1　集合の要素の個数，順列

氏名		得点	/100

1 1から500までの整数のうち，4，5，7のそれぞれの倍数全体の集合をA，B，Cとするとき，次の集合の要素の個数を求めよ。（各8点×6）

(1) $A\cup B$

(2) $B\cup C$

(3) $\overline{A}\cup\overline{B}$

(4) $\overline{B}\cap\overline{C}$

(5) $A\cap B\cap C$

(6) $A\cup B\cup C$

2 あるクラス50人の生徒の家庭で，パソコンを所有する家庭が26，自動車を所有する家庭が29ある。パソコンまたは自動車を所有する家庭が40のとき，次の問いに答えよ。（各8点×2）

(1) パソコンも自動車も所有する家庭はいくつあるか。

(2) パソコンを所有し自動車を所有しない家庭はいくつあるか。

3 男子4人，女子3人が1列に並ぶとき，次のような並び方は何通りあるか。（各9点×2）

(1) 男子が両端にくる

(2) 女子の両隣りに男子が並ぶ

4 男子A，B，C，D女子a，bの6人が円形のテーブルに着席するとき，次のような場合は何通りあるか。（各9点×2）

(1) Aとaが隣り合わない

(2) 女子の両隣りに男子が着席する

2　組合せ

氏名		得点	/100

1　9人の生徒を次のように分ける方法は何通りあるか。　(各12点×2)

(1)　3人ずつ3組に分ける。

(2)　2人，2人，5人の3組に分ける。

2　男子8人，女子5人の中から次のように合計5人の委員を選出する方法は何通りあるか。

(1)　男子から3人，女子から2人選ぶ方法　(各12点×2)

(2)　女子が少なくとも1人選ばれる方法

3　10個の同じ菓子をA，B，C，Dの4人の子どもに分ける方法について，次の問いに答えよ。

(各13点×2)

(1)　菓子を1個ももらえない子どもがいてもよいとすると，分け方は何通りあるか。

(2)　A，B，C，Dがいずれも，少なくとも1個の菓子をもらう分け方は何通りあるか。

4　$x+y+z=15$ を満たす次のような整数の組$(x,\ y,\ z)$は何組あるか。　(各13点×2)

(1)　0以上の整数の組

(2)　正の整数の組

3　確率(1)

氏名		得点	/100

1 次の確率を求めよ。　(各12点×3)

(1)　7個の文字a，b，c，d，e，f，gを1列に並べるとき，a，bが両端にある確率

(2)　P，Q，R，S，Tの5人が横1列に並ぶとき，P，Q，Rが隣り合う確率

(3)　男子4人，女子3人の中から4人選ぶとき，男子3人，女子1人が選ばれる確率

2 次の確率を求めよ。　((1)12点，(2)13点)

(1)　1から20までの数字を書いた20枚のカードから2枚をとるとき，2枚とも偶数である確率

(2)　当たりくじが5本入っている15本のくじから2本のくじを同時に引くとき，1本は当たりくじで，もう1本ははずれくじである確率

3 赤玉5個，青玉3個，白玉4個が入っている袋から，よくかき混ぜて，玉を4個とり出すとき，次の確率を求めよ。　(各13点×3)

(1)　4個とも赤玉である確率

(2)　白玉が少なくとも1個含まれる確率

(3)　どの色の玉も含まれる確率

4　確率(2)	氏名		得点	/100

1 数直線上の原点に点Pがある。いま，１つのさいころを投げて，４以下の目が出たとき点Pは正の方向に２だけ進み，５以上の目が出たとき点Pは負の方向に１だけ進むものとする。さいころを７回投げた後，点Pが＋2の点にある確率を求めよ。 (20点)

2 AとBが試合をして，先に４勝した方が優勝とする。AがBに勝つ確率は$\frac{3}{5}$であり，引き分けはないものとするとき，６試合目に優勝が決まる確率を求めよ。 (20点)

3 10から30までの自然数を１つずつ書いた21枚のカードから，１枚引いたところ，引いたカードの番号の十の位が２であった。このとき，この番号の一の位が奇数である確率を求めよ。 (20点)

4 白玉５個と赤玉３個が入っている袋から、３個の玉を同時に取り出すとき、その中に含まれる白玉の個数の期待値を求めよ。 (20点)

5 箱Pには赤玉１個，白玉３個，箱Qには赤玉と白玉が２個ずつ入っている。箱Pから玉を１個取り出して箱Qに移したあとで，箱Qから玉を１個取り出すとき，Qから取り出した玉が赤玉である確率を求めよ。 (20点)

5　図形の性質(1)

氏名		得点	/100

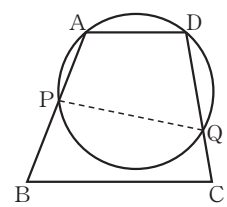
1 △ABCの辺BCの中点をMとし，∠AMBおよび∠AMCの二等分線がAB，ACと交わる点をそれぞれD，Eとし，BEとCDの交点をFとするとき，次のことを証明せよ。　(各20点×2)

(1)　DE∥BC

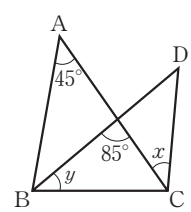
(2)　FはAM上にある

2 △ABCの重心をGとし，辺BC，CA，ABの中点をD，E，F，ADとEFの交点をHとするとき，DG：GH＝2：1となることを証明せよ。　(20点)

3 右の図において，AD∥BCである台形ABCDの頂点A，Dを通る円が辺AB，CDと交わる点をそれぞれP，Qとするとき，四角形PBCQは円に内接することを証明せよ。　(20点)



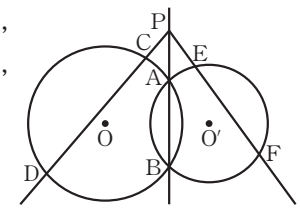
4 右の図において，∠BAC＝∠BDC，AD＝CDであるとき，x，yの大きさを求めよ。　(完答20点)



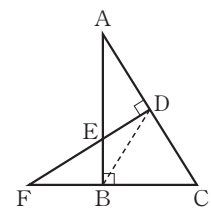
6　図形の性質(2)

氏名		得点	/100

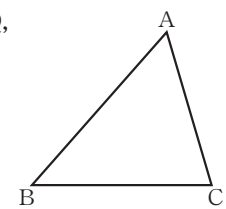
1　2点A，Bで交わる2つの円O，O′がある。直線AB上に点Pをとり，Pを通る直線と円Oとの交点をC，D，円O′との交点をE，Fとするとき，4点C，D，E，Fは同一円周上にあることを証明せよ。　(25点)



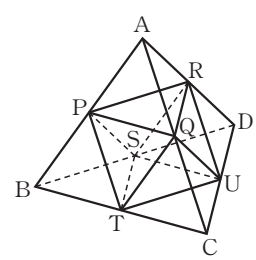
2　右の図の∠B＝90°の直角三角形ABCにおいて，辺ACの中点をDとし，Dを通りACに垂直な直線と，直線AB，BCとの交点をそれぞれE，Fとする。このとき，直線BDは△BEFの外接円に接することを証明せよ。　(25点)



3　三角形ABCが与えられたとき，△ABCの辺BC，CA，AB上に頂点P，Q，Rがあり，辺QRが辺BCに平行であるような正三角形PQRを作図せよ。　(25点)



4　右の図のように，正四面体ABCDの各辺の中点をP，Q，R，S，T，Uとする。この6つの点を頂点とする立体は正八面体であることを証明せよ。　(25点)



1　集合の要素の個数，順列

氏名		得点	/100

1　1から500までの整数のうち，4，5，7のそれぞれの倍数全体の集合をA，B，Cとするとき，次の集合の要素の個数を求めよ。$n(A)=125$，$n(B)=100$，$n(C)=71$である。　(各8点×6)

(1)　$A\cup B$

$500=20\times25$より$n(A\cap B)=25$
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=125+100-25=200$

200

(2)　$B\cup C$

$500=35\times14+10$より
$n(B\cap C)=14$
$n(B\cup C)=n(B)+n(C)-n(B\cap C)$
$=100+71-14=157$

157

(3)　$\overline{A}\cup\overline{B}$

$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$より
$n(\overline{A\cap B})=500-25=475$
よって，$n(\overline{A}\cup\overline{B})=475$

475

(4)　$\overline{B}\cap\overline{C}$

$\overline{B}\cap\overline{C}=\overline{B\cup C}$より
$n(\overline{B\cup C})=500-157=343$
よって，$n(\overline{B}\cap\overline{C})=343$

343

(5)　$A\cap B\cap C$

4，5，7の最小公倍数は140
$500=140\times3+80$より
$n(A\cap B\cap C)=3$

3

(6)　$A\cup B\cup C$

$500=28\times17+24$より$n(C\cap A)=17$
$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)=125$
$+100+71-25-14-17+3=243$

243

2　あるクラス50人の生徒の家庭で，パソコンを所有する家庭が26，自動車を所有する家庭が29ある。パソコンまたは自動車を所有する家庭が40のとき，次の問いに答えよ。　(各8点×2)

(1)　パソコンも自動車も所有する家庭はいくつあるか。

パソコンを所有する家庭をA，自動車を所有する家庭をBとする。
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=26+29-40=15$

15

(2)　パソコンを所有し自動車を所有しない家庭はいくつあるか。

$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)=26-15=11$

11

3　男子4人，女子3人が1列に並ぶとき，次のような並び方は何通りあるか。　(各9点×2)

(1)　男子が両端にくる

両端の男子2人の並び方は${}_4P_2=12$通り　その間に残りの5人が並ぶのは$5!=120$通りだから，$12\times120=1440$通り

1440通り

(2)　女子の両隣りに男子が並ぶ

男子4人を並べるのが$4!=24$通り　男子4人の間は3ヶ所で，
そこに女子3人を1人ずつ並べるのが$3!=6$通りだから，$24\times6=144$通り

144通り

4　男子A，B，C，D女子a，bの6人が円形のテーブルに着席するとき，次のような場合は何通りあるか。　(各9点×2)

(1)　Aとaが隣り合わない

男女6人が円形に着席するのは$(6-1)!=120$通り　このうち，Aとaが隣り合う並び方を考えると，Aとaをまとめて1人とみなすと5人の円順列になるから，$4!=24$通りで，Aとaの並び方が2通りだから，$24\times2=48$通り。よって，Aとaが隣り合わない並び方は，$120-48=72$通り

72通り

(2)　女子の両隣りに男子が着席する

男子4人が円形に着席するのは$3!=6$通り　4ヶ所の間のうち2ヶ所に女子が1人ずつ着席するのは${}_4P_2=12$通りだから，$6\times12=72$通り

72通り

2　組合せ

氏名		得点	/100

1　9人の生徒を次のように分ける方法は何通りあるか。　(各12点×2)

(1)　3人ずつ3組に分ける。

$\frac{{}_9C_3\times{}_6C_3}{3!}=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{1}{6}=280$(通り)　　280通り

(2)　2人，2人，5人の3組に分ける。

$\frac{{}_9C_2\times{}_7C_2}{2!}=\frac{9\cdot8}{2\cdot1}\times\frac{7\cdot6}{2\cdot1}\times\frac{1}{2}=378$(通り)　　378通り

2　男子8人，女子5人の中から次のように合計5人の委員を選出する方法は何通りあるか。

(1)　男子から3人，女子から2人選ぶ方法　(各12点×2)

${}_8C_3\times{}_5C_2=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=560$(通り)

560通り

(2)　女子が少なくとも1人選ばれる方法

5人の代表を選ぶ方法は，${}_{13}C_5=\frac{13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=1287$(通り)　女子が1人も含まれない選び方は，${}_8C_5=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56$(通り)だから，女子が少なくとも1人選ばれる方法は，$1287-56=1231$(通り)　　1231通り

3　10個の同じ菓子をA，B，C，Dの4人の子どもに分ける方法について，次の問いに答えよ。

(各13点×2)

(1)　菓子を1個ももらえない子どもがいてもよいとすると，分け方は何通りあるか。

10個の○と3本の仕切り｜の並び替えで考えると10個の○と3本の｜を並べた順列に等しいから，$\frac{13!}{10!3!}=286$(通り)　　286通り

(2)　A，B，C，Dがいずれも，少なくとも1個の菓子をもらう分け方は何通りあるか。

少なくとも1個はもらえるときは，10個の○の間から3ヶ所選んで仕切り｜を置く場合の数に等しいので，9ヶ所から3ヶ所選ぶ組合せとなり，　　84通り

${}_9C_3=84$(通り)

4　$x+y+z=15$ を満たす次のような整数の組$(x,\ y,\ z)$は何組あるか。　(各13点×2)

(1)　0以上の整数の組

15個の○と2本の仕切り｜の並び替えで考えると15個の○と2本の｜を並べた順列に等しいから，$\frac{17!}{15!2!}=286$(通り)　　136通り

(2)　正の整数の組

x，y，z は1以上の整数であるから，あらかじめ1ずつ x，y，z に分けておくと，整数12を3組に分ける方法として考えられる。よって，12個の○と2本の｜を並べた順列より，$\frac{14!}{12!2!}=91$(通り)　　91通り

3　確率(1)

氏名		得点	/100

1 次の確率を求めよ。　(各12点×3)

(1)　7個の文字a，b，c，d，e，f，gを1列に並べるとき，a，bが両端にある確率

$\frac{{}_2P_2\times{}_5P_5}{{}_7P_7}=\frac{1}{21}$　　$\frac{1}{21}$

(2)　P，Q，R，S，Tの5人が横1列に並ぶとき，P，Q，Rが隣り合う確率

$\frac{3!\times3!}{5!}=\frac{3}{10}$　　$\frac{3}{10}$

(3)　男子4人，女子3人の中から4人選ぶとき，男子3人，女子1人が選ばれる確率

$\frac{{}_4C_3\times{}_3C_1}{{}_7C_4}=\frac{12}{35}$　　$\frac{12}{35}$

2 次の確率を求めよ。　((1)12点，(2)13点)

(1)　1から20までの数字を書いた20枚のカードから2枚をとるとき，2枚とも偶数である確率

$\frac{{}_{10}C_2}{{}_{20}C_2}=\frac{9}{38}$　　$\frac{9}{38}$

(2)　当たりくじが5本入っている15本のくじから2本のくじを同時に引くとき，1本は当たりくじで，もう1本ははずれくじである確率

$\frac{{}_5C_1\times{}_{10}C_1}{{}_{15}C_2}=\frac{10}{21}$　　$\frac{10}{21}$

3 赤玉5個，青玉3個，白玉4個が入っている袋から，よくかき混ぜて，玉を4個とり出すとき，次の確率を求めよ。　(各13点×3)

(1)　4個とも赤玉である確率

$\frac{{}_5C_4}{{}_{12}C_4}=\frac{1}{99}$　　$\frac{1}{99}$

(2)　白玉が少なくとも1個含まれる確率

白玉が全く含まれない確率は $\frac{{}_8C_4}{{}_{12}C_4}=\frac{14}{99}$ だから，$1-\frac{14}{99}=\frac{85}{99}$　　$\frac{85}{99}$

(3)　どの色の玉も含まれる確率

「赤2個，青1個，白1個」「赤1個，青2個，白1個」「赤1個，青1個，白2個」のいずれかの場合だから，$\frac{{}_5C_2\times{}_3C_1\times{}_4C_1+{}_5C_1\times{}_3C_2\times{}_4C_1+{}_5C_1\times{}_3C_1\times{}_4C_2}{{}_{12}C_4}$　　$\frac{6}{11}$

$=\frac{120+60+90}{495}=\frac{6}{11}$

4　確率(2)

氏名		得点	/100

1 数直線上の原点に点Pがある。いま，1つのさいころを投げて，4以下の目が出たとき点Pは正の方向に2だけ進み，5以上の目が出たとき点Pは負の方向に1だけ進むものとする。さいころを7回投げた後，点Pが＋2の点にある確率を求めよ。　(20点)

4以下の目が出た回数を x 回とする。$2x-(7-x)=2$ より，$x=3$

1回毎に正の方向に進む確率は $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ で，負の方向に進む確率は $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ だから，

7回のうち3回4以下の目が出て，4回5以上の目が出る確率は，

${}_7C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{280}{2187}$

$\frac{280}{2187}$

2 AとBが試合をして，先に4勝した方が優勝とする。AがBに勝つ確率は $\frac{3}{5}$ であり，引き分けはないものとするとき，6試合目に優勝が決まる確率を求めよ。　(20点)

6試合目にAが優勝するのは，はじめの5試合がAの3勝2敗で，6試合目にAが勝つ場合で，Bが優勝するのは，はじめの5試合がBの3勝2敗で，6試合目にBが勝つ場合であるから，

${}_5C_3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\frac{3}{5}+{}_5C_3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{2}{5}=\frac{936}{3125}$

$\frac{936}{3125}$

3 10から30までの自然数を1つずつ書いた21枚のカードから，1枚引いたところ，引いたカードの番号の十の位が2であった。このとき，この番号の一の位が奇数である確率を求めよ。　(20点)

引いたカードの番号の十の位が2である事象を A，一の位が奇数である事象を B とすると，求める確率は $P_A(B)$ である。$P(A)=\frac{10}{21}$ で，$P(A\cap B)=\frac{5}{21}$ であるから，

$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$

4 白玉5個と赤玉3個が入っている袋から、3個の玉を同時に取り出すとき、その中に含まれる白玉の個数の期待値を求めよ。　(20点)

出る白玉の個数を X とすると，X のとる値は，0，1，2，3である。

$X=0$ である確率は，$\frac{{}_3C_3}{{}_8C_3}=\frac{1}{56}$

$X=1$ である確率は，$\frac{{}_5C_1\times{}_3C_2}{{}_8C_3}=\frac{15}{56}$

$X=2$ である確率は，$\frac{{}_5C_2\times{}_3C_1}{{}_8C_3}=\frac{30}{56}$

$X=3$ である確率は，$\frac{{}_5C_3}{{}_8C_3}=\frac{10}{56}$

よって，次のような表ができる。

X	0	1	2	3	計
確率	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$	1

したがって，求める期待値は，

$0\times\frac{1}{56}+1\times\frac{15}{56}+2\times\frac{30}{56}+3\times\frac{10}{56}=\frac{105}{56}=\frac{15}{8}$ (個)

$\frac{15}{8}$ (個)

5 箱Pには赤玉1個，白玉3個，箱Qには赤玉と白玉が2個ずつ入っている。箱Pから玉を1個取り出して箱Qに移したあとで，箱Qから玉を1個取り出すとき，Qから取り出した玉が赤玉である確率を求めよ。　(20点)

①Pから赤玉，Qから赤玉を取り出す場合 $\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{20}$　②Pから白玉，Qから赤玉を取り出す場合 $\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{20}$　①②は互いに排反だから求める確率は，$\frac{3}{20}+\frac{6}{20}=\frac{9}{20}$

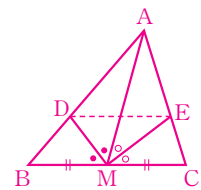
$\frac{9}{20}$

5　図形の性質(1)

氏名		得点	/100

1 △ABCの辺BCの中点をMとし，∠AMBおよび∠AMCの二等分線がAB，ACと交わる点をそれぞれD，Eとし，BEとCDの交点をFとするとき，次のことを証明せよ。　(各20点×2)

(1)　DE∥BC

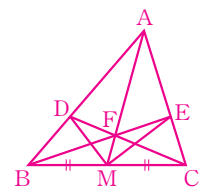


MDは∠AMBの二等分線だから，AD：DB＝AM：BM

MEは∠AMCの二等分線だから，AE：EC＝AM：CM

BM＝CMより，AD：DB＝AE：EC　よって，DE∥BC

(2)　FはAM上にある

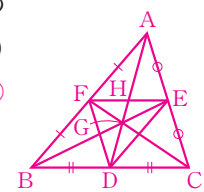


$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，BM＝CMだから，△ABCにおいて，

$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{EA}{CE}\cdot\frac{BM}{BM}\cdot\frac{CE}{EA}=1$

よって，チェバの定理の逆により，AM，BE，CDは1点で交わりFはAM上にある。

2 △ABCの重心をGとし，辺BC，CA，ABの中点をD，E，F，ADとEFの交点をHとするとき，DG：GH＝2：1となることを証明せよ。　(20点)

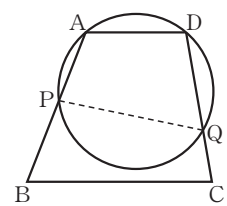


E，Fは辺AC，ABの中点だから，FE∥BC　AH：HD＝AF：FB＝1：1…①

また，Gは△ABCの重心だから，AG：GD＝2：1…②

①，②より，AH：HG：GD＝3：1：2　よって，DG：GH＝2：1

3 右の図において，AD∥BCである台形ABCDの頂点A，Dを通る円が辺AB，CDと交わる点をそれぞれP，Qとするとき，四角形PBCQは円に内接することを証明せよ。　(20点)

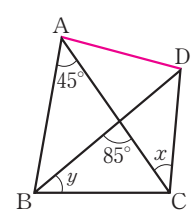


台形ABCDにおいて，AD∥BCより，∠A＋∠B＝180°…①

四角形APQDは円に内接するから，∠A＋∠PQD＝180°…②

①，②より，四角形PBCQにおいて，∠B＝∠PQDより，∠B＋∠PQC＝180°となるから，四角形PBCQは円に内接する。

4 右の図において，∠BAC＝∠BDC，AD＝CDであるとき，x，yの大きさを求めよ。　(完答20点)



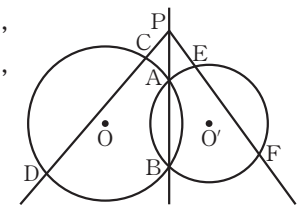
∠BAC＝∠BDCだから，円周角の定理の逆により4点A，B，C，Dは同一円周上にある。∠ABD＋45°＝85°より，∠ABD＝40°で，x＝∠ABDだから，x＝40°　AD＝CDより，∠CAD＝x＝40°で，y＝∠CAD＝40°

x＝40°，y＝40°

6　図形の性質(2)

氏名		得点	/100

1　2点A，Bで交わる2つの円O，O′がある。直線AB上に点Pをとり，Pを通る直線と円Oとの交点をC，D，円O′との交点をE，Fとするとき，4点C，D，E，Fは同一円周上にあることを証明せよ。　(25点)



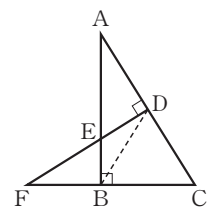
円Oにおいて方べきの定理より，PC·PD＝PA·PB…①

円O′において方べきの定理より，PE·PF＝PA·PB…②

①，②より，PC·PD＝PE·PF

よって，方べきの定理の逆より，4点C，D，E，Fは同一円周上にある。

2　右の図の∠B＝90°の直角三角形ABCにおいて，辺ACの中点をDとし，Dを通りACに垂直な直線と，直線AB，BCとの交点をそれぞれE，Fとする。このとき，直線BDは△BEFの外接円に接することを証明せよ。　(25点)

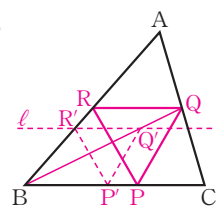


直角三角形の斜辺の中点は直角三角形の外心だから，DA＝DB　よって，△DABは二等辺三角形だから，

∠DAB＝∠DBA…①　また，∠ABC＝∠ADE＝90°より，4点ADBFは同一円周上にある。

よって，∠DAB＝∠DFB…②　①，②より，∠DBA＝∠DFB　したがって，接弦定理の逆により，直線BDは△BEFの外接円に接する。

3　三角形ABCが与えられたとき，△ABCの辺BC，CA，AB上に頂点P，Q，Rがあり，辺QRが辺BCに平行であるような正三角形PQRを作図せよ。　(25点)



①　辺BCと平行な直線ℓを引き，辺ABとの交点をR′とする。

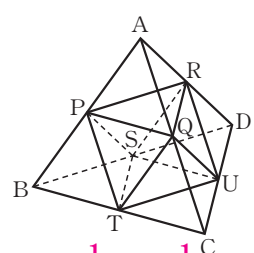
②　R′を通り直線ℓと60°(120°)で交わる直線を引き，辺BCとの交点をP′とする。

③　P′R′を1辺とする正三角形P′Q′R′をかく。

④　直線BQ′と辺ACとの交点をQとし，Qを通り辺BCに平行な直線を引き，辺ABとの交点をRとする。

⑤　QRを1辺とする正三角形が求める正三角形PQRである。

4　右の図のように，正四面体ABCDの各辺の中点をP，Q，R，S，T，Uとする。この6つの点を頂点とする立体は正八面体であることを証明せよ。　(25点)



[1]　立体PQRSTUの3つの頂点P，Q，Rはそれぞれ辺AB，AC，ADの中点である。正四面体の1辺の長さをaとすると，正三角形ABC，ACD，ADBにおいて，$PQ=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}a$，$QR=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}a$，$RP=\frac{1}{2}DB=\frac{1}{2}a$

同様にして考えると，立体PQRSTUのすべての辺の長さは$\frac{1}{2}a$である。

[2]　6つの頂点に集まる面，辺の数はすべて4つで等しい。

[1][2]より，立体PQRSTUは正八面体である。