1　3次式の展開と因数分解

氏名		得点	/100

1 次の式を展開せよ。　（各12点×4）

(1)　$(x-2)(x^2+2x+4)$

(2)　$(2x+3)(4x^2-6x+9)$

(3)　$(x-3)^3$

(4)　$(3x+4y)^3$

2 次の式を因数分解せよ。　（各13点×4）

(1)　x^3-64

(2)　$8a^3+125b^3$

(3)　x^6+8

(4)　a^6-64b^6

2　整式の除法

氏名		得点	/100

1 次の割り算の商と余りを求めよ。（完答各16点×4）

(1)　$(3x^2+5x+4)\div(x+2)$

商＿＿＿＿＿＿＿＿　余り＿＿＿＿＿＿＿＿

(2)　$(2a^3-5a^2-5)\div(a-3)$

商＿＿＿＿＿＿＿＿　余り＿＿＿＿＿＿＿＿

(3)　$(3x^3+5x^2-16x+13)\div(x^2+3x-2)$

商＿＿＿＿＿＿＿＿　余り＿＿＿＿＿＿＿＿

(4)　$(x^4+2x^3-5x+9)\div(-3+x+x^2)$

商＿＿＿＿＿＿＿＿　余り＿＿＿＿＿＿＿＿

2 $A=4x^3+8ax^2-a^2x+2$，$B=2x+a$ を，x についての整式とみて，A を B で割った商と余りを求めよ。（完答16点）

商＿＿＿＿＿＿＿＿　余り＿＿＿＿＿＿＿＿

3 次の条件を満たす整式 A，B を求めよ。（各10点×2）

(1)　A を x^2-4 で割ると，商が x^2+2x+4，余りが $x+1$ である。

＿＿＿＿＿＿＿＿

(2)　$4x^3-3x-9$ を B で割ると，商が $2x^2-3x+3$，余りが -18 である。

＿＿＿＿＿＿＿＿

3　分数式の計算

氏名		得点	/100

1 次の計算をせよ。　（各12点×6）

(1) $\dfrac{3x^2-27}{x^2-3x}\times\dfrac{x}{3x+3}$

(2) $\dfrac{x^2-x}{x-3}\div\dfrac{x^2+5x}{x^2+2x-15}$

(3) $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{x-2}$

(4) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x^2-1}$

(5) $\dfrac{a+8}{a^2+a-2}-\dfrac{a+4}{a^2+3a+2}$

(6) $\dfrac{x-4}{x^2+2x}+\dfrac{2x-2}{x^2+6x+8}$

2 次の式を簡単にせよ。　（各14点×2）

(1) $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{x-\dfrac{1}{x}}$

(2) $\dfrac{x+2}{x-2-\dfrac{6-x}{x}}$

4　二項定理

氏名		得点	/100

1 次の式を二項定理を用いて展開せよ。　(各12点×2)

(1)　$(x-2)^4$

(2)　$(3x+2y)^6$

2 次の式の展開式における，[　　]内の項の係数を求めよ。　(各13点×4)

(1)　$(x+3)^4$　$[x^3]$

(2)　$(3x-y)^5$　$[x^3y^2]$

(3)　$(3a-2)^7$　$[a^4]$

(4)　$(2x+y)^9$　$[x^5y^4]$

3 次の式の展開式における，[　　]内の項の係数を求めよ。　(各12点×2)

(1)　$(a+b+c)^5$　$[a^2b^2c]$

(2)　$(2x-3y+z)^6$　$[xy^2z^3]$

5　恒等式

氏名		得点	/100

1 次の等式が x についての恒等式になるように，定数 a，b，c の値を定めよ。　(完答各16点×2)

(1)　$2x^2+ax-a=2x^2+(2b-3)x-3b$

(2)　$x^2+x+4=a(x+1)^2+b(x-1)+c$

2 次の等式が x についての恒等式になるように，定数 a，b，c の値を定めよ。　(完答各17点×2)

(1)　$x=ax(x-1)+b(x-1)(x-2)+cx(x-2)$

(2)　$x^2+x+2=a(x-1)(x-2)+b(x-2)(x-3)+c(x-3)(x-1)$

3 次の等式が x についての恒等式になるように，定数 a，b，c の値を定めよ。　(完答各17点×2)

(1)　$\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}=\dfrac{1}{x(x+1)}$

(2)　$\dfrac{x^2-13}{(x-2)(x+1)^2}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{(x+1)^2}+\dfrac{c}{x-2}$

6　等式の証明

氏名		得点	/100

1 次の等式を証明せよ。 (各16点×2)

(1) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

(2) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(b-c)(c-a)(a-b)$

2 $a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ。 (各17点×2)

(1) $b^2-ca=c^2-ab$

(2) $\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}=-3$

3 次の問いに答えよ。 (各17点×2)

(1) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，等式 $\dfrac{a+3c}{b+3d}=\dfrac{a-3c}{b-3d}$ を証明せよ。

(2) $a:b:c=3:4:5$ のとき，$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$ の値を求めよ。

7　不等式の証明

氏名		得点	/100

1 次の不等式を証明せよ。 (各14点×2)

(1) $x>y$ のとき，$3x-4y>2x-3y$

(2) $x>2$，$y>2$ のとき，$xy>x+y$

2 次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つときを調べよ。 (各14点×4)

(1) $x^2+4\geqq 4x$

(2) $x^2+y^2\geqq 2(x+y-1)$

(3) $a>b\geqq 0$ のとき，$2\sqrt{a}+3\sqrt{b}\geqq\sqrt{4a+9b}$

(4) $|a|+|b|\leqq\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$

3 $x>0$，$y>0$ のとき，不等式 $\left(x+\dfrac{3}{y}\right)\left(y+\dfrac{3}{x}\right)\geqq 12$ を証明せよ。 (16点)

8　複素数と方程式の解

氏名		得点	/100

1 次の計算をせよ。　（各10点×4）

(1)　$(-6+4i)+(2-3i)$

(2)　$(3+i)(2-5i)$

(3)　$\dfrac{3-2i}{1+3i}$

(4)　$\sqrt{-3}\times\sqrt{-15}$

2 次の問いに答えよ。　（各10点×4）

(1)　次の２次方程式を解け。

①　$x^2+3x+5=0$

②　$x^2+2\sqrt{3}x+6=0$

(2)　２次方程式 $x^2-(2a+1)x+1=0$ が次のような解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

①　実数解

②　異なる２つの虚数解

3 ２次方程式 $x^2-3x+5=0$ の２つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。　（各10点×2）

(1)　$\alpha^2+\beta^2$

(2)　$\dfrac{\beta^2}{\alpha}+\dfrac{\alpha^2}{\beta}$

9　高次方程式

氏名		得点	/100

1 次の問いに答えよ。　(各10点×3)

(1) 次の整式を，[　　]内の１次式で割ったときの余りを求めよ。

① x^3+5x-3　$[x-1]$　　② $3x^3-2x^2+4$　$[3x-2]$

(2) 次のうち，整式 x^3-2x^2-5x+6 の因数であるものはどれか。

㋐ $x+3$　㋑ $x+2$　㋒ $x-3$　㋓ $x+1$

2 次の方程式を解け。　(各12点×4)

(1) $x^3=64$　　(2) $x^4-3x^2+2=0$

(3) $x^3-x^2-14x+24=0$　　(4) $x^3-4x^2-2x+3=0$

3 １の３乗根のうち，虚数であるものの１つを ω とするとき，次の式の値を求めよ。　(各11点×2)

(1) $\omega^5+\omega^4+1$　　(2) $\omega^6+\omega^4+\omega^2+1$

10　点と座標

氏名		得点	/100

1 次の問いに答えよ。　(各11点×3)

(1)　次の２点間の距離を求めよ。

①　A(2, 1), B(5, 7)　　②　原点O, A(7, −2)

(2)　２点A(2, −1), B(1, 3)から等距離にある直線 $y=-x$ 上の点Pの座標を求めよ。

2 ２点A(4, 6), B(5, −1)を結ぶ線分ABについて，次の点の座標を求めよ。　(各11点×4)

(1)　3：2に内分する点　　(2)　2：1に外分する点

(3)　中点　　(4)　3：4に外分する点

3 次の問いに答えよ。　((1)12点, (2)11点)

(1)　点A(4, 1)に関して，点P(−8, 3)と対称な点Qの座標を求めよ。

(2)　３点A(3, 7), B(−2, −3), C(5, 2)を頂点とする△ABCの重心の座標を求めよ。

11　直線の方程式

氏名		得点	/100

1 次のような直線の方程式を求めよ。 (各10点×3)

(1) 点(4, 2)を通り，傾きが2の直線

(2) 2点(4, 1)，(6, −3)を通る直線

(3) x切片が3，y切片が−5である直線

2 次の問いに答えよ。 (各11点×4)

(1) 点(2, 3)を通り，直線$6x+3y-5=0$に平行な直線の方程式を求めよ。

(2) 点(3, 1)を通り，直線$x-3y-7=0$に垂直な直線の方程式を求めよ。

(3) 次の点と直線の距離を求めよ。

① 点(3, −2)，直線$2x+y+1=0$　　② 点(−2, 4)，直線$y=3x-5$

3 次の問いに答えよ。 (各13点×2)

(1) 直線$2x+y-1=0$について点A(3, 5)と対称な点Bの座標を求めよ。

(2) 2直線$x-2y-4=0$，$2x+y-1=0$の交点Aと点(3, −1)を通る直線の方程式を求めよ。

12　円の方程式

氏名		得点	/100

1 次の問いに答えよ。　(各12点×3)

(1)　中心が(3, 4)，半径が 2 の円の方程式を求めよ。

(2)　2 点A(6, 3)，B(−2, 5)を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

(3)　3 点A(1, 5)，B(2, 0)，C(−1, 2)を通る円の方程式を求めよ。

2 次の問いに答えよ。　(各12点×3)

(1)　円 $x^2+y^2=10$ と直線 $y=-x+4$ の共有点の座標を求めよ。

(2)　円 $x^2+y^2=9$ と直線 $y=2x+k$ が異なる 2 点で交わるとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

(3)　円 $x^2+y^2=20$ 上の点P(−2, 4)における接線の方程式を求めよ。

3 次の問いに答えよ。　(各14点×2)

(1)　円 $x^2+y^2=4$ と円 $(x-3)^2+y^2=9$ の位置関係を調べよ。

(2)　中心が点(2, 3)で，円 $x^2+y^2=52$ に内接する円の方程式を求めよ。

13　軌跡と領域

氏名		得点	/100

1 次の問いに答えよ。　(各12点×3)

(1)　2点A$(-2,\ 0)$，B$(0,\ 3)$から等距離にある点Pの軌跡を求めよ。

(2)　2点A$(-1,\ 0)$，B$(3,\ 0)$からの距離の比が$1:3$である点Pの軌跡を求めよ。

(3)　点Qが円$x^2+y^2=4$上を動くとき，点A$(6,\ 0)$と点Qを結ぶ線分AQの中点Pの軌跡を求めよ。

2 次の不等式の表す領域を図示せよ。　(各13点×4)

(1)　$2x-3y\geqq 6$

(2)　$x^2+(y+1)^2<16$

(3)　$\begin{cases}(x-2)^2+y^2\leqq 9\\ x+y-3<0\end{cases}$

(4)　$(x+y)(2x-y+4)>0$

3 x，yが4つの不等式$x\leqq 0$，$y\geqq 0$，$x+3y\leqq 2$，$2x-y\geqq -3$を同時に満たすとき，$y-x$の最大値，最小値を求めよ。
(完答12点)

14　三角関数

氏名		得点	/100

1　θ が次の角のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。　（完答各12点×2）

(1)　$\frac{3}{4}\pi$　　(2)　$-\frac{5}{6}\pi$

2　単位円を利用して，次の値を求めよ。　（(1)(2)各12点×2，(3)13点）

(1)　$\sin\frac{7}{4}\pi$　　(2)　$\cos\frac{13}{6}\pi$　　(3)　$\tan\left(-\frac{5}{4}\pi\right)$

3　次のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。　（完答各13点×3）

(1)　$y=2\sin\theta$

周期＿＿＿＿＿＿

(2)　$y=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

周期＿＿＿＿＿＿

(3)　$y=\tan\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$

周期＿＿＿＿＿＿

15　三角関数の性質

氏名		得点	/100

1 次の問いに答えよ。　((1)完答各11点×3)

(1)　θ が第 2 象限の角で，$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

$\sin\theta$ ＿＿＿＿＿＿　$\tan\theta$ ＿＿＿＿＿＿

(2)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ。

＿＿＿＿＿＿

(3)　等式 $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{2}{\sin\theta}$ を証明せよ。

2 次の値を求めよ。　(各11点×3)

(1)　$\sin\dfrac{10}{3}\pi$　　(2)　$\cos\dfrac{11}{6}\pi$　　(3)　$\tan\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right)$

＿＿＿＿＿＿　＿＿＿＿＿＿　＿＿＿＿＿＿

3 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。　((1)(2)各11点×2，(3)12点)

(1)　$\sqrt{2}\sin\theta=-1$　　(2)　$\tan\theta=\sqrt{3}$　　(3)　$\cos\theta>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

＿＿＿＿＿＿　＿＿＿＿＿＿　＿＿＿＿＿＿

16　加法定理

氏名		得点	/100

1 加法定理を用いて，次の値を求めよ。　(各11点×4)

(1)　$\sin 75^\circ$

(2)　$\sin 15^\circ$

(3)　$\cos 105^\circ$

(4)　$\tan 15^\circ$

2 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ で $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$ で $\sin\beta=\frac{5}{13}$ とするとき，次の値を求めよ。　(各11点×3)

(1)　$\sin(\alpha+\beta)$

(2)　$\cos(\alpha-\beta)$

(3)　$\tan(\alpha+\beta)$

3 次の 2 直線のなす角 θ を求めよ。ただし，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。　((1)11点，(2)12点)

(1)　$2x-y+1=0$，　$3x+y-2=0$

(2)　$y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}$，$y=-3\sqrt{3}x-1$

17　加法定理の応用

氏名		得点	/100

1 次の問いに答えよ。　(各 8 点×7)

(1) $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\sin\alpha=\frac{1}{3}$ のとき，次の値を求めよ。

① $\sin 2\alpha$　　② $\cos 2\alpha$　　③ $\tan 2\alpha$

(2) 半角の公式を用いて，次の値を求めよ。

① $\sin\frac{3}{8}\pi$　　② $\cos\frac{\pi}{12}$　　③ $\tan\frac{5}{12}\pi$

(3) $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，方程式 $\sin 2\theta+\cos\theta=0$ を解け。

2 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。　((1) 8 点，(2) 9 点)

(1) $\sin\theta-\cos\theta$　　(2) $-\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta$

3 次の式の値を求めよ。　(各 9 点×3)

(1) $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{3}{8}\pi$　　(2) $\sin\frac{11}{12}\pi+\sin\frac{5}{12}\pi$　　(3) $\cos\frac{7}{12}\pi-\cos\frac{\pi}{12}$

18　指数の拡張

氏名		得点	/100

1 次の値を求めよ。　(各6点×4)

(1)　-27 の3乗根

(2)　625の4乗根

(3)　$\sqrt[3]{-64}$

(4)　$\sqrt[5]{243}$

2 次の計算をせよ。ただし，$a \neq 0$，$b \neq 0$ とする。　(各6点×6)

(1)　$(-5)^{-3}$

(2)　a^4a^{-2}

(3)　$(a^{-1}b^2)^{-5}$

(4)　$\sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{8}$

(5)　$\dfrac{\sqrt[4]{96}}{\sqrt[4]{6}}$

(6)　$\sqrt[3]{\sqrt{729}}$

3 次の計算をせよ。ただし，$a \neq 0$ とする。　((1)(2)各6点×2，(3)〜(6)各7点×4)

(1)　$64^{\frac{2}{3}}$

(2)　$81^{-\frac{3}{4}}$

(3)　$5^{\frac{5}{6}} \div 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{-\frac{1}{3}}$

(4)　$\sqrt[4]{6} \times \sqrt{6} \times \sqrt[8]{36}$

(5)　$\left\{\left(\dfrac{27}{64}\right)^{\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{4}{9}}$

(6)　$a^{-3} \div a^2 \times (a^4)^{-2}$

19　指数関数

氏名		得点	/100

1 次の関数のグラフをかけ。　（各11点×4）

(1)　$y=5^x$

(2)　$y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$

(3)　$y=2^{x+1}$

(4)　$y=-2^{-x}$

2 次の方程式，不等式を解け。　（各11点×4）

(1)　$4^{3x-1}=16$

(2)　$4^x-3\cdot 2^x+2=0$

(3)　$5^x>125$

(4)　$\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1}<\frac{1}{8}$

3 関数 $y=-4^x+2^{x+1}$ $(-1\leqq x\leqq 2)$ の最大値，最小値を求めよ。　（完答12点）

20　対数とその性質

氏名		得点	/100

1 次の問いに答えよ。　(各 8 点×7)

(1) 次の①，②は $\log_a M=p$ の形に，③，④は $a^p=M$ の形に表せ。

① $5^3=125$

② $10^{-3}=\dfrac{1}{1000}$

③ $\log_2 32=5$

④ $\log_3 \dfrac{1}{9}=-2$

(2) 次の値を求めよ。

① $\log_3 27$

② $\log_2 \sqrt{2}$

③ $\log_{\frac{1}{2}} 8$

2 次の式を計算せよ。　(各 8 点×3)

(1) $\log_4 2+\log_4 8$

(2) $\log_7 98-\log_7 2$

(3) $\dfrac{1}{2}\log_5 10-\log_5 \sqrt{2}$

3 次の式を簡単にせよ。　(各10点×2)

(1) $\log_{27} 9$

(2) $\log_2 3\cdot\log_9 4$

21　対数関数

氏名		得点	/100

1 次の関数のグラフをかけ。　（各11点×4）

(1)　$y=\log_5 x$

(2)　$y=\log_{\frac{1}{4}} x$

(3)　$y=\log_4(x-2)$

(4)　$y=\log_4(-x)$

2 次の方程式，不等式を解け。　（各11点×4）

(1)　$\log_4 x=3$

(2)　$\log_3(x-1)+\log_3(x+5)=3$

(3)　$\log_4(x+3)>2$

(4)　$\log_3 x+\log_3(x-6)<3$

3 関数 $y=\log_4(x-1)$ $(2\leqq x\leqq 5)$ の最大値，最小値を求めよ。　（完答12点）

22　常用対数

氏名		得点	/100

1 $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ として，次の値を求めよ。(4)は小数第 5 位を四捨五入して答えよ。（各12点×4）

(1)　$\log_{10}12$

(2)　$\log_{10}\dfrac{8}{9}$

(3)　$\log_{10}15$

(4)　$\log_{8}3$

2 次の数は何桁の整数か。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。（各13点×2）

(1)　3^{100}

(2)　6^{40}

3 次の数を小数で表すと，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。（各13点×2）

(1)　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{30}$

(2)　$\left(\dfrac{1}{18}\right)^{70}$

23　微分係数と導関数

氏名		得点	/100

1 次の問いに答えよ。　(各11点×3)

(1)　関数 $y=-2x^2$ の $x=2$ から $x=2+h$ までの平均変化率を求めよ。

(2)　極限値 $\lim_{h\to 0}(3+2h+h^2)$ を求めよ。

(3)　関数 $f(x)=3x^2$ について，$x=-1$ における微分係数を求めよ。

2 次の問いに答えよ。　(各11点×4)

(1)　定義に従って，次の関数の導関数を求めよ。

①　$f(x)=2x$　　②　$f(x)=4x^2$

(2)　次の関数を微分せよ。

①　$y=5x^2-3x+4$　　②　$y=(2x^2+1)(x-3)$

3 次の問いに答えよ。　((1)11点，(2)完答12点)

(1)　関数 $y=2x^2+3x-1$ のグラフ上の点A(1，4)における接線の方程式を求めよ。

(2)　関数 $y=x^3-5x$ について，傾きが -2 の接線の方程式とその接点の座標を求めよ。

24　関数の極大・極小

氏名		得点	/100

1 次の関数の増減を調べ，極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。　（増減，極値，グラフ（完答），各10点×6）

(1)　$y=x^3-3x^2+1$

(2)　$y=-x^3-3x^2+9x$

2 次の関数の最大値，最小値を求めよ。　（完答各10点×2）

(1)　$y=x^2-2x$　$(0\leqq x\leqq 4)$

(2)　$y=x^3-6x^2-15x$　$(-3\leqq x\leqq 2)$

3 次の 3 次方程式の異なる実数解の個数を求めよ。　（各10点×2）

(1)　$x^3-3x+1=0$

(2)　$-3x^3+3x^2-x+4=0$

25　不定積分

氏名		得点	/100

1 次の不定積分を求めよ。　(各12点×6)

(1) $\int(-5)\,dx$

(2) $\int(6x-4)\,dx$

(3) $\int(3x^2-4x+2)\,dx$

(4) $\int(x+3)(x-4)\,dx$

(5) $\int(x^2-2)\,dx+\int(x+2)^2dx$

(6) $\int(3t+5)(2t-2)\,dt$

2 次の 2 つの条件をともに満たす関数 $F(t)$ を求めよ。　(14点)

[1]　$F'(t)=6t^2-2t$　　[2]　$F(2)=8$

3 関数 $y=f(x)$ のグラフは点$(3,\ -4)$を通り，このグラフ上の点$(x,\ y)$における接線の傾きは $3x^2-4x$ である。この関数 $f(x)$ を求めよ。　(14点)

26　定積分

氏名		得点	/100

1 次の定積分を求めよ。　（各12点×6）

(1) $\int_{-1}^{4}(x+5)\,dx$

(2) $\int_{0}^{3}(x^2-2x+3)\,dx$

(3) $\int_{1}^{2}(3x^2-6x+1)\,dx$

(4) $\int_{2}^{3}(x+2)(x+4)\,dx$

(5) $\int_{2}^{6}x(x+3)\,dx-\int_{2}^{6}(x-2)(x+4)\,dx$

(6) $\int_{-3}^{0}(x^2-4x+1)\,dx-\int_{3}^{0}(x^2-4x+1)\,dx$

2 等式 $f(x)=3x^2-\int_{0}^{3}f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。　（14点）

3 等式 $\int_{a}^{x}f(t)\,dt=x^2-3x+2$ を満たす関数 $f(x)$ および定数 a の値を求めよ。　（完答14点）

関数＿＿＿＿＿＿　定数＿＿＿＿＿＿

27　面積

氏名		得点	/100

1 次の曲線や直線で囲まれた図形の面積を求めよ。　(各20点×2)

(1)　放物線 $y=x^2+3$，x 軸，$x=-2$，$x=3$

(2)　放物線 $y=x^2-6x+5$，x 軸

2 次の曲線や直線で囲まれた図形の面積を求めよ。　(各20点×2)

(1)　放物線 $y=-x^2+5x$，放物線 $y=x^2-5x+8$

(2)　放物線 $y=-x^2$，直線 $y=x-2$

3 放物線 $y=x^2-5x+4$ $(-1\leqq x\leqq 2)$ と x 軸および 2 直線 $x=-1$，$x=2$ で囲まれた部分の面積を求めよ。　(20点)

1　3次式の展開と因数分解

氏名		得点	/100

1 次の式を展開せよ。　(各12点×4)

(1)　$(x-2)(x^2+2x+4)$

$=(x-2)(x^2+x\cdot 2+2^2)$

$=x^3-2^3$

$=x^3-8$

x^3-8

(2)　$(2x+3)(4x^2-6x+9)$

$=(2x+3)\{(2x)^2-(2x)\cdot 3+3^2\}$

$=(2x)^3+3^3$

$=8x^3+27$

$8x^3+27$

(3)　$(x-3)^3$

$=x^3-3\cdot x^2\cdot 3+3\cdot x\cdot 3^2-3^3$

$=x^3-9x^2+27x-27$

$x^3-9x^2+27x-27$

(4)　$(3x+4y)^3$

$=(3x)^3+3\cdot(3x)^2\cdot 4y+3\cdot 3x\cdot(4y)^2+(4y)^3$

$=27x^3+108x^2y+144xy^2+64y^3$

$27x^3+108x^2y+144xy^2+64y^3$

2 次の式を因数分解せよ。　(各13点×4)

(1)　x^3-64

$=x^3-4^3$

$=(x-4)(x^2+x\cdot 4+4^2)$

$=(x-4)(x^2+4x+16)$

$(x-4)(x^2+4x+16)$

(2)　$8a^3+125b^3$

$=(2a)^3+(5b)^3$

$=(2a+5b)\{(2a)^2-2a\cdot 5b+(5b)^2\}$

$=(2a+5b)(4a^2-10ab+25b^2)$

$(2a+5b)(4a^2-10ab+25b^2)$

(3)　x^6+8

$=(x^2)^3+2^3$

$=(x^2+2)\{(x^2)^2-x^2\cdot 2+2^2\}$

$=(x^2+2)(x^4-2x^2+4)$

$(x^2+2)(x^4-2x^2+4)$

(4)　a^6-64b^6

$=(a^3)^2-(8b^3)^2$

$=(a^3+8b^3)(a^3-8b^3)$

$=(a+2b)\{a^2-a\cdot 2b+(2b)^2\}(a-2b)\{a^2+a\cdot 2b+(2b)^2\}$

$=(a+2b)(a-2b)(a^2-2ab+4b^2)(a^2+2ab+4b^2)$

$(a+2b)(a-2b)(a^2-2ab+4b^2)(a^2+2ab+4b^2)$

2　整式の除法

氏名		得点	/100

1 次の割り算の商と余りを求めよ。（完答各16点×4）

(1)　$(3x^2+5x+4)\div(x+2)$

$$
\begin{array}{r}
3x\ -1 \\
x+2\,\big)\,\overline{3x^2+5x+4} \\
\underline{3x^2+6x} \\
-\ x+4 \\
\underline{-\ x-2} \\
6
\end{array}
$$

商 $3x-1$　余り 6

(2)　$(2a^3-5a^2-5)\div(a-3)$

$$
\begin{array}{r}
2a^2+\ a\ +3 \\
a-3\,\big)\,\overline{2a^3-5a^2-5} \\
\underline{2a^3-6a^2} \\
a^2 \\
\underline{a^2-3a} \\
3a-5 \\
\underline{3a-9} \\
4
\end{array}
$$

商 $2a^2+a+3$　余り 4

(3)　$(3x^3+5x^2-16x+13)\div(x^2+3x-2)$

$$
\begin{array}{r}
3x\ -4 \\
x^2+3x-2\,\big)\,\overline{3x^3+5x^2-16x+13} \\
\underline{3x^3+9x^2-\ 6x} \\
-4x^2-10x+13 \\
\underline{-4x^2-12x+\ 8} \\
2x+\ 5
\end{array}
$$

商 $3x-4$　余り $2x+5$

(4)　$(x^4+2x^3-5x+9)\div(-3+x+x^2)$

$$
\begin{array}{r}
x^2+x+2 \\
x^2+x-3\,\big)\,\overline{x^4+2x^3-5x+\ 9} \\
\underline{x^4+\ x^3-3x^2} \\
x^3+3x^2-5x \\
\underline{x^3+\ x^2-3x} \\
2x^2-2x+\ 9 \\
\underline{2x^2+2x-\ 6} \\
-4x+15
\end{array}
$$

商 x^2+x+2　余り $-4x+15$

2 $A=4x^3+8ax^2-a^2x+2$，$B=2x+a$ を，x についての整式とみて，A を B で割った商と余りを求めよ。（完答16点）

$$
\begin{array}{r}
2x^2+3ax\ -2a^2 \\
2x+a\,\big)\,\overline{4x^3+8ax^2-\ a^2x+2} \\
\underline{4x^3+2ax^2} \\
6ax^2-\ a^2x \\
\underline{6ax^2+3a^2x} \\
-4a^2x+2 \\
\underline{-4a^2x-2a^3} \\
2a^3+2
\end{array}
$$

商 $2x^2+3ax-2a^2$　余り $2a^3+2$

3 次の条件を満たす整式 A，B を求めよ。（各10点×2）

(1)　A を x^2-4 で割ると，商が x^2+2x+4，余りが $x+1$ である。

条件から，次の等式が成り立つ。

$$A=(x^2-4)(x^2+2x+4)+(x+1)$$

よって　$A=x^4+2x^3+4x^2-4x^2-8x-16+x+1$

$=x^4+2x^3-7x-15$

$A=x^4+2x^3-7x-15$

(2)　$4x^3-3x-9$ を B で割ると，商が $2x^2-3x+3$，余りが -18 である。

条件から，次の等式が成り立つ。

$$4x^3-3x-9=B\times(2x^2-3x+3)+(-18)$$

ゆえに　$4x^3-3x+9=B\times(2x^2-3x+3)$

よって　$B=(4x^3-3x+9)\div(2x^2-3x+3)=2x+3$

$B=2x+3$

3　分数式の計算

氏名		得点	/100

1 次の計算をせよ。　(各12点×6)

(1) $\dfrac{3x^2-27}{x^2-3x}\times\dfrac{x}{3x+3}$

$=\dfrac{3(x+3)(x-3)}{x(x-3)}\times\dfrac{x}{3(x+1)}$

$=\dfrac{x+3}{x+1}$

$\dfrac{x+3}{x+1}$

(2) $\dfrac{x^2-x}{x-3}\div\dfrac{x^2+5x}{x^2+2x-15}$

$=\dfrac{x(x-1)}{x-3}\times\dfrac{(x-3)(x+5)}{x(x+5)}$

$=x-1$

$x-1$

(3) $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{x-2}$

$=\dfrac{2(x-2)}{(x+1)(x-2)}+\dfrac{3(x+1)}{(x-2)(x+1)}$

$=\dfrac{2x-4+3x+3}{(x+1)(x-2)}$

$=\dfrac{5x-1}{(x+1)(x-2)}$

$\dfrac{5x-1}{(x+1)(x-2)}$

(4) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x^2-1}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{x-1}{(x+1)(x-1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{x}{(x+1)(x-1)}$

$\dfrac{x}{(x+1)(x-1)}$

(5) $\dfrac{a+8}{a^2+a-2}-\dfrac{a+4}{a^2+3a+2}$

$=\dfrac{a+8}{(a-1)(a+2)}-\dfrac{a+4}{(a+1)(a+2)}$

$=\dfrac{(a+8)(a+1)}{(a-1)(a+2)(a+1)}-\dfrac{(a+4)(a-1)}{(a+1)(a+2)(a-1)}$

$=\dfrac{6(a+2)}{(a+1)(a-1)(a+2)}$

$=\dfrac{6}{(a+1)(a-1)}$

$\dfrac{6}{(a+1)(a-1)}$

(6) $\dfrac{x-4}{x^2+2x}+\dfrac{2x-2}{x^2+6x+8}$

$=\dfrac{x-4}{x(x+2)}+\dfrac{2x-2}{(x+2)(x+4)}$

$=\dfrac{(x-4)(x+4)+x(2x-2)}{x(x+2)(x+4)}$

$=\dfrac{3x^2-2x-16}{x(x+2)(x+4)}$

$=\dfrac{(3x-8)(x+2)}{x(x+2)(x+4)}$

$=\dfrac{3x-8}{x(x+4)}$

$\dfrac{3x-8}{x(x+4)}$

2 次の式を簡単にせよ。　(各14点×2)

(1) $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{x-\dfrac{1}{x}}$

$=\dfrac{\dfrac{x+1}{x}}{\dfrac{x^2-1}{x}}$

$=\dfrac{x+1}{x}\div\dfrac{x^2-1}{x}$

$=\dfrac{x+1}{x}\times\dfrac{x}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{1}{x-1}$

$\dfrac{1}{x-1}$

別解　与式$=\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\times x}{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\times x}$

$=\dfrac{x+1}{x^2-1}$

$=\dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{1}{x-1}$

(2) $\dfrac{x+2}{x-2-\dfrac{6-x}{x}}$

$=\dfrac{x+2}{\dfrac{x^2-2x-(6-x)}{x}}$

$=\dfrac{x+2}{\dfrac{x^2-x-6}{x}}$

$=(x+2)\times\dfrac{x}{(x+2)(x-3)}$

$=\dfrac{x}{x-3}$

$\dfrac{x}{x-3}$

別解　与式$=\dfrac{(x+2)\times x}{\left(x-2-\dfrac{6-x}{x}\right)\times x}$

$=\dfrac{x(x+2)}{x^2-2x-6+x}$

$=\dfrac{x(x+2)}{(x+2)(x-3)}$

$=\dfrac{x}{x-3}$

4　二項定理

氏名		得点	/100

1 次の式を二項定理を用いて展開せよ。　(各12点×2)

(1) $(x-2)^4$

$={}_4C_0x^4+{}_4C_1x^3\cdot(-2)+{}_4C_2x^2\cdot(-2)^2$
$\quad+{}_4C_3x\cdot(-2)^3+{}_4C_4\cdot(-2)^4$
$=x^4-8x^3+24x^2-32x+16$

$x^4-8x^3+24x^2-32x+16$

(2) $(3x+2y)^6$

$={}_6C_0(3x)^6+{}_6C_1(3x)^5(2y)+{}_6C_2(3x)^4(2y)^2$
$\quad+{}_6C_3(3x)^3(2y)^3+{}_6C_4(3x)^2(2y)^4$
$\quad+{}_6C_5(3x)(2y)^5+{}_6C_6(2y)^6$
$=729x^6+2916x^5y+4860x^4y^2+4320x^3y^3+2160x^2y^4$
$\quad+576xy^5+64y^6$

$729x^6+2916x^5y+4860x^4y^2+4320x^3y^3+2160x^2y^4$
$\quad+576xy^5+64y^6$

2 次の式の展開式における，[　　]内の項の係数を求めよ。　(各13点×4)

(1) $(x+3)^4$　$[x^3]$

展開式の一般項は，${}_4C_rx^{4-r}3^r=3^r\cdot{}_4C_rx^{4-r}$
求める係数は $r=1$ のときだから，
$3^1\cdot{}_4C_1=3\cdot4=12$

12

(2) $(3x-y)^5$　$[x^3y^2]$

展開式の一般項は，
${}_5C_r(3x)^{5-r}(-y)^r=3^{5-r}\cdot(-1)^r\cdot{}_5C_rx^{5-r}y^r$
求める係数は $r=2$ のときだから，
$3^{5-2}\cdot(-1)^2\cdot{}_5C_2=27\cdot1\cdot10=270$

270

(3) $(3a-2)^7$　$[a^4]$

展開式の一般項は，
${}_7C_r(3a)^{7-r}(-2)^r=3^{7-r}\cdot(-2)^r\cdot{}_7C_ra^{7-r}$
求める係数は $r=3$ のときだから，
$3^{7-3}\cdot(-2)^3\cdot{}_7C_3=81\cdot(-8)\cdot35=-22680$

-22680

(4) $(2x+y)^9$　$[x^5y^4]$

展開式の一般項は，${}_9C_r(2x)^{9-r}y^r=2^{9-r}{}_9C_rx^{9-r}y^r$
求める係数は $r=4$ のときだから，
$2^{9-4}\cdot{}_9C_4=32\cdot126=4032$

4032

3 次の式の展開式における，[　　]内の項の係数を求めよ。　(各12点×2)

(1) $(a+b+c)^5$　$[a^2b^2c]$

$\{(a+b)+c\}^5$ の展開式で，c を含む項は，
${}_5C_1(a+b)^4c$
$(a+b)^4$ の展開式で，a^2b^2 の係数は ${}_4C_2$ だから，
a^2b^2c の係数は，
${}_5C_1\times{}_4C_2=30$

別解　$\dfrac{5!}{2!2!}=30$

30

(2) $(2x-3y+z)^6$　$[xy^2z^3]$

$\{(2x-3y)+z\}^6$ の展開式で，z^3 を含む項は，
${}_6C_3(2x-3y)^3z^3$
$(2x-3y)^3$ の展開式で，xy^2 の係数は ${}_3C_2\cdot2\cdot(-3)^2$
だから，xy^2z^3 の係数は，
${}_6C_3\times{}_3C_2\cdot2\cdot(-3)^2=1080$

別解　$\dfrac{6!}{2!3!}\cdot2\cdot(-3)^2=1080$

1080

5　恒等式

氏名		得点	/100

1 次の等式が x についての恒等式になるように，定数 a，b，c の値を定めよ。　(完答各16点×2)

(1) $2x^2+ax-a=2x^2+(2b-3)x-3b$

両辺の係数を比較して，$a=2b-3$，$-a=-3b$

これを解いて，　$a=-9$，$b=-3$

$a=-9$，$b=-3$

(2) $x^2+x+4=a(x+1)^2+b(x-1)+c$

等式の右辺を整理すると，$x^2+x+4=ax^2+(2a+b)x+a-b+c$

両辺の係数を比較して，　$1=a$，$1=2a+b$，$4=a-b+c$

これを解いて，　$a=1$，$b=-1$，$c=2$

$a=1$，$b=-1$，$c=2$

2 次の等式が x についての恒等式になるように，定数 a，b，c の値を定めよ。　(完答各17点×2)

(1) $x=ax(x-1)+b(x-1)(x-2)+cx(x-2)$

両辺に $x=0$，1，2 を代入すると，$0=2b$，$1=-c$，$2=2a$

これを解いて，　$a=1$，$b=0$，$c=-1$

逆に，このとき，(右辺)$=x(x-1)-x(x-2)=x=$(左辺) となるから，もとの等式は恒等式である。

よって，　$a=1$，$b=0$，$c=-1$

$a=1$，$b=0$，$c=-1$

(2) $x^2+x+2=a(x-1)(x-2)+b(x-2)(x-3)+c(x-3)(x-1)$

両辺に $x=1$，2，3 を代入すると，$4=2b$，$8=-c$，$14=2a$

これを解いて，　$a=7$，$b=2$，$c=-8$

逆に，このとき，(右辺)$=7(x-1)(x-2)+2(x-2)(x-3)-8(x-3)(x-1)=x^2+x+2=$(左辺)

となるから，もとの等式は恒等式である。

よって，　$a=7$，$b=2$，$c=-8$

$a=7$，$b=2$，$c=-8$

3 次の等式が x についての恒等式になるように，定数 a，b，c の値を定めよ。　(完答各17点×2)

(1) $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}=\dfrac{1}{x(x+1)}$

両辺に $x(x+1)$ をかけると，$a(x+1)+bx=1$

左辺を整理すると，　$(a+b)x+a=1$

両辺の係数を比較して，　$a+b=0$，$a=1$

これを解いて，　$a=1$，$b=-1$

$a=1$，$b=-1$

(2) $\dfrac{x^2-13}{(x-2)(x+1)^2}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{(x+1)^2}+\dfrac{c}{x-2}$

両辺に $(x-2)(x+1)^2$ をかけると，$x^2-13=a(x+1)(x-2)+b(x-2)+c(x+1)^2$

右辺を整理すると，　$x^2-13=(a+c)x^2-(a-b-2c)x-2a-2b+c$

両辺の係数を比較して，　$1=a+c$，$0=-a+b+2c$，$-13=-2a-2b+c$

これを解いて，　$a=2$，$b=4$，$c=-1$

$a=2$，$b=4$，$c=-1$

6　等式の証明

氏名		得点	/100

1 次の等式を証明せよ。　(各16点×2)

(1) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

$(左辺)=a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2$

$=2(a^2+b^2)=(右辺)$

よって，$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

(2) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(b-c)(c-a)(a-b)$

$(右辺)=-(bc-ab-c^2+ca)(a-b)$

$=-(abc-b^2c-a^2b+ab^2-c^2a+bc^2+ca^2-abc)$

$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=(左辺)$

よって，$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(b-c)(c-a)(a-b)$

2 $a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ。　(各17点×2)

(1) $b^2-ca=c^2-ab$

条件より，$c=-a-b$ だから，

$(左辺)=b^2-a(-a-b)=a^2+ab+b^2$

$(右辺)=(-a-b)^2-ab=a^2+ab+b^2$

よって，$b^2-ca=c^2-ab$

別解　$(左辺)-(右辺)=b^2-ca-c^2+ab$

$=(a+b+c)(b-c)$

$a+b+c=0$ だから，$(左辺)-(右辺)=0$

よって，$b^2-ca=c^2-ab$

(2) $\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}=-3$

条件より，$a+b=-c$，$b+c=-a$，$c+a=-b$ だから，

$(左辺)=\dfrac{-a}{a}+\dfrac{-b}{b}+\dfrac{-c}{c}=-1+(-1)+(-1)=-3$

よって，$\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}=-3$

3 次の問いに答えよ。　(各17点×2)

(1) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，等式 $\dfrac{a+3c}{b+3d}=\dfrac{a-3c}{b-3d}$ を証明せよ。

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと，$a=bk$，$c=dk$

$(左辺)=\dfrac{bk+3dk}{b+3d}=\dfrac{k(b+3d)}{b+3d}=k$　　$(右辺)=\dfrac{bk-3dk}{b-3d}=\dfrac{k(b-3d)}{b-3d}=k$

よって，与えられた等式は成り立つ。

(2) $a:b:c=3:4:5$ のとき，$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$ の値を求めよ。

$a:b:c=3:4:5 \iff \dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{4}=\dfrac{c}{5}$　　$\dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{4}=\dfrac{c}{5}=k$ とおくと，$a=3k$，$b=4k$，$c=5k$

$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}=\dfrac{(3k)^2+(4k)^2+(5k)^2}{3k\cdot4k+4k\cdot5k+5k\cdot3k}$

$=\dfrac{50k^2}{47k^2}=\dfrac{50}{47}$

$\dfrac{50}{47}$

7　不等式の証明

氏名		得点	/100

1 次の不等式を証明せよ。　(各14点×2)

(1) $x>y$ のとき，$3x-4y>2x-3y$

$(左辺)-(右辺)=(3x-4y)-(2x-3y)=x-y$

$x>y$ より，$x-y>0$

よって，　$3x-4y>2x-3y$

(2) $x>2$，$y>2$ のとき，$xy>x+y$

$(左辺)-(右辺)=xy-x-y=xy-x-y+1-1$

$=x(y-1)-(y-1)-1=(x-1)(y-1)-1$

$x>2$，$y>2$ より，$x-1>1$，$y-1>1$

よって，　$(x-1)(y-1)-1>0$　　したがって，$xy>x+y$

2 次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つときを調べよ。　(各14点×4)

(1) $x^2+4\geqq 4x$

$(左辺)-(右辺)=x^2+4-4x=(x-2)^2\geqq 0$

よって，$x^2+4\geqq 4x$

等号は，$x-2=0$　すなわち，$x=2$ のとき成り立つ。

(2) $x^2+y^2\geqq 2(x+y-1)$

$(左辺)-(右辺)=x^2+y^2-2x-2y+2=x^2-2x+1+y^2-2y+1$

$=(x-1)^2+(y-1)^2\geqq 0$

よって，$x^2+y^2\geqq 2(x+y-1)$

等号は，$x-1=0$ かつ $y-1=0$　すなわち，$x=1$，$y=1$ のとき成り立つ。

(3) $a>b\geqq 0$ のとき，$2\sqrt{a}+3\sqrt{b}\geqq\sqrt{4a+9b}$

$(左辺)^2-(右辺)^2=(2\sqrt{a}+3\sqrt{b})^2-(\sqrt{4a+9b})^2=4a+12\sqrt{ab}+9b-(4a+9b)=12\sqrt{ab}\geqq 0$

よって，$(2\sqrt{a}+3\sqrt{b})^2\geqq(\sqrt{4a+9b})^2$

$2\sqrt{a}+3\sqrt{b}>0$，$\sqrt{4a+9b}>0$ であるから，$2\sqrt{a}+3\sqrt{b}\geqq\sqrt{4a+9b}$

等号は，$ab=0$　すなわち，$b=0$ のとき成り立つ。

(4) $|a|+|b|\leqq\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$

$(右辺)^2-(左辺)^2=(\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2})^2-(|a|+|b|)^2=2(a^2+b^2)-(a^2+2|ab|+b^2)$

$=a^2-2|ab|+b^2=(|a|-|b|)^2\geqq 0$

よって，$(\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2})^2\geqq(|a|+|b|)^2$

$\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}\geqq 0$，$|a|+|b|\geqq 0$ であるから，$|a|+|b|\leqq\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$

等号は，$|a|-|b|=0$　すなわち，$|a|=|b|$ のとき成り立つ。

3 $x>0$，$y>0$ のとき，不等式 $\left(x+\dfrac{3}{y}\right)\left(y+\dfrac{3}{x}\right)\geqq 12$ を証明せよ。　(16点)

$x>0$，$y>0$ より，$\dfrac{3}{x}>0$，$\dfrac{3}{y}>0$　　相加平均と相乗平均の関係により，$x+\dfrac{3}{y}\geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{3}{y}}$　…①

$y+\dfrac{3}{x}\geqq 2\sqrt{y\cdot\dfrac{3}{x}}$　…②　　①，②の辺々をかけると，$\left(x+\dfrac{3}{y}\right)\left(y+\dfrac{3}{x}\right)\geqq 2\sqrt{\dfrac{3x}{y}}\cdot 2\sqrt{\dfrac{3y}{x}}=12$

よって，$\left(x+\dfrac{3}{y}\right)\left(y+\dfrac{3}{x}\right)\geqq 12$　　等号は，$x=\dfrac{3}{y}$，$y=\dfrac{3}{x}$　すなわち，$xy=3$ のとき成り立つ。

8　複素数と方程式の解

氏名		得点	/100

1 次の計算をせよ。　(各10点×4)

(1) $(-6+4i)+(2-3i)$

$=(-6+2)+(4-3)i$

$=-4+i$

$-4+i$

(2) $(3+i)(2-5i)$

$=6-15i+2i-5i^2$

$=6-13i+5$

$=11-13i$

$11-13i$

(3) $\dfrac{3-2i}{1+3i}=\dfrac{(3-2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}$

$=\dfrac{3-9i-2i+6i^2}{1-9i^2}$

$=\dfrac{3-11i-6}{1+9}$

$=\dfrac{-3-11i}{10}$

$=-\dfrac{3}{10}-\dfrac{11}{10}i$

$-\dfrac{3}{10}-\dfrac{11}{10}i$

$\left(\dfrac{-3-11i}{10}\right)$

(4) $\sqrt{-3}\times\sqrt{-15}$

$=\sqrt{3}\,i\times\sqrt{15}\,i$

$=\sqrt{45}\,i^2$

$=-3\sqrt{5}$

$-3\sqrt{5}$

2 次の問いに答えよ。　(各10点×4)

(1) 次の 2 次方程式を解け。

① $x^2+3x+5=0$

$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-20}}{2\cdot1}$

$=\dfrac{-3\pm\sqrt{-11}}{2}$

$=\dfrac{-3\pm\sqrt{11}\,i}{2}$

$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{11}\,i}{2}$

② $x^2+2\sqrt{3}\,x+6=0$

$x=-\sqrt{3}\pm\sqrt{(\sqrt{3})^2-6}$

$=-\sqrt{3}\pm\sqrt{-3}$

$=-\sqrt{3}\pm\sqrt{3}\,i$

$x=-\sqrt{3}\pm\sqrt{3}\,i$

(2) 2 次方程式 $x^2-(2a+1)x+1=0$ が次のような解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

① 実数解

$x^2-(2a+1)x+1=0$ の判別式を D とすると，

$D=\{-(2a+1)\}^2-4\cdot1\cdot1=4a^2+4a-3$

$=(2a+3)(2a-1)$

実数解をもつ条件は，$D\geqq0$ より，

$(2a+3)(2a-1)\geqq0$

よって，$a\leqq-\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{1}{2}\leqq a$

$a\leqq-\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{1}{2}\leqq a$

② 異なる 2 つの虚数解

異なる 2 つの虚数解をもつ条件は，$D<0$ より，

$(2a+3)(2a-1)<0$

よって，$-\dfrac{3}{2}<a<\dfrac{1}{2}$

$-\dfrac{3}{2}<a<\dfrac{1}{2}$

3 2 次方程式 $x^2-3x+5=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。　(各10点×2)

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$x^2-3x+5=0$ から，$\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=5$

よって，$\alpha^2+\beta^2=3^2-2\cdot5$

$=-1$

-1

(2) $\dfrac{\beta^2}{\alpha}+\dfrac{\alpha^2}{\beta}=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{3^3-3\cdot5\cdot3}{5}$

$=-\dfrac{18}{5}$

$-\dfrac{18}{5}$

9　高次方程式

氏名		得点	/100

1 次の問いに答えよ。　(各10点×3)

(1) 次の整式を，[　　]内の１次式で割ったときの余りを求めよ。

① x^3+5x-3　$[x-1]$

$P(x)=x^3+5x-3$ とおくと，求める余りは，

$P(1)=1^3+5\cdot1-3=3$

3

② $3x^3-2x^2+4$　$[3x-2]$

$P(x)=3x^3-2x^2+4$ とおくと，求める余りは，

$P\left(\frac{2}{3}\right)=3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+4$

$=\frac{8}{9}-\frac{8}{9}+4=4$

4

(2) 次のうち，整式 x^3-2x^2-5x+6 の因数であるものはどれか。

㋐ $x+3$　㋑ $x+2$　㋒ $x-3$　㋓ $x+1$

$P(x)=x^3-2x^2-5x+6$ とする。

㋐ $P(-3)=-24$　㋑ $P(-2)=0$　㋒ $P(3)=0$　㋓ $P(-1)=8$

よって，因数であるものは，㋑，㋒

㋑，㋒

2 次の方程式を解け。　(各12点×4)

(1) $x^3=64$

$x^3-64=0$

$(x-4)(x^2+4x+16)=0$

よって，　$x-4=0$ または $x^2+4x+16=0$

したがって，$x=4,\ -2\pm2\sqrt{3}i$

$x=4,\ -2\pm2\sqrt{3}i$

(2) $x^4-3x^2+2=0$

$x^2=t$ とおくと，$t^2-3t+2=0$

$(t-1)(t-2)=0$

よって，　$(x^2-1)(x^2-2)=0$

ゆえに，　$x^2-1=0$ または $x^2-2=0$

したがって，　$x=\pm1,\ \pm\sqrt{2}$

$x=\pm1,\ \pm\sqrt{2}$

(3) $x^3-x^2-14x+24=0$

$P(x)=x^3-x^2-14x+24$ とおくと，

$P(2)=2^3-2^2-14\cdot2+24=0$

$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつから，

$P(x)=(x-2)(x^2+x-12)$

$=(x-2)(x-3)(x+4)$

$P(x)=0$ より，$(x-2)(x-3)(x+4)=0$

よって，$x=2,\ 3,\ -4$

$x=2,\ 3,\ -4$

(4) $x^3-4x^2-2x+3=0$

$P(x)=x^3-4x^2-2x+3$ とおくと，

$P(-1)=(-1)^3-4\cdot(-1)^2-2\cdot(-1)+3=0$

$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつから，

$P(x)=(x+1)(x^2-5x+3)$

$P(x)=0$ より，$(x+1)(x^2-5x+3)=0$

ゆえに，$x+1=0$ または $x^2-5x+3=0$

よって，$x=-1,\ \frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$

$x=-1,\ \frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$

3 １の３乗根のうち，虚数であるものの１つを ω とするとき，次の式の値を求めよ。　(各11点×2)

(1) $\omega^5+\omega^4+1$

$\omega^3=1$ より，　$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

ω は虚数だから，$\omega^2+\omega+1=0$

よって，$\omega^5+\omega^4+1=\omega^3\cdot\omega^2+\omega^3\cdot\omega+1$

$=\omega^2+\omega+1$

$=0$

0

(2) $\omega^6+\omega^4+\omega^2+1$

$=(\omega^3)^2+\omega^3\cdot\omega+\omega^2+1$

$=1+(\omega^2+\omega+1)$

$=1+0$

$=1$

1

10　点と座標

氏名		得点	/100

1 次の問いに答えよ。　(各11点×3)

(1) 次の2点間の距離を求めよ。

① A(2, 1), B(5, 7)

$AB=\sqrt{(5-2)^2+(7-1)^2}$

$=\sqrt{45}$

$=3\sqrt{5}$

$3\sqrt{5}$

② 原点O, A(7, −2)

$OA=\sqrt{7^2+(-2)^2}$

$=\sqrt{53}$

$\sqrt{53}$

(2) 2点A(2, −1), B(1, 3)から等距離にある直線 $y=-x$ 上の点Pの座標を求めよ。

点Pの座標を $P(t, -t)$ とすると，$AP=BP$ より，$AP^2=BP^2$

よって，　$(t-2)^2+\{-t-(-1)\}^2=(t-1)^2+(-t-3)^2$

整理すると，$10t+5=0$　　$t=-\frac{1}{2}$

点Pの座標は，$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

2 2点A(4, 6), B(5, −1)を結ぶ線分ABについて，次の点の座標を求めよ。　(各11点×4)

(1) 3：2に内分する点

$\left(\frac{2\cdot4+3\cdot5}{3+2}, \frac{2\cdot6+3\cdot(-1)}{3+2}\right)$ より，

$\left(\frac{23}{5}, \frac{9}{5}\right)$

$\left(\frac{23}{5}, \frac{9}{5}\right)$

(2) 2：1に外分する点

$\left(\frac{-1\cdot4+2\cdot5}{2-1}, \frac{-1\cdot6+2\cdot(-1)}{2-1}\right)$ より，

(6, −8)

(6, −8)

(3) 中点

$\left(\frac{4+5}{2}, \frac{6+(-1)}{2}\right)$ より，$\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$

(4) 3：4に外分する点

$\left(\frac{-4\cdot4+3\cdot5}{3-4}, \frac{-4\cdot6+3\cdot(-1)}{3-4}\right)$ より，

(1, 27)

(1, 27)

3 次の問いに答えよ。　((1)12点，(2)11点)

(1) 点A(4, 1)に関して，点P(−8, 3)と対称な点Qの座標を求めよ。

点Qの座標を (x, y) とすると，線分PQの中点がA(4, 1)だから，

$\frac{-8+x}{2}=4$, $\frac{3+y}{2}=1$

これを解いて，$x=16$, $y=-1$

点Qの座標は，(16, −1)

(16, −1)

(2) 3点A(3, 7), B(−2, −3), C(5, 2)を頂点とする△ABCの重心の座標を求めよ。

$\left(\frac{3+(-2)+5}{3}, \frac{7+(-3)+2}{3}\right)$ より，(2, 2)

(2, 2)

11　直線の方程式

氏名		得点	/100

1 次のような直線の方程式を求めよ。　(各10点×3)

(1)　点(4, 2)を通り，傾きが2の直線

$y-2=2(x-4)$　すなわち，$y=2x-6$

$y=2x-6$

(2)　2点(4, 1)，(6, −3)を通る直線

$y-1=\frac{-3-1}{6-4}(x-4)$　すなわち，$y=-2x+9$

$y=-2x+9$

(3)　x切片が3，y切片が−5である直線

$\frac{x}{3}+\frac{y}{-5}=1$　すなわち，$\frac{x}{3}-\frac{y}{5}=1$　$\left(\text{または，}y=\frac{5}{3}x-5\right)$

$\frac{x}{3}-\frac{y}{5}=1$

$\left(y=\frac{5}{3}x-5\right)$

2 次の問いに答えよ。　(各11点×4)

(1)　点(2, 3)を通り，直線$6x+3y-5=0$に平行な直線の方程式を求めよ。

直線$6x+3y-5=0$の傾きは-2だから，平行な直線の方程式は，

$y-3=-2(x-2)$　すなわち，$2x+y-7=0$

$2x+y-7=0$

(2)　点(3, 1)を通り，直線$x-3y-7=0$に垂直な直線の方程式を求めよ。

直線$x-3y-7=0$の傾きは$\frac{1}{3}$　求める直線の傾きをmとすると，$\frac{1}{3}\cdot m=-1$から，$m=-3$

よって，$y-1=-3(x-3)$　すなわち，$3x+y-10=0$

$3x+y-10=0$

(3)　次の点と直線の距離を求めよ。

①　点(3, −2)，直線$2x+y+1=0$

$\frac{|2\cdot3+1\cdot(-2)+1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

$\sqrt{5}$

②　点(−2, 4)，直線$y=3x-5$

$y=3x-5$より，$3x-y-5=0$

$\frac{|3\cdot(-2)+(-1)\cdot4-5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{15}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$　$\frac{3\sqrt{10}}{2}$

3 次の問いに答えよ。　(各13点×2)

(1)　直線$2x+y-1=0$について点A(3, 5)と対称な点Bの座標を求めよ。

直線$2x+y-1=0$をℓ，点Bの座標を(p, q)とする。

[1]　直線ℓの傾きは-2，直線ABの傾きは，$\frac{q-5}{p-3}$　AB⊥ℓより，$-2\cdot\frac{q-5}{p-3}=-1$　よって，$p-2q=-7$　…①

[2]　線分ABの中点$\left(\frac{p+3}{2}, \frac{q+5}{2}\right)$が$\ell$上にあるから，$2\cdot\frac{p+3}{2}+\frac{q+5}{2}-1=0$　よって，$2p+q=-9$　…②

①，②を連立して解くと，$p=-5$，$q=1$　点Bの座標は，(−5, 1)

(−5, 1)

(2)　2直線$x-2y-4=0$，$2x+y-1=0$の交点Aと点(3, −1)を通る直線の方程式を求めよ。

求める直線の方程式は，kを定数として，$(x-2y-4)+k(2x+y-1)=0$　…①と表される。

①が(3, −1)を通るから，$\{3-2\cdot(-1)-4\}+k(2\cdot3-1-1)=0$より，$k=-\frac{1}{4}$

これを①に代入して整理すると，$2x-9y-15=0$

$2x-9y-15=0$

12　円の方程式

氏名		得点	/100

1 次の問いに答えよ。　(各12点×3)

(1) 中心が(3, 4)，半径が 2 の円の方程式を求めよ。

$(x-3)^2+(y-4)^2=2^2$

すなわち，$(x-3)^2+(y-4)^2=4$　　$(x-3)^2+(y-4)^2=4$

(2) 2 点A(6, 3)，B(−2, 5)を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

求める円の中心は線分 AB の中点だから，$\left(\frac{6+(-2)}{2},\ \frac{3+5}{2}\right)$ より，(2, 4)

半径を r とすると，$r=\frac{1}{2}\mathrm{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(-2-6)^2+(5-3)^2}=\sqrt{17}$　　よって，$(x-2)^2+(y-4)^2=(\sqrt{17})^2$

すなわち，$(x-2)^2+(y-4)^2=17$　　$(x-2)^2+(y-4)^2=17$

(3) 3 点A(1, 5)，B(2, 0)，C(−1, 2)を通る円の方程式を求めよ。

求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおくと，3 点 A(1, 5)，B(2, 0)，C(−1, 2)を通るから，

$l+5m+n+26=0$ …①　　$2l+n+4=0$ …②　　$-l+2m+n+5=0$ …③

①−② から，$-l+5m+22=0$ …④　　①−③ から，$2l+3m+21=0$ …⑤

④，⑤から，$l=-3$，$m=-5$　　これを②に代入して，$n=2$　　$x^2+y^2-3x-5y+2=0$

よって，$x^2+y^2-3x-5y+2=0$

2 次の問いに答えよ。　(各12点×3)

(1) 円 $x^2+y^2=10$ と直線 $y=-x+4$ の共有点の座標を求めよ。

$x^2+y^2=10$ …①　　$y=-x+4$ …②　　②を①に代入して，$x^2+(-x+4)^2=10$　　$x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$ から，$x=1,\ 3$

これを②に代入して，$x=1$ のとき，$y=3$　　$x=3$ のとき，$y=1$

共有点の座標は，(1, 3)，(3, 1)　　(1, 3)，(3, 1)

(2) 円 $x^2+y^2=9$ と直線 $y=2x+k$ が異なる 2 点で交わるとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

(中心(0, 0)と直線 $2x-y+k=0$ の距離)＜半径　であればよいから，

$\frac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}<3$　　よって，$|k|<3\sqrt{5}$　　したがって，$-3\sqrt{5}<k<3\sqrt{5}$

$-3\sqrt{5}<k<3\sqrt{5}$

(3) 円 $x^2+y^2=20$ 上の点P(−2, 4)における接線の方程式を求めよ。

$-2\cdot x+4\cdot y=20$　すなわち，$x-2y+10=0$

$x-2y+10=0$

$\left(y=\frac{1}{2}x+5\right)$

3 次の問いに答えよ。　(各14点×2)

(1) 円 $x^2+y^2=4$ と円 $(x-3)^2+y^2=9$ の位置関係を調べよ。

$x^2+y^2=4$ …①　　$(x-3)^2+y^2=9$ …②　　①の中心は原点，半径は 2　　②の中心は(3, 0)，半径は 3

中心間の距離は 3　　$3-2<3<3+2$ だから，2 円は 2 点で交わる。

2 点で交わる

(2) 中心が点(2, 3)で，円 $x^2+y^2=52$ に内接する円の方程式を求めよ。

円 $x^2+y^2=52$ の中心は原点，半径は，$\sqrt{52}=2\sqrt{13}$　　2 円の中心間の距離は，$\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

求める円の半径を r とすると，$2\sqrt{13}-r=\sqrt{13}$　　$r=\sqrt{13}$

よって，$(x-2)^2+(y-3)^2=13$　　$(x-2)^2+(y-3)^2=13$

13　軌跡と領域

氏名		得点	/100

1 次の問いに答えよ。　(各12点×3)

(1)　2点A$(-2,\ 0)$，B$(0,\ 3)$から等距離にある点Pの軌跡を求めよ。

点Pの座標を$(x,\ y)$とする。条件より，AP＝BP だから，$AP^2=BP^2$

よって，$\{x-(-2)\}^2+y^2=x^2+(y-3)^2$　整理すると，$4x+6y-5=0$

したがって，点Pの軌跡は，直線 $4x+6y-5=0$

直線 $4x+6y-5=0$

(2)　2点A$(-1,\ 0)$，B$(3,\ 0)$からの距離の比が1：3である点Pの軌跡を求めよ。

点Pの座標を$(x,\ y)$とする。条件より，AP：BP＝1：3，3AP＝BP から，$9AP^2=BP^2$

よって，$9\{(x+1)^2+y^2\}=(x-3)^2+y^2$　整理すると，$x^2+3x+y^2=0$　すなわち，$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}$

点Pの軌跡は，中心が点$\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$，半径が$\frac{3}{2}$の円

中心が点$\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$，半径が$\frac{3}{2}$の円

(3)　点Qが円 $x^2+y^2=4$ 上を動くとき，点A$(6,\ 0)$と点Qを結ぶ線分AQの中点Pの軌跡を求めよ。

点P，Qの座標をそれぞれ$(x,\ y)$，$(s,\ t)$とする。Qは円 $x^2+y^2=4$ 上にあるから，$s^2+t^2=4$　…①

Pは線分AQの中点だから，$x=\frac{6+s}{2}$，$y=\frac{0+t}{2}$　すなわち，$s=2x-6$，$t=2y$　これを①に代入して，

$(2x-6)^2+(2y)^2=4$　整理すると，$x^2-6x+y^2+8=0$　すなわち，$(x-3)^2+y^2=1$

点Pの軌跡は，中心が点$(3,\ 0)$，半径が1の円

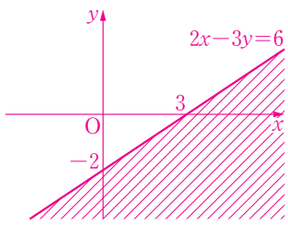
中心が点$(3,\ 0)$，半径が1の円

2 次の不等式の表す領域を図示せよ。　(各13点×4)

(1)　$2x-3y\geqq 6$

図の斜線部分。

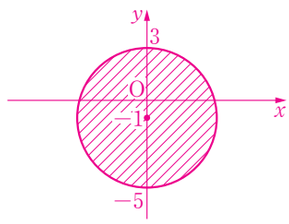
ただし，境界線を含む。



(2)　$x^2+(y+1)^2<16$

図の斜線部分。

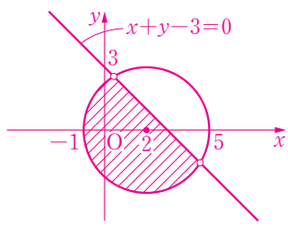
ただし，境界線を含まない。



(3)　$\begin{cases}(x-2)^2+y^2\leqq 9\\ x+y-3<0\end{cases}$

図の斜線部分。

ただし，境界線は円周を含み，直線および直線と円周の交点を含まない。



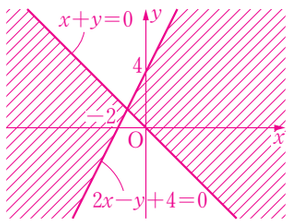
(4)　$(x+y)(2x-y+4)>0$

次の連立不等式①または②の表す領域と同値である。

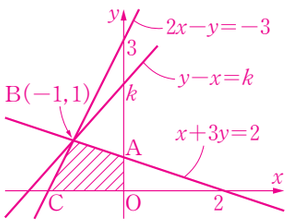
①$\begin{cases}x+y>0\\ 2x-y+4>0\end{cases}$　②$\begin{cases}x+y<0\\ 2x-y+4<0\end{cases}$

求める領域は，図の斜線部分。

ただし，境界線を含まない。



3 x，y が4つの不等式 $x\leqq 0$，$y\geqq 0$，$x+3y\leqq 2$，$2x-y\geqq -3$ を同時に満たすとき，$y-x$ の最大値，最小値を求めよ。　(完答12点)



条件を満たす領域は，図の四角形OABCの周および内部。

$y-x=k$　…① とおくと，図より，k が最大となるのは，

①がB$(-1,\ 1)$を通るときで，このとき，$k=1-(-1)=2$

最小となるのは，①がO$(0,\ 0)$を通るときで，このとき，$k=0$

最大値2$(x=-1,\ y=1)$，最小値0$(x=0,\ y=0)$

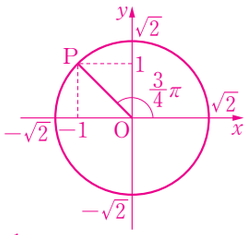
14　三角関数

氏名		得点	/100

1　θ が次の角のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。$\sin\theta=\frac{y}{r}$，$\cos\theta=\frac{x}{r}$，$\tan\theta=\frac{y}{x}$　（完答各12点×2）

(1)　$\frac{3}{4}\pi$

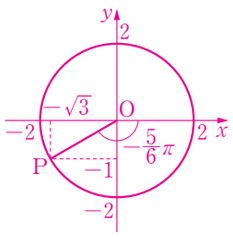
図の半径 $r=\sqrt{2}$ の円で，
点Pの座標は，
$(x,\ y)=(-1,\ 1)$



$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\tan\theta=-1$

(2)　$-\frac{5}{6}\pi$

図の半径 $r=2$ の円で，
点Pの座標は，
$(x,\ y)=(-\sqrt{3},\ -1)$

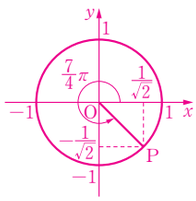


$\sin\theta=-\frac{1}{2}$，$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$

2　単位円を利用して，次の値を求めよ。　（(1)(2)各12点×2，(3)13点）

(1)　$\sin\frac{7}{4}\pi$

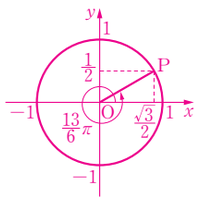
図の単位円で，
点Pの座標は，
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$\sin\frac{7}{4}\pi=-\frac{1}{\sqrt{2}}$



$-\frac{1}{\sqrt{2}}$

(2)　$\cos\frac{13}{6}\pi$

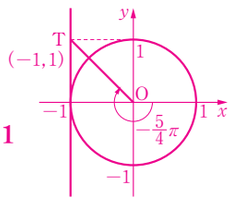
図の単位円で，
点Pの座標は，
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$
$\cos\frac{13}{6}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$



$\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3)　$\tan\left(-\frac{5}{4}\pi\right)$

図の単位円で，
点Tの座標は，
$(-1,\ 1)$
$\tan\left(-\frac{5}{4}\pi\right)=-1$



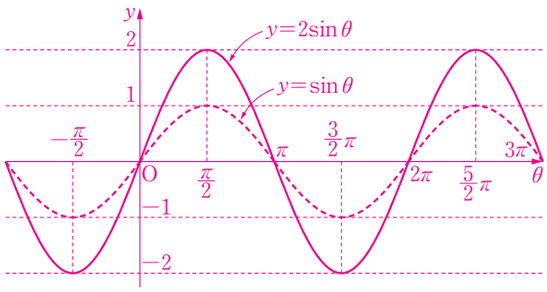
-1

3　次のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。　（完答各13点×3）

(1)　$y=2\sin\theta$

$y=\sin\theta$ のグラフを y 軸方向に 2 倍に
拡大したもの。

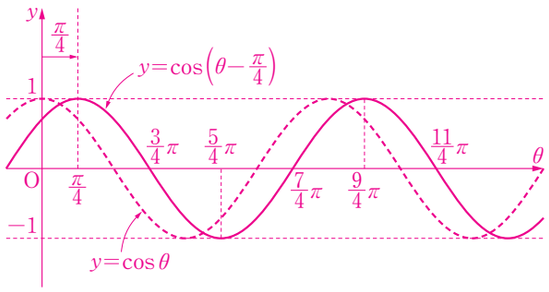
周期　2π



(2)　$y=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

$y=\cos\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{\pi}{4}$ だけ
平行移動したもの。

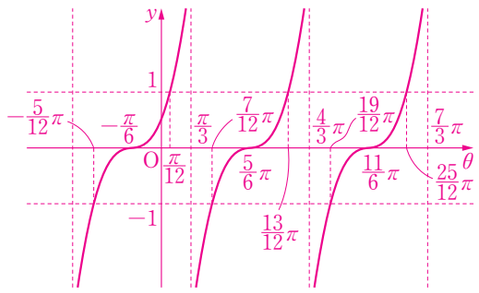
周期　2π



(3)　$y=\tan\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$

$y=\tan\theta$ のグラフを θ 軸方向に $-\frac{\pi}{6}$ だけ
平行移動したもの。

周期　π



15　三角関数の性質

氏名		得点	/100

1 次の問いに答えよ。　((1)完答各11点×3)

(1)　θ が第 2 象限の角で，$\cos\theta=-\frac{3}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$　θ は第 2 象限の角だから，$\sin\theta>0$　よって，$\sin\theta=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$

また，$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{4}{5}\div\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{4}{3}$

$\sin\theta$ $\frac{4}{5}$　$\tan\theta$ $-\frac{4}{3}$

(2)　$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ。

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}$ の両辺を 2 乗すると，$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{2}{9}$

よって，$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{2}{9}$　したがって，$\sin\theta\cos\theta=-\frac{7}{18}$

$-\frac{7}{18}$

(3)　等式 $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{2}{\sin\theta}$ を証明せよ。

$(\text{左辺})=\frac{\sin^2\theta+(1+\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)\sin\theta}=\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+1+2\cos\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta}=\frac{2+2\cos\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$

$=\frac{2(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)\sin\theta}=\frac{2}{\sin\theta}=(\text{右辺})$　よって，$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{2}{\sin\theta}$

2 次の値を求めよ。　(各11点×3)

(1)　$\sin\frac{10}{3}\pi=\sin\left(\frac{4}{3}\pi+2\pi\right)$

$=\sin\frac{4}{3}\pi$

$=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)$

$=-\sin\frac{\pi}{3}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　$\cos\frac{11}{6}\pi=\cos\left(\frac{5}{6}\pi+\pi\right)$

$=-\cos\frac{5}{6}\pi$

$=-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$　　$\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3)　$\tan\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=-\tan\frac{3}{4}\pi$

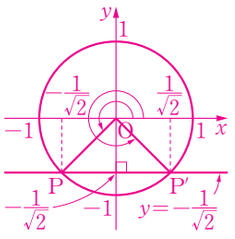
$=-\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)$

$=\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4}}$

$=1$　　1

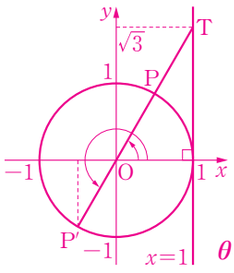
3 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。　((1)(2)各11点×2，(3)12点)

(1)　$\sqrt{2}\sin\theta=-1$　図の単位円で，動径OP，OP′の表す角が求める θ だから，$\theta=\frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$



$\theta=\frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

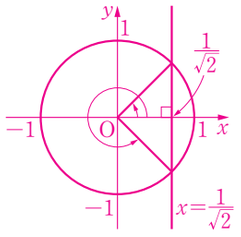
(2)　$\tan\theta=\sqrt{3}$　図の単位円で，動径OP，OP′の表す角が求める θ だから，$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$



$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$

(3)　$\cos\theta>\frac{\sqrt{2}}{2}$　$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ となる θ は，$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi$

よって，解は，$0\leqq\theta<\frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi<\theta<2\pi$



$0\leqq\theta<\frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi<\theta<2\pi$

16　加法定理

氏名		得点	/100

1 加法定理を用いて，次の値を求めよ。　(各11点×4)

(1) $\sin 75^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ)$

$=\sin 30^\circ\cos 45^\circ+\cos 30^\circ\sin 45^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

$=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

(2) $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)$

$=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(3) $\cos 105^\circ=\cos(60^\circ+45^\circ)$

$=\cos 60^\circ\cos 45^\circ-\sin 60^\circ\sin 45^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

$=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

(4) $\tan 15^\circ=\tan(45^\circ-30^\circ)$

$=\frac{\tan 45^\circ-\tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$

$=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

$=2-\sqrt{3}$

$2-\sqrt{3}$

2 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ で $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$ で $\sin\beta=\frac{5}{13}$ とするとき，次の値を求めよ。　(各11点×3)

(1) $\sin(\alpha+\beta)$　(2) $\cos(\alpha-\beta)$　(3) $\tan(\alpha+\beta)$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ だから，$\sin\alpha>0$　$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$　$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{3}$

$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$ だから，$\cos\beta<0$　$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=-\frac{12}{13}$　$\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=-\frac{5}{12}$

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)+\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}=-\frac{33}{65}$

(2) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}=-\frac{16}{65}$

(3) $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{4}{3}+\left(-\frac{5}{12}\right)}{1-\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{5}{12}\right)}=\frac{33}{56}$

$-\frac{33}{65}$　$-\frac{16}{65}$　$\frac{33}{56}$

3 次の 2 直線のなす角 θ を求めよ。ただし，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。　((1)11点，(2)12点)

(1) $2x-y+1=0$，　$3x+y-2=0$

$y=2x+1$　…①　$y=-3x+2$　…②　が x 軸の正の向きとなす角を，それぞれ α，β とすると，

$\tan\alpha=2$，$\tan\beta=-3$

直線①，②は互いに垂直でないから，

$\tan\theta=\left|\frac{2-(-3)}{1+2\cdot(-3)}\right|=\left|\frac{5}{-5}\right|=1$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より，$\theta=\frac{\pi}{4}$

$\theta=\frac{\pi}{4}$

(2) $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}$，$y=-3\sqrt{3}x-1$

$\tan\theta=\left|\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-(-3\sqrt{3})}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-3\sqrt{3})}\right|=\sqrt{3}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より，$\theta=\frac{\pi}{3}$

$\theta=\frac{\pi}{3}$

17　加法定理の応用

氏名		得点	/100

1 次の問いに答えよ。　(各 8 点×7)

(1) $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\sin\alpha=\frac{1}{3}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ だから，$\cos\alpha<0$

ゆえに，$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

① $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)$

$=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

$-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

② $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

$=1-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$=\frac{7}{9}$

$\frac{7}{9}$

③ $\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

$=-\frac{4\sqrt{2}}{7}$

$-\frac{4\sqrt{2}}{7}$

(2) 半角の公式を用いて，次の値を求めよ。

① $\sin\frac{3}{8}\pi$　$\sin^2\frac{3}{8}\pi=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{3}{4}\pi\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$　$\sin\frac{3}{8}\pi>0$

より，$\sin\frac{3}{8}\pi=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

② $\cos\frac{\pi}{12}$　$\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{6}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$　$\cos\frac{\pi}{12}>0$

より，$\cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$　$\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$

③ $\tan\frac{5}{12}\pi$　$\tan^2\frac{5}{12}\pi=\frac{1-\cos\frac{5}{6}\pi}{1+\cos\frac{5}{6}\pi}$

$=\frac{1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=(2+\sqrt{3})^2$　$\tan\frac{5}{12}\pi>0$

より，$\tan\frac{5}{12}\pi=2+\sqrt{3}$　$2+\sqrt{3}$

(3) $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，方程式 $\sin 2\theta+\cos\theta=0$ を解け。

$\sin 2\theta+\cos\theta=2\sin\theta\cos\theta+\cos\theta=\cos\theta(2\sin\theta+1)=0$　　$\cos\theta=0$ または $2\sin\theta+1=0$

$0\leqq\theta<2\pi$ より，$\cos\theta=0$ から，$\theta=\frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{2}\pi$

$2\sin\theta+1=0$　すなわち，$\sin\theta=-\frac{1}{2}$ から，$\theta=\frac{7}{6}\pi$，$\frac{11}{6}\pi$

$\theta=\frac{\pi}{2}$，$\frac{7}{6}\pi$，$\frac{3}{2}\pi$，$\frac{11}{6}\pi$

2 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。　((1) 8 点，(2) 9 点)

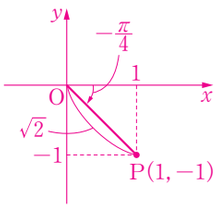
(1) $\sin\theta-\cos\theta$

点 $P(1,\ -1)$ とすると，

$OP=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

動径 OP の表す角は $-\frac{\pi}{4}$

与式 $=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$



$\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

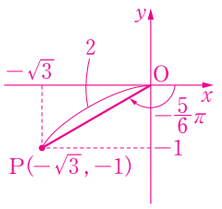
(2) $-\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta$

点 $P(-\sqrt{3},\ -1)$ とすると，

$OP=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$

動径 OP の表す角は $-\frac{5}{6}\pi$

与式 $=2\sin\left(\theta-\frac{5}{6}\pi\right)$



$2\sin\left(\theta-\frac{5}{6}\pi\right)$

3 次の式の値を求めよ。　(各 9 点×3)

(1) $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{3}{8}\pi$　　(2) $\sin\frac{11}{12}\pi+\sin\frac{5}{12}\pi$　　(3) $\cos\frac{7}{12}\pi-\cos\frac{\pi}{12}$

(1) $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{3}{8}\pi=\frac{1}{2}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{3}{8}\pi\right)+\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{3}{8}\pi\right)\right\}=\frac{1}{2}\left\{\sin\frac{\pi}{2}+\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

(2) $\sin\frac{11}{12}\pi+\sin\frac{5}{12}\pi=2\sin\frac{\frac{11}{12}\pi+\frac{5}{12}\pi}{2}\cos\frac{\frac{11}{12}\pi-\frac{5}{12}\pi}{2}=2\sin\frac{2}{3}\pi\cos\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

(3) $\cos\frac{7}{12}\pi-\cos\frac{\pi}{12}=-2\sin\frac{\frac{7}{12}\pi+\frac{\pi}{12}}{2}\sin\frac{\frac{7}{12}\pi-\frac{\pi}{12}}{2}=-2\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\frac{2-\sqrt{2}}{4}$　　$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　$-\frac{\sqrt{6}}{2}$

18　指数の拡張

氏名		得点	/100

1 次の値を求めよ。　(各6点×4)

(1)　-27 の3乗根

$(-3)^3=-27$ だから，

$\sqrt[3]{-27}=-3$

-3

(2)　625の4乗根

$5^4=625$，$(-5)^4=625$ だから，$\sqrt[4]{625}=\pm5$

±5

(3)　$\sqrt[3]{-64}$

$=\sqrt[3]{(-4)^3}$

$=-4$

-4

(4)　$\sqrt[5]{243}$

$=\sqrt[5]{3^5}$

$=3$

3

2 次の計算をせよ。ただし，$a\neq0$，$b\neq0$ とする。　(各6点×6)

(1)　$(-5)^{-3}$

$=\dfrac{1}{(-5)^3}$

$=\dfrac{1}{-125}$

$=-\dfrac{1}{125}$

$-\dfrac{1}{125}$

(2)　a^4a^{-2}

$=a^{+4-2}$

$=a^2$

a^2

(3)　$(a^{-1}b^2)^{-5}$

$=a^{(-1)\times(-5)}b^{2\times(-5)}$

$=a^5b^{-10}$

$=\dfrac{a^5}{b^{10}}$

$\dfrac{a^5}{b^{10}}$　(a^5b^{-10})

(4)　$\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{8}$

$=\sqrt[3]{3^3}\times\sqrt[3]{2^3}$

$=3\times2$

$=6$

6

(5)　$\dfrac{\sqrt[4]{96}}{\sqrt[4]{6}}$

$=\sqrt[4]{\dfrac{96}{6}}$

$=\sqrt[4]{16}$

$=\sqrt[4]{2^4}$

$=2$

2

(6)　$\sqrt[3]{\sqrt{729}}$

$=\sqrt[3\times2]{729}$

$=\sqrt[6]{3^6}$

$=3$

3

3 次の計算をせよ。ただし，$a\neq0$ とする。　((1)(2)各6点×2，(3)〜(6)各7点×4)

(1)　$64^{\frac{2}{3}}$

$=(2^6)^{\frac{2}{3}}$

$=2^{6\times\frac{2}{3}}$

$=2^4$

$=16$

16

(2)　$81^{-\frac{3}{4}}$

$=(3^4)^{-\frac{3}{4}}$

$=3^{4\times\left(-\frac{3}{4}\right)}$

$=3^{-3}$

$=\dfrac{1}{27}$

$\dfrac{1}{27}$

(3)　$5^{\frac{5}{6}}\div5^{\frac{1}{2}}\times5^{-\frac{1}{3}}$

$=5^{\frac{5}{6}-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{3}\right)}$

$=5^0$

$=1$

1

(4)　$\sqrt[4]{6}\times\sqrt{6}\times\sqrt[8]{36}$

$=6^{\frac{1}{4}}\times6^{\frac{1}{2}}\times(6^2)^{\frac{1}{8}}$

$=6^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$

$=6^1$

$=6$

6

(5)　$\left\{\left(\dfrac{27}{64}\right)^{\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{4}{9}}=\left(\dfrac{27}{64}\right)^{\frac{3}{4}\times\frac{4}{9}}$

$=\left(\dfrac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$

$=\sqrt[3]{\left(\dfrac{3}{4}\right)^3}$

$=\dfrac{3}{4}$

$\dfrac{3}{4}$

(6)　$a^{-3}\div a^2\times(a^4)^{-2}$

$=a^{-3}\div a^2\times a^{-8}$

$=a^{-3-2+(-8)}$

$=a^{-13}$

$=\dfrac{1}{a^{13}}$

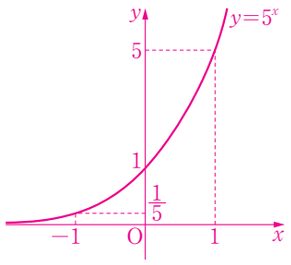
$\dfrac{1}{a^{13}}$　(a^{-13})

19　指数関数

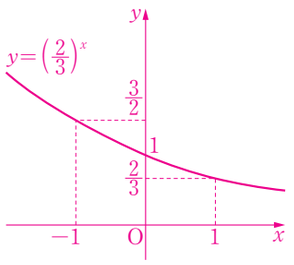
氏名		得点	/100

1 次の関数のグラフをかけ。　（各11点×4）

(1)　$y=5^x$

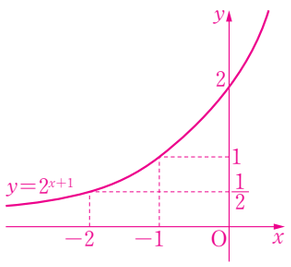


(2)　$y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$



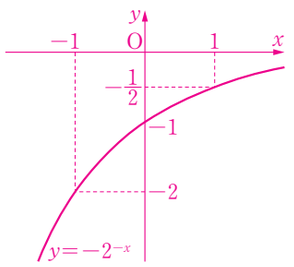
(3)　$y=2^{x+1}$

$y=2^{x+1}$ のグラフは，$y=2^x$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したもの。



(4)　$y=-2^{-x}$

$y=-2^{-x}$ のグラフは，$y=2^x$ のグラフを原点に関して対称移動したもの。



2 次の方程式，不等式を解け。　（各11点×4）

(1)　$4^{3x-1}=16$

方程式を変形すると，
$(2^2)^{3x-1}=2^4$ より，$2^{6x-2}=2^4$
$6x-2=4$ から，　$x=1$

$x=1$

(2)　$4^x-3\cdot2^x+2=0$

方程式を変形すると，$(2^x)^2-3\cdot2^x+2=0$
$2^x=t$ とおくと，$t^2-3t+2=0$　　$(t-2)(t-1)=0$
$t=1,\ 2$　　よって，$2^x=1,\ 2$
したがって，$x=0,\ 1$

$x=0,\ 1$

(3)　$5^x>125$

不等式を変形すると，　$5^x>5^3$
底 5 は 1 より大きいから，$x>3$

$x>3$

(4)　$\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1}<\frac{1}{8}$

不等式を変形すると，　$\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1}<\left(\frac{1}{2}\right)^3$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから，$-x+1>3$
したがって，$x<-2$

$x<-2$

3 関数 $y=-4^x+2^{x+1}$ $(-1\leqq x\leqq 2)$ の最大値，最小値を求めよ。　（完答12点）

$2^x=t$ とおくと，$y=-(2^x)^2+2\cdot2^x=-t^2+2t=-(t-1)^2+1$

$-1\leqq x\leqq 2$ のとき，$\frac{1}{2}\leqq t\leqq 4$　…①　　①の範囲で，y は，$t=1$　すなわち，$x=0$ のとき最大値 1

$t=4$　すなわち，$x=2$ のとき最小値 -8

最大値 1（$x=0$），最小値 -8（$x=2$）

20　対数とその性質

氏名		得点	/100

1 次の問いに答えよ。　(各 8 点×7)

(1) 次の①，②は $\log_a M=p$ の形に，③，④は $a^p=M$ の形に表せ。

① $5^3=125$

$a^p=M \iff \log_a M=p$

$\log_5 125=3$

② $10^{-3}=\dfrac{1}{1000}$

$\log_{10}\dfrac{1}{1000}=-3$

③ $\log_2 32=5$

$\log_a M=p \iff a^p=M$

$2^5=32$

④ $\log_3\dfrac{1}{9}=-2$

$3^{-2}=\dfrac{1}{9}$

(2) 次の値を求めよ。

① $\log_3 27$

$=\log_3 3^3$

$=3$

3

② $\log_2\sqrt{2}$

$=\log_2 2^{\frac{1}{2}}$

$=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{2}$

③ $\log_{\frac{1}{2}} 8$

$\log_{\frac{1}{2}} 8=p$ とおくと，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^p=8$

すなわち，$2^{-p}=2^3$

$-p=3$ から，$p=-3$

-3

2 次の式を計算せよ。　(各 8 点×3)

(1) $\log_4 2+\log_4 8$

$=\log_4(2\times 8)$

$=\log_4 16$

$=\log_4 4^2$

$=2$

2

(2) $\log_7 98-\log_7 2$

$=\log_7\dfrac{98}{2}$

$=\log_7 49$

$=\log_7 7^2$

$=2$

2

(3) $\dfrac{1}{2}\log_5 10-\log_5\sqrt{2}$

$=\log_5 10^{\frac{1}{2}}-\log_5\sqrt{2}$

$=\log_5\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$

$=\log_5\sqrt{5}$

$=\log_5 5^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{2}$

3 次の式を簡単にせよ。　(各10点×2)

(1) $\log_{27} 9$

$=\dfrac{\log_3 9}{\log_3 27}$

$=\dfrac{\log_3 3^2}{\log_3 3^3}$

$=\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{2}{3}$

(2) $\log_2 3\cdot\log_9 4$

$=\log_2 3\cdot\dfrac{\log_2 4}{\log_2 9}$

$=\log_2 3\cdot\dfrac{\log_2 2^2}{\log_2 3^2}$

$=\log_2 3\cdot\dfrac{2\log_2 2}{2\log_2 3}$

$=\dfrac{2}{2}=1$

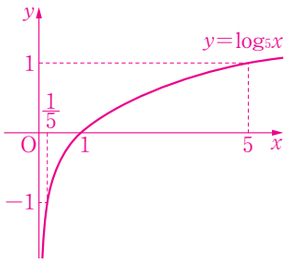
1

21　対数関数

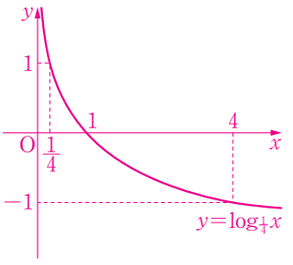
氏名		得点	/100

1 次の関数のグラフをかけ。　（各11点×4）

(1)　$y=\log_5 x$

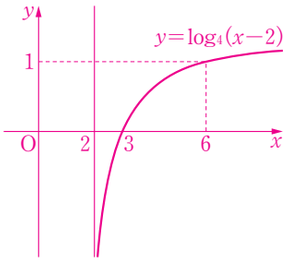


(2)　$y=\log_{\frac{1}{4}} x$



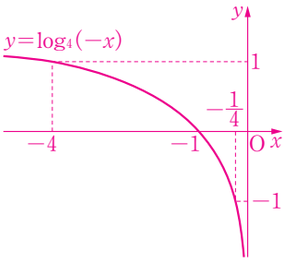
(3)　$y=\log_4(x-2)$

$y=\log_4(x-2)$ のグラフは，$y=\log_4 x$ のグラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動したもの。



(4)　$y=\log_4(-x)$

$y=\log_4(-x)$ のグラフは，$y=\log_4 x$ のグラフを y 軸に関して対称移動したもの。



2 次の方程式，不等式を解け。　（各11点×4）

(1)　$\log_4 x=3$

対数の定義から，$x=4^3$

よって，　$x=64$

$x=64$

(2)　$\log_3(x-1)+\log_3(x+5)=3$　…①

真数条件より，$x-1>0$ かつ $x+5>0$

すなわち，$x>1$　…②

①より，$\log_3(x-1)(x+5)=3$

$(x-1)(x+5)=3^3$　　$x^2+4x-32=0$

$(x+8)(x-4)=0$　　②より，$x=4$　　$x=4$

(3)　$\log_4(x+3)>2$　…①

真数条件より，$x>-3$　…②

①より，$\log_4(x+3)>\log_4 16$

底 4 は 1 より大きいから，$x+3>16$

よって，$x>13$　…③

②，③より，$x>13$

$x>13$

(4)　$\log_3 x+\log_3(x-6)<3$　…①

真数条件より，$x>0$ かつ $x-6>0$

すなわち，$x>6$　…②　　①より，$\log_3 x(x-6)<\log_3 3^3$

底 3 は 1 より大きいから，$x(x-6)<27$

$x^2-6x-27<0$　　$(x-9)(x+3)<0$　　$-3<x<9$　…③

②，③より，$6<x<9$

$6<x<9$

3 関数 $y=\log_4(x-1)$ $(2\leqq x\leqq 5)$ の最大値，最小値を求めよ。　（完答12点）

底 4 は 1 より大きいから，y が最大値，最小値をとるとき，真数もそれぞれ最大値，最小値をとる。

$x=2$ のとき $y=\log_4(2-1)=0$　　$x=5$ のとき，$y=\log_4(5-1)=1$

y は，$x=5$ のとき最大値 1

$x=2$ のとき最小値 0

最大値 1（$x=5$），最小値 0（$x=2$）

22　常用対数

氏名		得点	/100

1 $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ として，次の値を求めよ。(4)は小数第 5 位を四捨五入して答えよ。（各12点×4）

(1) $\log_{10}12$

$=\log_{10}(4\times3)$

$=\log_{10}4+\log_{10}3$

$=\log_{10}2^2+\log_{10}3$

$=2\log_{10}2+\log_{10}3$

$=2\times0.3010+0.4771$

$=1.0791$

1.0791

(2) $\log_{10}\frac{8}{9}$

$=\log_{10}8-\log_{10}9$

$=\log_{10}2^3-\log_{10}3^2$

$=3\log_{10}2-2\log_{10}3$

$=3\times0.3010-2\times0.4771$

$=-0.0512$

-0.0512

(3) $\log_{10}15$

$=\log_{10}(5\times3)$

$=\log_{10}5+\log_{10}3$

$=\log_{10}\frac{10}{2}+\log_{10}3$

$=\log_{10}10-\log_{10}2+\log_{10}3$

$=1-0.3010+0.4771$

$=1.1761$

1.1761

(4) $\log_8 3$

$=\frac{\log_{10}3}{\log_{10}8}$

$=\frac{\log_{10}3}{\log_{10}2^3}$

$=\frac{\log_{10}3}{3\log_{10}2}$

$=\frac{0.4771}{3\times0.3010}$

$=0.52834\cdots\cdots\fallingdotseq0.5283$

0.5283

2 次の数は何桁の整数か。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。（各13点×2）

(1) 3^{100}

$\log_{10}3^{100}=100\log_{10}3$

$=100\times0.4771$

$=47.71$

ゆえに，$47<\log_{10}3^{100}<48$

3^{100} は48桁の整数である。

48桁

(2) 6^{40}

$\log_{10}6^{40}=40\log_{10}(2\times3)$

$=40(\log_{10}2+\log_{10}3)$

$=40(0.3010+0.4771)$

$=31.124$

ゆえに，$31<\log_{10}6^{40}<32$

6^{40} は32桁の整数である。

32桁

3 次の数を小数で表すと，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。（各13点×2）

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{30}$

$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{30}=\log_{10}2^{-30}=-30\log_{10}2$

$=-30\times0.3010=-9.03$

ゆえに，$-10<\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{30}<-9$

よって，$10^{-10}<\left(\frac{1}{2}\right)^{30}<10^{-9}$

小数第10位に初めて 0 でない数字が現れる。

小数第10位

(2) $\left(\frac{1}{18}\right)^{70}$

$\log_{10}\left(\frac{1}{18}\right)^{70}=\log_{10}18^{-70}=-70\log_{10}(2\times3^2)$

$=-70(\log_{10}2+\log_{10}3^2)$

$=-70(0.3010+2\times0.4771)=-87.864$

ゆえに，$-88<\log_{10}\left(\frac{1}{18}\right)^{70}<-87$

よって，$10^{-88}<\left(\frac{1}{18}\right)^{70}<10^{-87}$

小数第88位に初めて 0 でない数字が現れる。

小数第88位

23　微分係数と導関数

氏名		得点	/100

1 次の問いに答えよ。　(各11点×3)

(1) 関数 $y=-2x^2$ の $x=2$ から $x=2+h$ までの平均変化率を求めよ。

$$\frac{-2(2+h)^2-(-2\cdot 2^2)}{(2+h)-2}=\frac{-2h^2-8h}{h}=-2h-8$$

$-2h-8$

(2) 極限値 $\lim_{h\to 0}(3+2h+h^2)$ を求めよ。

$$\lim_{h\to 0}(3+2h+h^2)=3$$

3

(3) 関数 $f(x)=3x^2$ について，$x=-1$ における微分係数を求めよ。

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3(-1+h)^2-3(-1)^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-6h+3h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(-6+3h)=-6$$

-6

2 次の問いに答えよ。　(各11点×4)

(1) 定義に従って，次の関数の導関数を求めよ。

① $f(x)=2x$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)-2x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}2=2$$

2

② $f(x)=4x^2$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{4(x+h)^2-4x^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{8xh+4h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(8x+4h)=8x$$

$8x$

(2) 次の関数を微分せよ。

① $y=5x^2-3x+4$

$$y'=5(x^2)'-3(x)'+(4)'$$

$$=5\cdot 2x-3+0$$

$$=10x-3$$

$y'=10x-3$

② $y=(2x^2+1)(x-3)$

$$y=2x^3-6x^2+x-3$$

よって，$y'=2(x^3)'-6(x^2)'+(x)'-(3)'$

$$=2\cdot 3x^2-6\cdot 2x+1-0$$

$$=6x^2-12x+1$$

$y'=6x^2-12x+1$

3 次の問いに答えよ。　((1)11点，(2)完答12点)

(1) 関数 $y=2x^2+3x-1$ のグラフ上の点A(1，4)における接線の方程式を求めよ。

$f(x)=2x^2+3x-1$ とすると，$f'(x)=4x+3$ より，$f'(1)=4\cdot 1+3=7$

よって，点(1，4)における接線の方程式は，$y-4=7(x-1)$

すなわち，$y=7x-3$

$y=7x-3$

(2) 関数 $y=x^3-5x$ について，傾きが -2 の接線の方程式とその接点の座標を求めよ。

$f(x)=x^3-5x$ とすると，$f'(x)=3x^2-5$

接点の座標を $(t,\ t^3-5t)$ とすると，$f'(t)=-2$ より，$3t^2-5=-2$　これを解くと，$t=\pm 1$

$f(1)=-4$，$f(-1)=4$ であるから，接点の座標は，(1，-4)，(-1，4)

$t=1$ のとき，$y=-2x-2$

$t=-1$ のとき，$y=-2x+2$

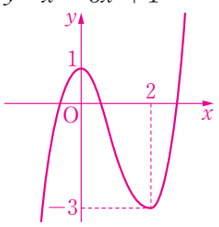
$y=-2x-2$，(1，-4)　$y=-2x+2$，(-1，4)

24　関数の極大・極小

氏名		得点	/100

1 次の関数の増減を調べ，極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。　（増減，極値，グラフ（完答），各10点×6）

(1)　$y=x^3-3x^2+1$



$y'=3x^2-6x=3x(x-2)$

$y'=0$ とすると，$x=0,\ 2$

y の増減表は右のようになる。

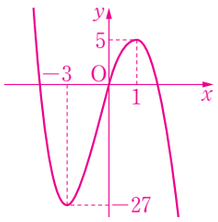
y は $x=0$ で極大値 1，$x=2$ で極小値 -3 をとる。

グラフは図のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 1	↘	極小 -3	↗

極大値 1（$x=0$），極小値 -3（$x=2$）

(2)　$y=-x^3-3x^2+9x$



$y'=-3x^2-6x+9=-3(x+3)(x-1)$

$y'=0$ とすると，$x=-3,\ 1$

y の増減表は右のようになる。

y は $x=-3$ で極小値 -27，$x=1$ で極大値 5 をとる。

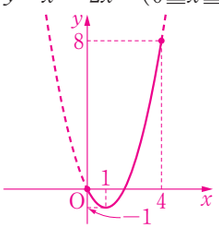
グラフは図のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 -27	↗	極大 5	↘

極大値 5（$x=1$），極小値 -27（$x=-3$）

2 次の関数の最大値，最小値を求めよ。　（完答各10点×2）

(1)　$y=x^2-2x$　$(0\leqq x\leqq 4)$



$y'=2x-2=2(x-1)$

$y'=0$ とすると，$x=1$

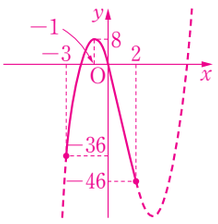
y の増減表は右のようになる。

y は $x=4$ で最大値 8，$x=1$ で最小値 -1 をとる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4
y'		$-$	0	$+$	
y	0	↘	極小 -1	↗	8

最大値 8（$x=4$），最小値 -1（$x=1$）

(2)　$y=x^3-6x^2-15x$　$(-3\leqq x\leqq 2)$



$y'=3x^2-12x-15=3(x-5)(x+1)$

$y'=0$ とすると，$x=-1,\ 5$

y の増減表は右のようになる。

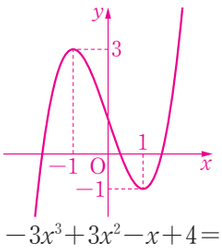
y は $x=-1$ で最大値 8，$x=2$ で最小値 -46 をとる。

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	
y	-36	↗	極大 8	↘	-46

最大値 8（$x=-1$），最小値 -46（$x=2$）

3 次の 3 次方程式の異なる実数解の個数を求めよ。　（各10点×2）

(1)　$x^3-3x+1=0$



$y=x^3-3x+1$ とおくと，$y'=3(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると，$x=-1,\ 1$

y の増減表は右のようになる。

グラフと x 軸は異なる 3 点で交わるから，

異なる実数解は 3 個。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 3	↘	極小 -1	↗

3 個

(2)　$-3x^3+3x^2-x+4=0$

$y=-3x^3+3x^2-x+4$ とおくと，$y'=-9x^2+6x-1=-(3x-1)^2\leqq 0$

y はつねに減少し，グラフと x 軸は 1 点で交わる。よって，実数解は 1 個。

1 個

25　不定積分

氏名		得点	/100

1 次の不定積分を求めよ。C は積分定数とする。　(各12点×6)

(1) $\int(-5)\,dx$

$=-5x+C$

$-5x+C$

(2) $\int(6x-4)\,dx$

$=6\cdot\frac{1}{2}x^2-4x+C$

$=3x^2-4x+C$

$3x^2-4x+C$

(3) $\int(3x^2-4x+2)\,dx$

$=3\cdot\frac{1}{3}x^3-4\cdot\frac{1}{2}x^2+2x+C$

$=x^3-2x^2+2x+C$

x^3-2x^2+2x+C

(4) $\int(x+3)(x-4)\,dx$

$=\int(x^2-x-12)\,dx$

$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-12x+C$

$\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-12x+C$

(5) $\int(x^2-2)\,dx+\int(x+2)^2dx$

$=\int\{(x^2-2)+(x+2)^2\}dx$

$=\int(2x^2+4x+2)\,dx$

$=\frac{2}{3}x^3+2x^2+2x+C$

$\frac{2}{3}x^3+2x^2+2x+C$

(6) $\int(3t+5)(2t-2)\,dt$

$=\int(6t^2+4t-10)\,dt$

$=2t^3+2t^2-10t+C$

$2t^3+2t^2-10t+C$

2 次の 2 つの条件をともに満たす関数 $F(t)$ を求めよ。　(14点)

[1]　$F'(t)=6t^2-2t$　　[2]　$F(2)=8$

[1]から，　$F(t)=\int(6t^2-2t)\,dt=2t^3-t^2+C$　(C は積分定数)

よって，　$F(2)=2\cdot2^3-2^2+C=12+C$

[2]から，$12+C=8$ であり，$C=-4$

したがって，$F(t)=2t^3-t^2-4$

$F(t)=2t^3-t^2-4$

3 関数 $y=f(x)$ のグラフは点$(3,\ -4)$を通り，このグラフ上の点$(x,\ y)$における接線の傾きは $3x^2-4x$ である。この関数 $f(x)$ を求めよ。　(14点)

$f'(x)=3x^2-4x$ より，$f(x)=\int(3x^2-4x)\,dx=x^3-2x^2+C$　(C は積分定数)

よって，$f(3)=3^3-2\cdot3^2+C=9+C$

$f(3)=-4$ から，$9+C=-4$

よって，$C=-13$

したがって，$f(x)=x^3-2x^2-13$

$f(x)=x^3-2x^2-13$

26　定積分

氏名		得点	/100

1 次の定積分を求めよ。　（各12点×6）

(1) $\int_{-1}^{4}(x+5)\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2+5x\right]_{-1}^{4}$

$=\left(\frac{1}{2}\cdot4^2+5\cdot4\right)-\left\{\frac{1}{2}\cdot(-1)^2+5\cdot(-1)\right\}$

$=\frac{65}{2}$

$\frac{65}{2}$

(2) $\int_{0}^{3}(x^2-2x+3)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{0}^{3}$

$=\frac{1}{3}\cdot3^3-3^2+3\cdot3$

$=9$

9

(3) $\int_{1}^{2}(3x^2-6x+1)\,dx$

$=\left[x^3-3x^2+x\right]_{1}^{2}$

$=(2^3-3\cdot2^2+2)-(1^3-3\cdot1^2+1)$

$=-1$

-1

(4) $\int_{2}^{3}(x+2)(x+4)\,dx$

$=\int_{2}^{3}(x^2+6x+8)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+3x^2+8x\right]_{2}^{3}$

$=\left(\frac{1}{3}\cdot3^3+3\cdot3^2+8\cdot3\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot2^3+3\cdot2^2+8\cdot2\right)$

$=\frac{88}{3}$

$\frac{88}{3}$

(5) $\int_{2}^{6}x(x+3)\,dx-\int_{2}^{6}(x-2)(x+4)\,dx$

$=\int_{2}^{6}\{x(x+3)-(x-2)(x+4)\}\,dx$

$=\int_{2}^{6}(x+8)\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2+8x\right]_{2}^{6}$

$=\left(\frac{1}{2}\cdot6^2+8\cdot6\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot2^2+8\cdot2\right)$

$=48$

48

(6) $\int_{-3}^{0}(x^2-4x+1)\,dx-\int_{3}^{0}(x^2-4x+1)\,dx$

$=\int_{-3}^{0}(x^2-4x+1)\,dx-\left\{-\int_{0}^{3}(x^2-4x+1)\,dx\right\}$

$=\int_{-3}^{3}(x^2-4x+1)\,dx=2\int_{0}^{3}(x^2+1)\,dx$

$=2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{3}$

$=2\left(\frac{1}{3}\cdot3^3+3\right)=24$

24

2 等式 $f(x)=3x^2-\int_{0}^{3}f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。　（14点）

$a=\int_{0}^{3}f(t)\,dt$ とすると，$f(x)=3x^2-a$

よって，$\int_{0}^{3}f(t)\,dt=\int_{0}^{3}(3t^2-a)\,dt=\left[t^3-at\right]_{0}^{3}=27-3a$

$a=27-3a$ から，$a=\frac{27}{4}$　　したがって，$f(x)=3x^2-\frac{27}{4}$

$f(x)=3x^2-\frac{27}{4}$

3 等式 $\int_{a}^{x}f(t)\,dt=x^2-3x+2$ を満たす関数 $f(x)$ および定数 a の値を求めよ。　（完答14点）

等式の両辺を x で微分すると，$f(x)=2x-3$

与えられた等式で $x=a$ とおくと，左辺は 0 となるから，

$0=a^2-3a+2$　　これを解いて，$a=1,\ 2$

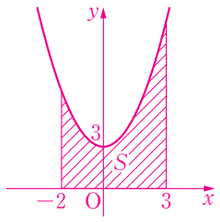
関数 $f(x)=2x-3$　　定数 $a=1,\ 2$

27　面積

氏名		得点	/100

1 次の曲線や直線で囲まれた図形の面積を求めよ。　(各20点×2)

(1)　放物線 $y=x^2+3$，x 軸，$x=-2$，$x=3$



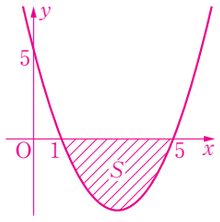
$-2\leqq x\leqq 3$ では $y>0$ だから，求める面積 S は，

$$S=\int_{-2}^{3}(x^2+3)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3+3x\right]_{-2}^{3}$$

$$=\left(\frac{1}{3}\cdot 3^3+3\cdot 3\right)-\left\{\frac{1}{3}\cdot(-2)^3+3\cdot(-2)\right\}=\frac{80}{3}$$

$\frac{80}{3}$

(2)　放物線 $y=x^2-6x+5$，x 軸



放物線と x 軸の交点の x 座標は，$x^2-6x+5=0$ より，$x=1,\ 5$

$1\leqq x\leqq 5$ では $y\leqq 0$ だから，求める面積 S は，

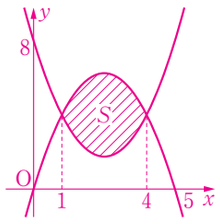
$$S=\int_{1}^{5}\{-(x^2-6x+5)\}\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2-5x\right]_{1}^{5}$$

$$=\left(-\frac{1}{3}\cdot 5^3+3\cdot 5^2-5\cdot 5\right)-\left(-\frac{1}{3}\cdot 1^3+3\cdot 1^2-5\cdot 1\right)=\frac{32}{3}$$

$\frac{32}{3}$

2 次の曲線や直線で囲まれた図形の面積を求めよ。　(各20点×2)

(1)　放物線 $y=-x^2+5x$，放物線 $y=x^2-5x+8$



方程式 $-x^2+5x=x^2-5x+8$ を解くと，$x^2-5x+4=0$ より，$x=1,\ 4$

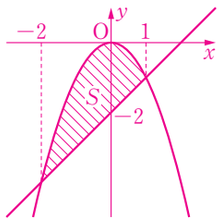
図から，求める面積 S は，

$$S=\int_{1}^{4}\{(-x^2+5x)-(x^2-5x+8)\}\,dx=\int_{1}^{4}(-2x^2+10x-8)\,dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+5x^2-8x\right]_{1}^{4}=9$$

9

(2)　放物線 $y=-x^2$，直線 $y=x-2$



方程式 $-x^2=x-2$ を解くと，$x^2+x-2=0$ より，$x=-2,\ 1$

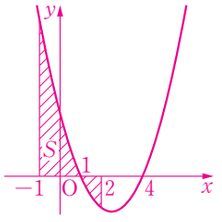
図から，求める面積 S は，

$$S=\int_{-2}^{1}\{(-x^2)-(x-2)\}\,dx=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}=\frac{9}{2}$$

$\frac{9}{2}$

3 放物線 $y=x^2-5x+4$ $(-1\leqq x\leqq 2)$ と x 軸および 2 直線 $x=-1$，$x=2$ で囲まれた部分の面積を求めよ。　(20点)



放物線と x 軸の交点の x 座標は，$x^2-5x+4=0$ より，$x=1,\ 4$

$-1\leqq x\leqq 1$ では $y\geqq 0$，$1\leqq x\leqq 2$ では $y\leqq 0$

求める面積 S は，

$$S=\int_{-1}^{1}(x^2-5x+4)\,dx+\int_{1}^{2}\{-(x^2-5x+4)\}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+4x\right]_{-1}^{1}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-4x\right]_{1}^{2}=\frac{59}{6}$$

$\frac{59}{6}$