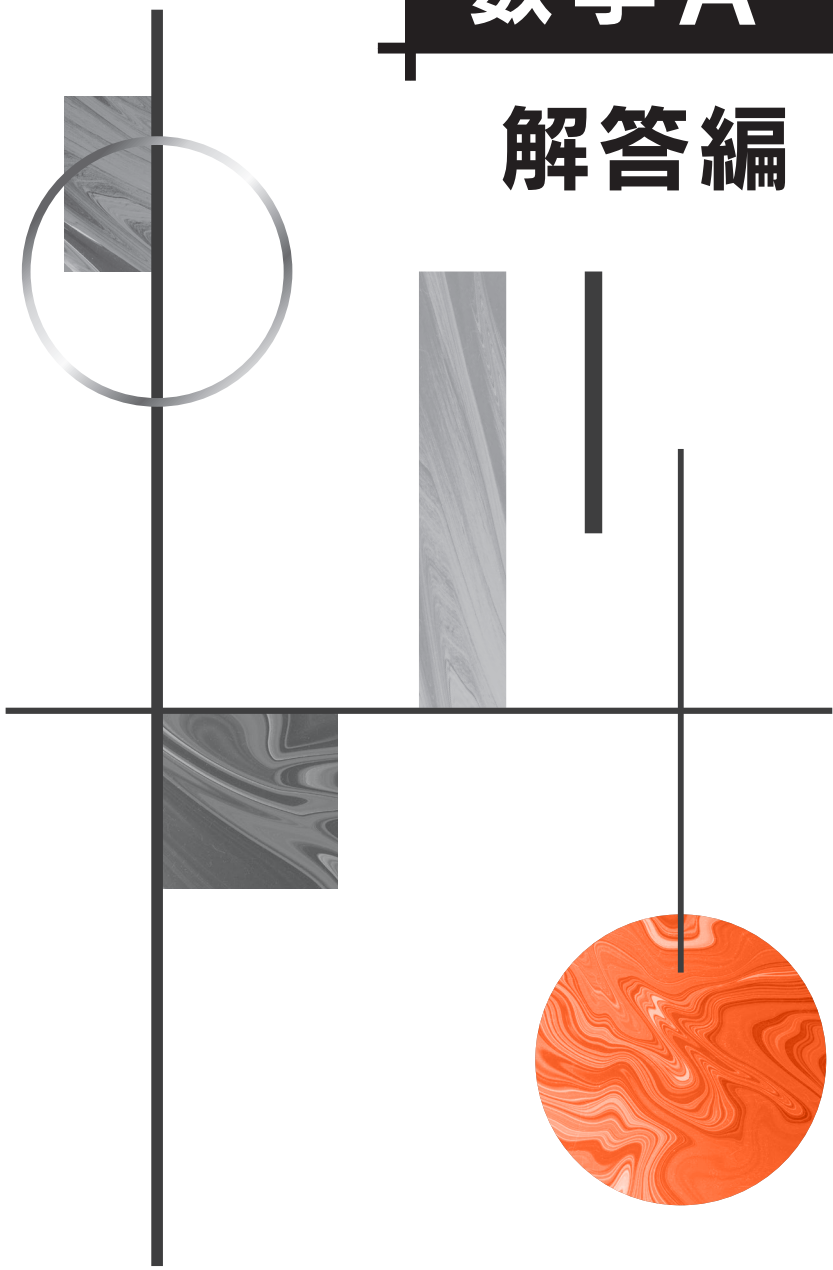
27 equation のすべての文字を使って順列をつくる。q，a が隣り合っていないもの，および t，i，o，n の順がこのままの順列はそれぞれ何通りあるか。

ヒント q，a が隣り合う場合を考える。t，i，o，n を同じ 1 つの文字とみる。

高校ゼミ
Essence

数学A

解答編



第1章 場合の数

【p. 4】 ❶ 集合の要素の個数

1 (1) $A=\{-1, 1\}$ より，$\boldsymbol{n(A)=2}$

(2) $x^2+4=0$ の解はないから，$A=\phi$，$\boldsymbol{n(A)=0}$

(3) $A=\{-2, -1, 0, 1\}$ より，$\boldsymbol{n(A)=4}$

(4) $A=\{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$ より，$\boldsymbol{n(A)=6}$

2 (1) $A=\{3\cdot1, 3\cdot2, 3\cdot3, \cdots, 3\cdot33\}$ より，
$\boldsymbol{n(A)=33}$

(2) $B=\{5\cdot1, 5\cdot2, 5\cdot3, \cdots, 5\cdot20\}$ より，
$\boldsymbol{n(B)=20}$

(3) $A\cap B$ は 15 の倍数だから，
$A\cap B=\{15\cdot1, 15\cdot2, 15\cdot3, \cdots, 15\cdot6\}$ より，
$\boldsymbol{n(A\cap B)=6}$

(4) $\boldsymbol{n(A\cup B)}=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=33+20-6=\boldsymbol{47}$

3 全体集合を U とすると，
$U=\{1, 2, \cdots, 100\}$，$n(U)=100$

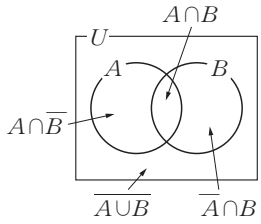
(1) $P=\{4\cdot1, 4\cdot2, \cdots, 4\cdot25\}$ より，$\boldsymbol{n(P)=25}$

(2) $\boldsymbol{n(\overline{P})}=n(U)-n(P)=100-25=\boldsymbol{75}$

4 (1) $\boldsymbol{n(A\cup B)}=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=28+19-6=\boldsymbol{41}$

(2) $\boldsymbol{n(\overline{A}\cap\overline{B})}$
$=n(\overline{A\cup B})$
$=n(U)-n(A\cup B)$
$=50-41=\boldsymbol{9}$

(3) $\boldsymbol{n(\overline{A}\cap B)}$
$=n(B)-n(A\cap B)$
$=19-6=\boldsymbol{13}$



(4) $\boldsymbol{n(A\cup\overline{B})}=n(A)+n(\overline{A\cup B})=28+9=\boldsymbol{37}$

【p. 5】

5 類題 (1) $n(A)=66$，$n(B)=40$，$n(C)=28$

(2) 15 の倍数は，$200\div15=13$ 余り 5 より，
$\boldsymbol{n(A\cap B)=13}$
$3\times5\times7=105$ の倍数は，$200\div105=1$ 余り 95 より，$\boldsymbol{n(A\cap B\cap C)=1}$

(3) $\boldsymbol{n(A\cup B)}=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=66+40-13=\boldsymbol{93}$
$\boldsymbol{n(A\cup B\cup C)}$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=66+40+28-(13+9+5)+1=\boldsymbol{108}$

6 $n(A)=50$，$n(B)=33$，$n(C)=20$，
$n(A\cap B)=16$，$n(A\cap C)=10$，$n(B\cap C)=6$，
$n(A\cap B\cap C)=3$

(1) $\boldsymbol{n(A\cup B)}=50+33-16=\boldsymbol{67}$

(2) $\boldsymbol{n(A\cup C)}=50+20-10=\boldsymbol{60}$

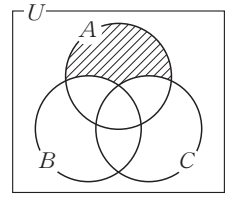
(3) $\boldsymbol{n(\overline{A}\cup\overline{B})}=n(\overline{A\cap B})=n(U)-n(A\cap B)$
$=100-16=\boldsymbol{84}$

(4) $\boldsymbol{n(\overline{A}\cap\overline{C})}=n(\overline{A\cup C})=n(U)-n(A\cup C)$
$=\boldsymbol{40}$

(5) $\boldsymbol{n(A\cap B\cap C)=3}$

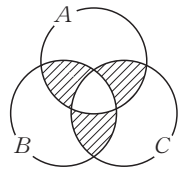
(6) $\boldsymbol{n(A\cup B\cup C)}=50+33+20-16-6-10+3$
$=\boldsymbol{74}$

7 200 以下の正の整数の中で，3 の倍数，4 の倍数，5 の倍数の集合をそれぞれ A，B，C とすると，求めるものは，集合 $A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$（図の斜線部分）の要素の個数である。



$A=\{3\cdot1, 3\cdot2, \cdots, 3\cdot66\}$
$A\cap B=\{12\cdot1, 12\cdot2, \cdots, 12\cdot16\}$
$A\cap C=\{15\cdot1, 15\cdot2, \cdots, 15\cdot13\}$
$A\cap B\cap C=\{60\cdot1, 60\cdot2, 60\cdot3\}$
したがって，$n(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})$
$=n(A)-n(A\cap B)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$
$=66-16-13+3=40$　　よって，**40 個**

8 製品 A，B，C を持っている人の集合を，それぞれ A，B，C とすると，$n(A)=100$，$n(B)=120$，$n(C)=130$，$n(A\cap B\cap C)=10$
また，$n(A\cup B\cup C)=300-60=240$
$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$ より，
$240=100+120+130$
$-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+10$
よって，$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)=120$
求める人数は，図の斜線部分の集合の要素の個数だから，
$120-3\cdot n(A\cap B\cap C)$
$=120-3\times10=90$
すなわち　**90 人**



【p. 6】 ❷ 場合の数

9 (1) (1, 4)，(4, 1)，(2, 3)，(3, 2) の **4 通り**

(2) 目の和が 8 の場合の数は，(2, 6)，(6, 2)，(3, 5)，(5, 3)，(4, 4) の 5 通り。
よって，求める場合の数は，和の法則より，
$4+5=$**9 (通り)**

(3) (3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4), (4, 6), (6, 4), (5, 5)，(5, 6)，(6, 5)，(6, 6) の **10 通り**

(4) 目の積が奇数になるのは，(1, 1)，(1, 3)，(1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5) の 9 通り。また，すべての場合は，$6\times6=36$ 通り。求める場合の数は，$36-9=$**27 (通り)**

10 5 の倍数となるのは，(1, 5)，(2, 5)，(3, 5)，(4, 5)，(6, 5)，(7, 5) の 6 通り。また，6 の倍数となるのは，(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 2), (5, 4), (7, 2) の 6 通り。和の法則より，