

数学A

●ねらいと特色

本書は、高校の重要科目である数学Aの内容を、基本的な事柄を中心に、じっくり時間をかけて理解することを目標として編集されています。

数学Aは高校数学の土台となる重要な科目であり、その内容をおろそかにしたままでは、あとで学習する上級の科目の理解はおぼつかなくなります。ですから、数学Aの基礎を確実に固めておくことはとても大切なのです。そのためには、基本となる事柄をしっかり把握したうえで、個々の問題の考え方、定理・公式の使い方に慣れることが何よりも大切です。

本書では、各単元の重要な学習項目、新しい学習項目、定理・公式・計算方法などを各項目ごとに例を用いてわかりやすく示したり、例題の考え方や解答を示したりすることで修得が速やかになるように工夫しました。また、理解を確かなものにするために、例や例題のあとでは精選された類題を生徒自身が解くようにしてあります。

さらに、いくつかの関連する項目をまとめて繰り返し問題を解くことで復習が絶えず可能となり、理解が定着できるようにしてあります。

本書を最大限に活用することで、数学Aの基礎力を大いに養ってください。

●構成と使い方

例・**例題**…**例**は、重要な学習項目、新しい学習項目、重要な定理・公式・計算方法などを確実に修得するために設けてあります。

また、**例題**は、新しく学習する項目の基本的かつ最重要な問題です。じっくり時間をかけて読み、理解することが大切です。

類題…**例**や**例題**で学習した考え方、解き方を時間をおかずに自分自身の力で解くことで、理解を確かなものにします。

問題A・B…いくつかの関連する項目をまとめて反復練習します。A問題は類題と同一レベル、B問題はやや発展した問題を収録してあります。

章末問題…各章のまとめの問題です。基本問題・発展問題の2段階構成で、やや程度の高い問題も含まれています。各章の学習の仕上げとしてアタックしてください。

もくじ

第(1)章 場合の数

1 集合の要素の個数	4	4 組合せ	14
2 場合の数	6	問題A・B	20
3 順列	8	章末問題	22
問題A・B	12		

第(2)章 確率

1 事象と確率	24	4 条件付き確率	37
2 確率の基本性質	28	5 期待値	39
問題A・B	32	問題A・B	41
3 独立な試行の確率	34	章末問題	43

第(3)章 図形の性質

1 三角形の辺の比	46	6 2つの円	67
2 三角形の外心・内心・重心	51	7 作図	69
3 チェバの定理, メネラウスの定理	54	問題A・B	71
問題A・B	56	8 空間図形	73
4 円に内接する四角形	58	問題A・B	80
5 円と直線	63	章末問題	81

第(4)章 数学と人間の活動

1 約数と倍数	84	6 n 進法	97
2 最大公約数, 最小公倍数	86	7 遊びと数学	99
3 整数の割り算と商・余り	88	8 測量と数学	101
問題A・B	93	問題A・B	103
4 ユークリッドの互除法	95	章末問題	105
5 2元1次不定方程式	96		

重要事項	107
平方・立法・平方根の表	109
三角比の表	110

第 1 章 場合の数

1 集合の要素の個数

1 集合の要素の個数

① 一般に、集合 A の要素の個数を $n(A)$ で表す。

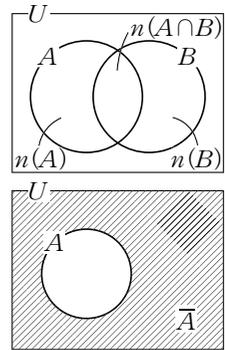
② 集合の要素の個数

全体集合 U の部分集合 A, B に対して、

$$(1) n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$(2) n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$$

例 全体集合 U の部分集合 A, B について、 $n(U) = 50$,
 $n(A) = 27$, $n(A \cap B) = 3$, $n(B) = 18$ であるとき、
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 27 + 18 - 3 = 42$
 $n(\bar{A}) = n(U) - n(A) = 50 - 27 = 23$



1 上の例の集合 U, A, B について、次の個数を求めよ。

(1) $n(\bar{B})$

(2) $n(\overline{A \cup B})$

(3) $n(\bar{A} \cup \bar{B})$

2 倍数の個数

例題 100から200までの整数のうち、3の倍数でない整数はいくつあるか。

考え方 集合の要素の個数を求める問題として考える。

解答 100から200までの整数の集合を U 、そのうち、3の倍数である整数の集合を A とすると、 $n(U) = 101$, $A = \{3 \cdot 34, 3 \cdot 35, \dots, 3 \cdot 66\}$ より、 $n(A) = 33$
 3の倍数でない整数の集合は \bar{A} だから、
 $n(\bar{A}) = n(U) - n(A) = 101 - 33 = 68$ (個) **答**

2 1から100までの整数のうち、次のような数はいくつあるか。

(1) 3の倍数

(2) 15の倍数

(3) 15との間に、1以外の公約数をもたない数

3 100から200までの整数のうち、次のような数はいくつあるか。

(1) 5の倍数でない整数

(2) 3と5の少なくとも一方で割り切れる整数

(3) 3の倍数でも5の倍数でもない整数

3 集合の応用①

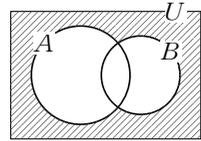
例題 40人のクラスで生徒の使っている辞書を調べたところ、辞書Aを使っている人は26人、辞書Bを使っている人は17人、辞書Aと辞書Bを両方使っている人は11人であった。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 辞書Aも辞書Bも使っていない人は何人いるか。
 (2) 辞書Bだけを使っている人は何人いるか。

考え方 図をかいて、求める集合を共通部分や和集合で表せるようにする。

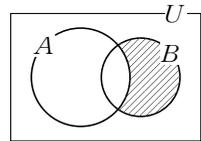
解答 クラスの40人の集合を U 、辞書Aを使っている人の集合を A 、辞書Bを使っている人の集合を B とすると、 $n(U)=40$ 、 $n(A)=26$ 、 $n(B)=17$ 、 $n(A \cap B)=11$ である。

$$\begin{aligned} (1) \quad n(\overline{A \cup B}) &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= n(U) - \{n(A) + n(B) - n(A \cap B)\} \\ &= 40 - (26 + 17 - 11) = 8 \text{ (人)} \quad \text{答} \end{aligned}$$



- (2) 辞書Bだけを使っている人の集合は、 $\overline{A} \cap B$ である。

$$\begin{aligned} n(\overline{A} \cap B) &= n(B) - n(A \cap B) \\ &= 17 - 11 = 6 \text{ (人)} \quad \text{答} \end{aligned}$$



4 上の**例題**において、さらに次の問いに答えよ。

- (1) 辞書Aを使っていない人は何人いるか。
 (2) 辞書Aか辞書Bのうち、どちらか1冊だけを使っている人は何人いるか。

4 集合の応用②

例題 U を全体集合とし、その部分集合を A 、 B とする。

$n(U)=100$ 、 $n(A \cup B)=62$ 、 $n(A \cap B)=9$ 、 $n(\overline{A} \cap B)=35$ であるとき、次のものを求めよ。

- (1) $n(A \cap \overline{B})$ (2) $n(A)$

考え方 $n(\overline{A} \cap B) + n(A \cap \overline{B}) = n(A \cup B) - n(A \cap B)$ であることを利用する。
 (上の式は、図をかくと確かめることができる。)

解答 (1) $n(\overline{A} \cap B) + n(A \cap \overline{B}) = n(A \cup B) - n(A \cap B)$ より、
 $n(A \cap \overline{B}) = n(A \cup B) - n(A \cap B) - n(\overline{A} \cap B)$
 $= 62 - 9 - 35 = 18$ 答

- (2) $n(A) = n(A \cap \overline{B}) + n(A \cap B) = 18 + 9 = 27$ 答

5 上の**例題**において、さらに次のものを求めよ。

- (1) $n(B)$ (2) $n(\overline{A} \cap \overline{B})$

3 順列

9 順列

- ① いくつかのものを、順序をつけて1列に並べた配列を**順列**という。

例 a, b, c から2個を取って並べた順列は, ab, ac, ba, bc, ca, cb

- ② n 個の異なるものから r 個を取り出して1列に並べた順列を, n 個から r 個取る順列といい, その総数を ${}_n P_r$ で表す。

1 番目	2 番目	3 番目	……	r 番目
□	□	□		□
n 通り	$(n-1)$ 通り	$(n-2)$ 通り		$\{n-(r-1)\}$ 通り
				$n-r+1$

積の法則により, ${}_n P_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r \text{ 個の積}}$

例 5人から3人選んで1列に並べる順列の総数は, ${}_5 P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ (通り)

- 1 次の値を求めよ。

(1) ${}_9 P_2$ (2) ${}_7 P_3$ (3) ${}_5 P_4$ (4) ${}_6 P_1$

- 2 次の順列の総数を求めよ。

(1) 1から9までの数字から3個取って1列に並べる順列
 (2) a, b, c, d, e, f の6個の文字から4個取って1列に並べる順列

10 n の階乗

- ① ${}_n P_r$ の式で, とくに, $n=r$ のとき, 1から n までのすべての自然数の積となる。これを n の**階乗**といい, $n!$ で表す。

$$n! = {}_n P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

例 a, b, c, d の4個の文字全部を1列に並べる順列の総数は,
 $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ (通り)

- ② ${}_n P_r$ の式を階乗の記号を用いて表すと, ${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ $0! = 1$ と定める。

- 3 次の順列の総数を求めよ。

(1) 1から5までの5個の数字全部を1列に並べてできる5桁の整数の個数
 (2) 7人を1列に並べてできる順列

11 順列の利用

例題 8人の委員の中から、委員長、副委員長、書記を各1人ずつ選ぶ方法は何通りあるか。ただし、兼任は認めないものとする。

考え方 8人の中から3人を選んで、委員長、副委員長、書記の順に並べると考える。

解答 8人から3人を選んで並べる順列の総数と考えられるから、
 ${}_8P_3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ (通り) **答**

4 12の駅がある鉄道で、発駅、着駅を書いた切符をつくるとき、切符の種類は何通りあるか。

5 10人の候補選手の中から、リレーの第1走者から第4走者までを選ぶとき、4人の走者の選び方は何通りあるか。

12 0を含む数字の順列

例題 5個の数字0, 1, 2, 3, 4がある。この中の異なる数字を使ってできる次のような整数は何個あるか。

- (1) 3桁の整数 (2) 3桁の奇数

考え方 百の位に0が使えないことに注意する。

解答 (1) 百の位の数字は1, 2, 3, 4の中から選ぶので、4通り
 十の位、一の位は残りの4個の数字から2個を取って並べる方法で ${}_4P_2$ 通り
 よって、求める3桁の整数の個数は、
 $4 \times {}_4P_2 = 4 \times 4 \cdot 3 = 48$ (個) **答**

別解 0, 1, 2, 3, 4の5個の数字から3個取って並べる方法は、 ${}_5P_3$ 通りで、
 このうち、0が百の位となるのは残り4個から2個を取る順列となるから、
 ${}_5P_3 - {}_4P_2 = 5 \cdot 4 \cdot 3 - 4 \cdot 3 = 60 - 12 = 48$ (個)

(2) 一の位が奇数となるのは、1か3の2通りで、百の位は3個のうちから1個
 選び、十の位を残り3個のうちから1個選ぶ場合だから、
 $2 \times 3 \times 3 = 18$ (個) **答**

別解 一の位が1か3のとき、百の位と十の位の並べ方は ${}_4P_2 - {}_3P_1$ 通りだから、
 $2 \times ({}_4P_2 - {}_3P_1) = 2 \times (4 \cdot 3 - 3) = 2 \times 9 = 18$ (個)

6 上の**例題**において、さらに次のような整数は何個できるか。

- (1) 4桁の整数 (2) 4桁の偶数
 (3) 5桁の整数 (4) 5桁の5の倍数

13 条件付きの並び方

例題 男子4人と女子3人が1列に並ぶとき、次のような並び方は、それぞれ何通りあるか。

- (1) 両端に男子が並ぶ。 (2) 女子3人が隣り合うように並ぶ。

考え方 並び方に決まりのある部分は別に考えて、積の法則により求める。

- (1) まず、男子2人の両端の並び方を求め、その
 おのおのに対する残り5人の並び方を考える。 (男) 残り 5人 (男)
- (2) 女子3人をひとまとめにする。まず、女子の
 ひとまとめと男子4人の並び方を求め、そのお
 のおのに対する女子3人の並び方を考える。 (男) (男) (男) (男) 女 女 女

解答 (1) 両端の男子の並び方は、 ${}_4P_2$ 通りある。

間に並ぶ残り5人の並び方は、 $5!$ 通りある。

よって、並び方の総数は、積の法則により、

$${}_4P_2 \times 5! = 4 \cdot 3 \times 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1440 \text{ (通り) } \text{ 答}$$

- (2) 女子3人のひとまとめと男子4人の並び方は、 $5!$ 通りある。

このおのおのに対する女子3人の並び方が $3!$ 通りある。

よって、並び方の総数は、積の法則により、

$$5! \times 3! = 720 \text{ (通り) } \text{ 答}$$

7 上の**例題**において、さらに次のような並び方は、それぞれ何通りあるか。

- (1) 両端に女子が並ぶ。 (2) 男子4人が隣り合うように並ぶ。
 (3) 中央に女子3人が並び、左右に男子が2人ずつ並ぶ。

8 A, Bを含む5人が1列に並ぶとき、次のような並び方は、それぞれ何通りあるか。

- (1) Aが中央に並ぶ。 (2) A, Bが両端に並ぶ。
 (3) A, Bが隣り合うように並ぶ。 (4) A, Bが隣り合わないように並ぶ。

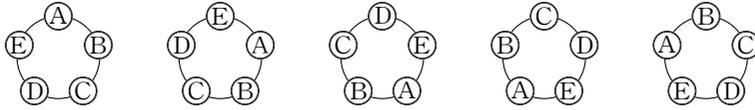
9 男子3人と女子3人が1列に並ぶとき、次のような並び方は、それぞれ何通りあるか。

- (1) 男子3人、女子3人それぞれ隣り合うように並ぶ。
 (2) 女子が隣り合わないように並ぶ。
 (3) 男子と女子が交互に並ぶ。

14 円順列

① いくつかのものを円形に並べたものを**円順列**という。

例 A, B, C, D, Eの5人が手をつないで輪をつくるとき



上のように回転して同じ順序になるものは、同じものとする。

この円順列の総数は、 $\frac{{}_5P_5}{5} = \frac{5!}{5} = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ (通り)

② n 個のものを円形に並べてできる円順列の総数は、 $(n-1)!$ 通り

10 両親と4人の子どもが円形のテーブルに着席するとき、次の問いに答えよ。

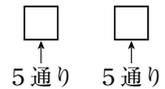
- (1) 6人が着席する方法は何通りあるか。
- (2) 両親が向かい合うように着席する方法は何通りあるか。
- (3) 両親が隣り合うように着席する方法は何通りあるか。

15 重複順列

● n 個の異なるものから重複を許して r 個取って並べる順列を、 n 個から r 個取る**重複順列**という。 n 個から r 個取る重複順列の総数は、 n^r 通り

例 ① 5個の数字1, 2, 3, 4, 5を重複を許して使って

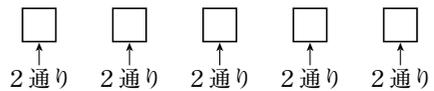
できる2桁の数の個数は、 $5^2 = 25$ (通り)



② 2個の数字1, 2を重複を許して

使ってできる5桁の数の個数は、

$2^5 = 32$ (通り)



11 次のような整数は何個あるか。ただし、数字は重複して使ってよい。

- (1) 4個の数字1, 2, 3, 4を使ってできる3桁の整数
- (2) 3個の数字1, 2, 3を使ってできる4桁の整数

12 4人でじゃんけんをするとき、手の出し方は何通りあるか。

13 記号○, ×, △, □を重複を許して並べる順列を作る。次のような順列の総数を求めよ。

- (1) 合計3個の記号を並べる順列の総数
- (2) 1個以上3個以下の記号を並べる順列の総数

問題

A

① 【集合の要素の個数】 集合 U の部分集合 A, B について、 $n(U)=50$, $n(A)=20$, $n(B)=15$, $n(A \cup B)=28$ であるとき、次の値を求めよ。

- (1) $n(A \cap B)$ (2) $n(\bar{A})$ (3) $n(\bar{A} \cap \bar{B})$

② 【樹形図】 8を3個の自然数の和で表す方法をすべて求めよ。ただし、加える順序は考えず、また、同じ数が含まれてもよいものとする。

③ 【和の法則・積の法則】 次の問いに答えよ。

- (1) 大小2個のさいころを投げるとき、目の和が8または9になる場合は何通りあるか。
 (2) 男子5人、女子4人の中から、男女1人ずつ委員を選ぶとき、選び方は何通りあるか。

④ 【約数の個数】 次の数の正の約数は何個あるか。

- (1) 32 (2) 135 (3) 400

⑤ [${}_nP_r$, n の階乗] 次の値を求めよ。

- (1) ${}_6P_3$ (2) ${}_8P_2$ (3) $3!+4!$ (4) $\frac{8!}{5!}$

⑥ 【順列の利用】 4個の数字1, 2, 3, 4がある。この中の異なる数字を使ってできる次のような整数は何個あるか。

- (1) 3桁の整数 (2) 4桁の整数
 (3) 3000より大きい4桁の整数

⑦ 【円順列】 男子2人と女子5人が円形のテーブルに着席するとき、次の問いに答えよ。

- (1) 7人が着席する方法は何通りあるか。
 (2) 男子2人が隣り合うように着席する方法は何通りあるか。

⑧ 【重複順列】 次のような整数は何個あるか。ただし、数字は重複して使ってよい。

- (1) 4個の数字1, 2, 3, 4を使ってできる4桁の奇数
 (2) 4個の数字0, 1, 2, 3を使ってできる4桁の整数

問題

B

1 1から100までの整数のうち、次のような数の個数を求めよ。

- (1) 3または5で割り切れる数
 (2) 4で割り切れないかまたは6で割り切れない数

2 60人の生徒に数学と英語の試験を行ったところ、数学の合格者は50人、英語の合格者は30人、2科目とも不合格であった人は8人であった。2科目とも合格した人は何人か。

3 大小2個のさいころを投げるとき、次のようになる場合は何通りあるか。

- (1) 目の積が奇数
 (2) 目の積が偶数
 (3) 目の和が偶数
 (4) 目の和が奇数

4 次の数の正の約数は何個あるか。

- (1) 30
 (2) 360
 (3) 1008

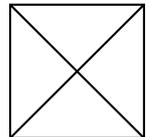
5 7個の数字0, 1, 2, 3, 4, 5, 6がある。この中の異なる数字を使ってできる次のような整数は何個あるか。

- (1) 4桁の整数
 (2) 3桁の奇数
 (3) 3桁の5の倍数
 (4) 両端が奇数である6桁の整数

6 A, B, C, D, E, Fの6文字すべてを並べるとき、次のような並べ方は何通りあるか。

- (1) AとBが隣り合わないように1列に並べる。
 (2) AとBの間に他の文字が1個だけはあるように1列に並べる。
 (3) A, B, Cが隣り合うように円形に並べる。

7 右の図は、正方形を2つの対角線で4等分したものである。赤、青、黄、緑の4色全部を使って、4つの部分を色分けする方法は何通りあるか。ただし、回転させて一致する場合は同じものとする。



8 文字 a, b, c, d, e の集合 $\{a, b, c, d, e\}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 部分集合の総数を求めよ。
 (2) a, b を含む部分集合の総数を求めよ。

高校ゼミ
Standard

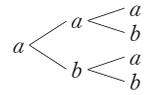
数学 A

解答編

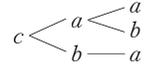
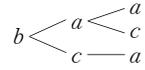
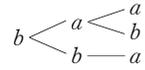
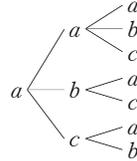


- 1 $n(U)=50, n(A)=27, n(A \cap B)=3, n(B)=18$ より,
- $n(\overline{B})=n(U)-n(B)=50-18=32$
 - $n(\overline{A \cup B})=n(U)-n(A \cup B)=50-42=8$
 - $n(\overline{A \cup B})=n(\overline{A \cap B})$
 $=n(U)-n(A \cap B)=50-3=47$
- 2 1から100までの整数の集合を U , 3の倍数の集合を A , 5の倍数の集合を B とする。
- $n(A)=33$ (個)
 - $n(A \cap B)=6$ (個)
 - $15=3 \times 5$ であるから, 求める自然数の個数は,
 $n(U)-n(A \cup B)$
 $=n(U)-\{n(A)+n(B)-n(A \cap B)\}$
 $=100-(33+20-6)=53$ (個)
- 3 100から200までの整数の集合を U , そのうち3の倍数である整数の集合を A , 5の倍数である整数の集合を B とする。
- $B=\{5 \cdot 20, 5 \cdot 21, \dots, 5 \cdot 40\}$ より, $n(B)=21$
5の倍数でない整数の集合は \overline{B} だから,
 $n(\overline{B})=n(U)-n(B)=101-21=80$ (個)
 - $A \cap B$ は15の倍数である整数の集合だから,
 $A \cap B=\{15 \cdot 7, 15 \cdot 8, \dots, 15 \cdot 13\}$,
 $n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$
 $=33+21-7=47$ (個)
 - $n(\overline{A \cap B})=n(U)-n(A \cap B)$
 $=101-47=54$ (個)
- 4 (1) $n(\overline{A})=n(U)-n(A)=40-26=14$ (人)
(2) 辞書Aだけを使っている人の集合は $A \cap \overline{B}$ であり, 辞書Bだけを使っている人の集合は $\overline{A} \cap B$ である。よって, どちらか1冊だけを使っている人の人数は,
 $n(A \cap \overline{B})+n(\overline{A} \cap B)=(26-11)+6=21$ (人)
- 5 (1) $n(B)=n(\overline{A \cap B})+n(A \cap B)=35+9=44$
(2) $n(\overline{A \cap B})=n(\overline{A \cup B})=n(U)-n(A \cup B)$
 $=100-62=38$

- 1 (1) 右の樹形図から,
次の7通りである。
aaa, aab, aba, abb,
baa, bab, bba



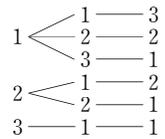
(2)



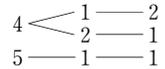
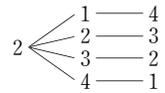
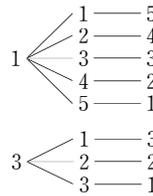
上の樹形図から, 次の13通りである。

aaa, aab, aac, aba, abc, aca, acb,
baa, bac, bca, caa, cab, cba

- 2 (1) 右の樹形図から, 大 中 小
6通り



(2)



上の樹形図から, **15通り**

- 3 (1)[1] 目の和が5
右の表から, 4通り
- | | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 大 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 小 | 4 | 3 | 2 | 1 |
- [2] 目の和が10
右の表から, 3通り
- | | | | |
|---|---|---|---|
| 大 | 4 | 5 | 6 |
| 小 | 6 | 5 | 4 |
- [1], [2]から, 和の法則により,
4+3=7(通り)
- (2)[1] 目の和が3 (1, 2), (2, 1)の2通り
[2] 目の和が6
右の表から, 5通り
- | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 大 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 小 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
- [3] 目の和が9
右の表から, 4通り
- | | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 大 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 小 | 6 | 5 | 4 | 3 |
- [4] 目の和が12 (6, 6)の1通り
[1], [2], [3], [4]から, 和の法則により,
2+5+4+1=12(通り)
- (3)[1] 目の和が10 (1)から, 3通り
[2] 目の和が11 (5, 6), (6, 5)の2通り
[3] 目の和が12 (2)から, 1通り
[1], [2], [3]から, 和の法則により,
3+2+1=6(通り)
- (4)[1] 目の和が4
右の表から, 3通り
- | | | | |
|---|---|---|---|
| 大 | 1 | 2 | 3 |
| 小 | 3 | 2 | 1 |