

数学 I

特色

本書は、学習指導要領をふまえ、各単元の標準的なレベルの問題を、年間を通じてじっくり完全マスターし、あわせて、受験への基礎対策用としても使用できるように編集されています。

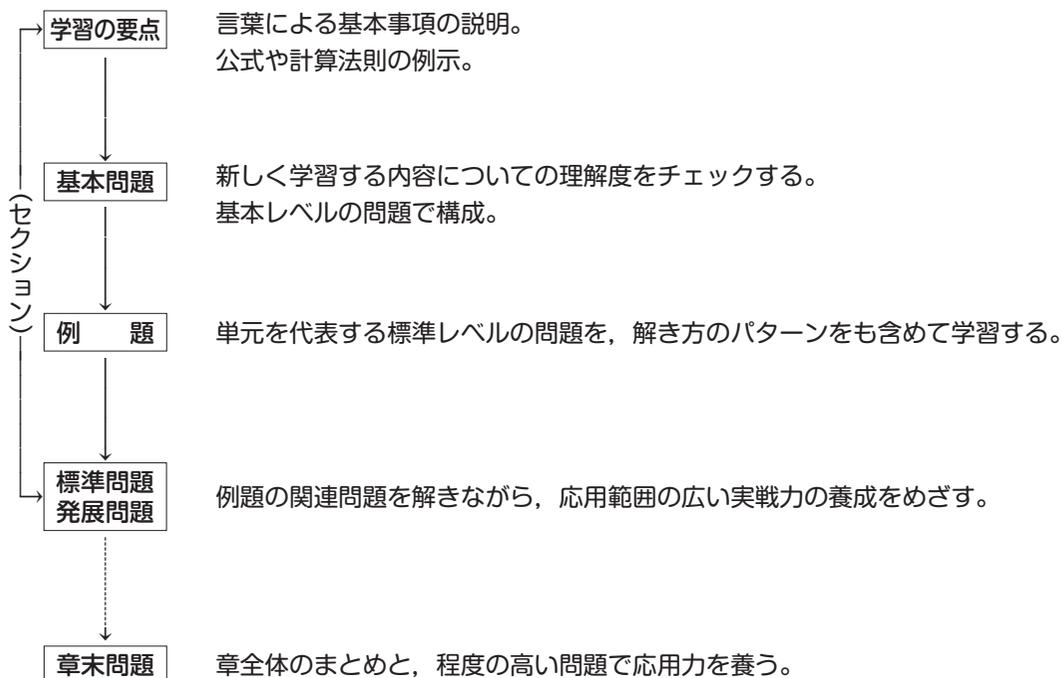
数学は体系が整然としている学問ですから、1つの単元を把握するためには、それを構成している基本事項を正確に理解し、さらに、その単元における典型的な問題の解法パターンを習得することが必要です。

そこで本書では、各単元において、基本事項や重要事項を習得するための基本レベルの問題を取り上げ、それらを反復練習することでまず基礎を固め、続いて、単元の内容をより深く理解する上で必須となる標準レベルの問題を精選して、その解き方をパターンとして学ぶことによって、幅広い応用力が定着するようにしました。

構成

- 数学 I で学習する事項を、4章 37 セクションに分けました。
- 各セクションは原則として見開き 2 ページ構成で、年間計画がたてやすいよう配慮されています。

☆ 1 セクションの構成



もくじ

① 章 数と式

1 整式の加法・減法, 指数法則	4	8 平方根(2)	18
2 展開の公式	6	9 1次不等式	20
3 因数分解(1)	8	10 集合	22
4 因数分解(2)	10	11 命題と条件	24
5 実数(1)	12	12 命題と証明	26
6 実数(2)	14	13 いろいろな問題	28
7 平方根(1)	16	章末問題	30

② 章 2次関数

1 関数とグラフ	32	8 2次関数のグラフと直線	46
2 2次関数のグラフ(1)	34	9 2次方程式の解と係数の関係	48
3 2次関数のグラフ(2)	36	10 2次関数のグラフと2次不等式(1)	50
4 2次関数の最大・最小(1)	38	11 2次関数のグラフと2次不等式(2)	52
5 2次関数の最大・最小(2)	40	12 2次方程式の解の範囲	54
6 2次方程式	42	13 いろいろな問題	56
7 2次関数のグラフと2次方程式	44	章末問題	58

③ 章 図形と計量

1 鋭角の三角比	60	6 三角形の面積	70
2 鈍角の三角比	62	7 三角比の空間図形への応用	72
3 三角比の相互関係	64	8 いろいろな問題	74
4 正弦定理と余弦定理(1)	66	章末問題	77
5 正弦定理と余弦定理(2)	68		

④ 章 データの分析

1 データの散らばり	80	4 仮説検定の考え方	86
2 分散と標準偏差	82	章末問題	88
3 データの相関	84		

重要事項 ————— 90

三角比の表 ————— 96

1 整式の加法・減法, 指数法則

★学習の要点★

① 整式の整理

ある文字について加減乗の範囲内の演算を含むもの(単項式と多項式を合わせたもの)を**整式**という。整式を整理するとき, ある文字について次数の高い項から順に並べることを, その文字について**降べきの順**に整理するという。

② 計算の基本法則

(1) 交換法則 $a+b=b+a, ab=ba$

(2) 結合法則 $(a+b)+c=a+(b+c), (ab)c=a(bc)$

(3) 分配法則 $a(b+c)=ab+ac$

③ 指数法則

(1) m, n が正の整数のとき, $a^m \times a^n = a^{m+n}, (a^m)^n = a^{mn}, (ab)^n = a^n b^n$

(2) m, n が正の整数で, $a \neq 0$ のとき, $\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} m > n \text{ のとき} & a^{m-n} \\ m = n \text{ のとき} & 1 \\ m < n \text{ のとき} & \frac{1}{a^{n-m}} \end{cases}$

●基本問題●●

1 [整式] 次の問いに答えよ。

- (1) a, b の単項式 $-4a^2b$ の次数と係数をいえ。
 (2) 整式 x^3y+xy^2-6x+4 を x についての整式とみたとき, その次数と各項の係数をいえ。
 (3) 次の式を x について降べきの順に整理せよ。

① $x^2-9x-3+6x-x^3-2x^2$

② $abx-4a+cx^2-6x-x^2$

2 [整式の加法・減法] 次の計算をせよ。

(1) $(2x^2-x+1)+(x^2+3x-2)$

(2) $3x^3-4x^2-5-(2x^3+3x^2-x+7)$

(3) $2(x-2y+3)$

(4) $3x^2-2(x-x^2)$

3 [指数法則] 次の計算をせよ。

(1) $a^2 \times a^3 \times a$

(2) $\{(a^3)^2\}^3$

(3) $(-2x^3y)^3$

(4) $(-6ab^2)^2 \div (-3a^2b)$

例題 ① 整式の加減

$A=3x^2-xy+6y^2$, $B=4x^2-2xy$, $C=2x^2+4xy+2y^2$ のとき, 次の式を計算せよ。

(1) $A-B+C$

(2) $3(A-2B)-\{A-3(B+C)\}$

着眼点 (1) $-B$ は $-(4x^2-2xy)$ と () をつけて代入する。 (2) 式を簡単にしてから代入する。

解 (1) $A-B+C=3x^2-xy+6y^2-(4x^2-2xy)+2x^2+4xy+2y^2$
 $=3x^2-4x^2+2x^2-xy+2xy+4xy+6y^2+2y^2=x^2+5xy+8y^2$ ……**答**

(2) $3(A-2B)-\{A-3(B+C)\}=2A-3B+3C$
 $=2(3x^2-xy+6y^2)-3(4x^2-2xy)+3(2x^2+4xy+2y^2)$
 $=6x^2-2xy+12y^2-12x^2+6xy+6x^2+12xy+6y^2$
 $=6x^2-12x^2+6x^2-2xy+6xy+12xy+12y^2+6y^2=16xy+18y^2$ ……**答**

4 類題 $A=x^2-3xy+2y^2$, $B=x^2-2xy-3y^2$, $C=2x^2-5y^2$ のとき, 次の式を計算せよ。

(1) $2A-3B$

(2) $A-B-(B-3C)$

▶ 標準問題 ◀◀

5 次の各組で, 2 式の和を求めよ。また, 左の式から右の式を引け。

(1) $2x^3-x^2+4$, $-14x^3+2x+1$

(2) $\frac{1}{2}x^2-3xy+\frac{1}{4}y^2$, $\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}xy+y^2$

6 次の問いに答えよ。

(1) $2x^2-3x-5$ を引くと x^2-1 になる整式を求めよ。

(2) $-3x^2+5x-1$ から引くと $-2x^2$ になる整式を求めよ。

7 次の計算をせよ。

(1) $(-2a)^3 \times (3a^2b^3)^3 \div (6a^2b)^2$

(2) $\frac{1}{15}xy \div \left(-\frac{49}{25}x^2y^3z\right) \times (-7xyz^2)^2$

◆ 発展問題 ◆◆

8 $A+2B=x^2-3x-4$, $A-B=5-2x^2$ のとき, 整式 A , B を求めよ。

ヒント A , B についての連立方程式と考える。

2 展開の公式

★学習の要点★

① 整式の乗法公式

(1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(3) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

(4) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

(5) $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

(6) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(7) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

(8) $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$

(9) $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

●基本問題●●

9 $[(a \pm b)^2 \text{の展開}]$ 次の式を展開せよ。

(1) $(2x+3)^2$

(2) $(-a+4)^2$

(3) $(3a+2b)^2$

(4) $(ax-by)^2$

10 $[(a+b)(a-b), (x+a)(x+b) \text{の展開}]$ 次の式を展開せよ。

(1) $(5+x)(5-x)$

(2) $(2a-3b)(2a+3b)$

(3) $(x+2y)(x+y)$

(4) $(a+b)(a-3b)$

11 $[(ax+b)(cx+d) \text{の展開}]$ 次の式を展開せよ。

(1) $(a+4)(2a+1)$

(2) $(2x-3)(3x+1)$

(3) $(x-3y)(3x-4y)$

(4) $(3a+4b)(5a-2b)$

12 $[(a \pm b)^3, (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \text{の展開}]$ 次の式を展開せよ。

(1) $(x+2)^3$

(2) $(x-3y)^3$

(3) $(2x+y)^3$

(4) $(3x-4y)^3$

(5) $(a+3)(a^2-3a+9)$

(6) $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$

(7) $(2t+1)(4t^2-2t+1)$

(8) $(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$

例題 2 式の展開

次の式を展開せよ。

(1) $(x+1)(x-1)(x^2+1)$

(2) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

着眼点 (1) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ の公式を利用する。 (2) $a^2+b^2=A$ とおくとよい。**解** (1) 与式 $= (x^2-1)(x^2+1) = (x^2)^2 - 1 = x^4 - 1 \dots\dots$ **答**(2) $a^2+b^2=A$ とおくと、与式 $= (A+ab)(A-ab) = A^2 - (ab)^2 = (a^2+b^2)^2 - a^2b^2$
 $= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2 = a^4 + a^2b^2 + b^4 \dots\dots$ **答****13 類題** 次の式を展開せよ。

(1) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$

(2) $(2x^2-3x+3)(2x^2+x+3)$

▶ 標準問題 ◀◀**14** 次の式を展開せよ。

(1) $(3x-4)(x-2)$

(2) $(4a+b)(2a-3b)$

(3) $(2x-3)^3$

(4) $(a+4b)^3$

(5) $(x+5)(x^2-5x+25)$

(6) $(4a-5b)(16a^2+25b^2+20ab)$

15 次の式を展開せよ。

(1) $(a+b+c)^2$

(2) $(x^2-2x-3)^2$

(3) $(a-2b+c)(a+2b+c)$

(4) $(2x^2-3x+1)(2x^2+3x-1)$

16 次の式を展開せよ。

(1) $(x+1)(x-2)(x+2)(x-1)$

(2) $(x+1)(x-2)(x-3)(x-6)$

(3) $(x-y)^2(x+y)^2(x^2+y^2)^2$

(4) $(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

◆ 発展問題 ◆◆**17** $x+y=a$, $xy=b$ とするとき、次の式を a , b で表せ。

(1) x^2+y^2

(2) x^3+y^3

(3) x^4+y^4

ヒント (3)は、 $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$ と変形して求める。

3 因数分解(1)

★学習の要点★

① 因数分解

整式を、2つ以上の整式の積の形に表すことを、**因数分解**するという。

② 因数分解の公式

$$(1) \quad ma + mb = m(a + b)$$

$$(2) \quad a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$(3) \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$(4) \quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$(5) \quad x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

$$(6) \quad acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$$

$$(7) \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(8) \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

●基本問題●●

18 [2次式の因数分解①] 次の式を因数分解せよ。

$$(1) \quad x^2 + 6x + 9$$

$$(2) \quad 9x^2 + 6xy + y^2$$

$$(3) \quad a^2 - 10a + 25$$

$$(4) \quad 8a^2 - 24ab + 18b^2$$

$$(5) \quad 9x^2y^2 - 25z^2$$

$$(6) \quad x^3y - xy$$

$$(7) \quad a^2 + 4a - 12$$

$$(8) \quad a^3 - 15a^2b - 54ab^2$$

19 [2次式の因数分解②] 次の式を因数分解せよ。

$$(1) \quad 2x^2 + 7x + 6$$

$$(2) \quad 2x^2 + 5x - 3$$

$$(3) \quad 3x^2 - 10x + 8$$

$$(4) \quad 3x^2 - 2x - 8$$

$$(5) \quad 6x^2 - 35x - 6$$

$$(6) \quad 6a^2 + 5a - 6$$

$$(7) \quad 5a^2 + 12ab + 4b^2$$

$$(8) \quad 6a^2 + ab - 2b^2$$

$$(9) \quad 4x^2 - 8xy + 3y^2$$

$$(10) \quad 10a^2 - 9ab - 9b^2$$

20 [3次式の因数分解] 次の式を因数分解せよ。

$$(1) \quad x^3 + 8$$

$$(2) \quad a^3 - 1$$

$$(3) \quad 8a^3 + 27b^3$$

$$(4) \quad 125 - 27x^3$$

$$(5) \quad 9a^3 + 72b^3$$

$$(6) \quad 54x^3 - 16y^3$$

例題 3 いろいろな因数分解①

次の式を因数分解せよ。

(1) $(a^2-a+1)(a^2-a+2)-12$

(2) x^3+x^2+x+1

着眼点 (1) $a^2-a=A$ とおきかえる。 (2) 組み合わせをくふうして、共通因数を見つける。**解** (1) $a^2-a=A$ とおく。

$$\begin{aligned} \text{与式} &= (A+1)(A+2)-12 = A^2+3A-10 = (A-2)(A+5) \\ &= (a^2-a-2)(a^2-a+5) = (a+1)(a-2)(a^2-a+5) \cdots \cdots \text{答} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2) 与式} &= (x^3+x^2)+(x+1) = x^2(x+1)+(x+1) \\ &= (x+1)(x^2+1) \cdots \cdots \text{答} \end{aligned}$$

21 類題 次の式を因数分解せよ。

(1) $(x^2+3x-2)(x^2+3x+4)-16$

(2) $(x+y)(x+y-1)-12$

(3) x^3-3x^2-x+3

(4) x^2-y^2+2y-1

▶ 標準問題 ◀◀**22** 次の式を因数分解せよ。

(1) $7x^2-12x-4$

(2) $5a^2-7a+2$

(3) x^3-3x^2-18x

(4) a^3b-ab^3

(5) $(a-b)^2-(c-d)^2$

(6) $ax^2-(a^2+5)x+5a$

(7) x^6-y^6

(8) a^6-26a^3-27

23 次の式を因数分解せよ。

(1) $(x+y)^2-5(x+y)-14$

(2) $2(a-2b)^2+9(a-2b)-5$

(3) $(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)+6$

(4) $x(x+1)(x+2)(x+3)-8$

(5) $x^3-4x^2-5x+20$

(6) $x^2-y^2-z^2+2yz$

(7) $4x^2-y^2-4x+1$

(8) $(a^2+b^2-1)^2-4a^2b^2$

◆ 発展問題 ◆◆**24** 次の式を因数分解せよ。

(1) $(x^2-5x+6)(x^2+3x+2)-60$

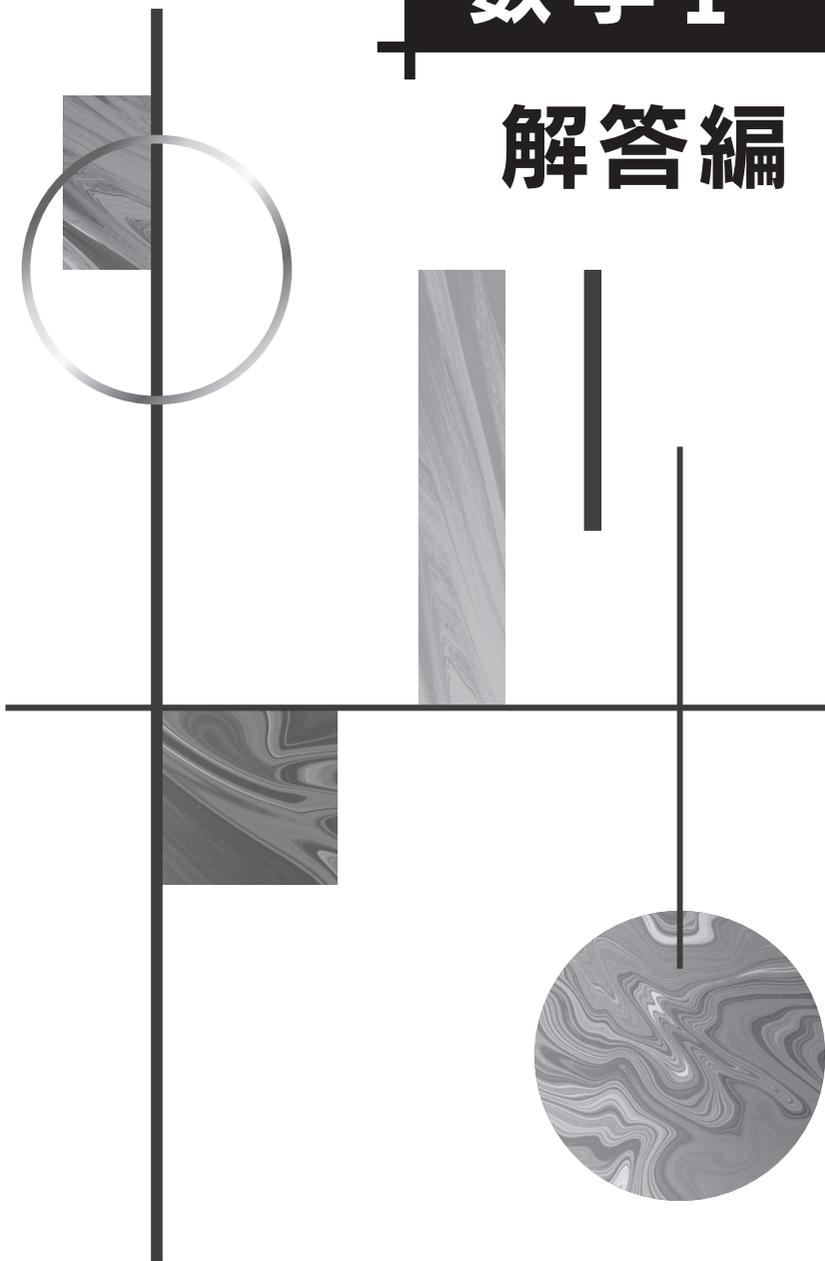
(2) $4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$

ヒント (1) まず、 x^2-5x+6 、 x^2+3x+2 をそれぞれ因数分解する。 (2) $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ の利用。

高校ゼミ
Essence

数学 I

解答編



第 1 章 数と式

[p. 4] 1 整式の加法・減法, 指数法則

- 1 (1) 次数は 3, 係数は -4
 (2) x について整理する。 $yx^3 + (y^2 - 6)x + 4$
 次数は 3, x^3 の係数は y , x^2 の係数は 0, x の係数は $y^2 - 6$, 定数項は 4

(3) ① $-x^3 - x^2 - 3x - 3$
 ② $(c-1)x^2 + (ab-6)x - 4a$

- 2 (1) $3x^2 + 2x - 1$
 (2) $x^3 - 7x^2 + x - 12$
 (3) $2x - 4y + 6$
 (4) $5x^2 - 2x$

- 3 (1) a^6 (2) a^{18}
 (3) $-8x^9y^3$ (4) $-12b^3$

[p. 5]

- 4 類題 (1) $-x^2 + 13y^2$ (2) $5x^2 + xy - 7y^2$

- 5 (1) 和 $-12x^3 - x^2 + 2x + 5$
 差 $16x^3 - x^2 - 2x + 3$

(2) 和 $\frac{5}{6}x^2 - \frac{7}{2}xy + \frac{5}{4}y^2$
 差 $\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{2}xy - \frac{3}{4}y^2$

- 6 (1) $A - (2x^2 - 3x - 5) = x^2 - 1$ より
 $A = 3x^2 - 3x - 6$

(2) $-3x^2 + 5x - 1 - A = -2x^2$ より
 $A = -x^2 + 5x - 1$

- 7 (1) $-6a^5b^7$ (2) $-\frac{5}{3}xz^3$

- 8 $A + 2B = x^2 - 3x - 4 \dots \dots$ ①
 $A - B = -2x^2 + 5 \dots \dots$ ②

① - ② より, $3B = 3x^2 - 3x - 9$
 $B = x^2 - x - 3$, $A = -x^2 - x + 2$

[p. 6] 2 展開の公式

- 9 (1) $4x^2 + 12x + 9$ (2) $a^2 - 8a + 16$

(3) $9a^2 + 12ab + 4b^2$
 (4) $a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2$

- 10 (1) $25 - x^2$ (2) $4a^2 - 9b^2$
 (3) $x^2 + 3xy + 2y^2$ (4) $a^2 - 2ab - 3b^2$

- 11 (1) $2a^2 + 9a + 4$ (2) $6x^2 - 7x - 3$
 (3) $3x^2 - 13xy + 12y^2$
 (4) $15a^2 + 14ab - 8b^2$

- 12 (1) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
 (2) $x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3$
 (3) $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$
 (4) $27x^3 - 108x^2y + 144xy^2 - 64y^3$
 (5) $a^3 + 27$ (6) $8a^3 - b^3$
 (7) $8l^3 + 1$ (8) $8x^3 - 27y^3$

[p. 7]

- 13 類題 (1) 前から順に展開していく。

$$(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) = (a^4 - b^4)(a^4 + b^4) = a^8 - b^8$$

(2) $\{(2x^2 + 3) - 3x\}\{(2x^2 + 3) + x\}$
 $= (2x^2 + 3)^2 - 2x(2x^2 + 3) - 3x^2$
 $= 4x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 6x + 9$

- 14 (1) $3x^2 - 10x + 8$ (2) $8a^2 - 10ab - 3b^2$
 (3) $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$
 (4) $a^3 + 12a^2b + 48ab^2 + 64b^3$
 (5) $x^3 + 125$ (6) $64a^3 - 125b^3$

- 15 (1) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
 (2) $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9$
 (3) $\{(a+c) - 2b\}\{(a+c) + 2b\} = (a+c)^2 - 4b^2$
 $= a^2 - 4b^2 + c^2 + 2ac$

(4) $\{2x^2 - (3x-1)\}\{2x^2 + (3x-1)\}$
 $= 4x^4 - (3x-1)^2 = 4x^4 - 9x^2 + 6x - 1$

- 16 (1) $\{(x+1)(x-1)\}\{(x+2)(x-2)\}$
 $= (x^2 - 1)(x^2 - 4) = x^4 - 5x^2 + 4$
 (2) $\{(x+1)(x-6)\}\{(x-2)(x-3)\}$
 $= (x^2 - 5x - 6)(x^2 - 5x + 6)$
 $= (x^2 - 5x)^2 - 36 = x^4 - 10x^3 + 25x^2 - 36$

(3) $\{(x-y)(x+y)\}^2(x^2 + y^2)^2$
 $= \{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)\}^2$
 $= (x^4 - y^4)^2 = x^8 - 2x^4y^4 + y^8$

(4) $\{(b+c) + a\}\{(b+c) - a\}$
 $\times \{a - (b-c)\}\{a + (b-c)\}$
 $= \{(b+c)^2 - a^2\}\{a^2 - (b-c)^2\}$
 $= -\{a^4 - (2b^2 + 2c^2)a^2 + (b+c)^2(b-c)^2\}$
 $= -a^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - b^4 + 2b^2c^2 - c^4$
 $= -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2$

- 17 (1) $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = a^2 - 2b$
 (2) $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = a^3 - 3ab$
 (3) $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2$
 $= (a^2 - 2b)^2 - 2b^2 = a^4 - 4a^2b + 2b^2$

注 $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
 より, $x^4 + y^4 = (x+y)^4 - 2xy(2x^2 + 3xy + 2y^2)$
 $= (x+y)^4 - 2xy\{2(x+y)^2 - xy\}$
 $= (x+y)^4 - 4xy(x+y)^2 + 2x^2y^2$ となる。

[p. 8] 3 因数分解(1)

- 18 (1) $(x+3)^2$ (2) $(3x+y)^2$
 (3) $(a-5)^2$ (4) $2(2a-3b)^2$
 (5) $(3xy+5z)(3xy-5z)$
 (6) $xy(x+1)(x-1)$
 (7) $(a-2)(a+6)$
 (8) $a(a+3b)(a-18b)$

- 19 (1) $(2x+3)(x+2)$
 (2) $(2x-1)(x+3)$
 (3) $(3x-4)(x-2)$
 (4) $(3x+4)(x-2)$