1　等差数列

氏名		得点	／100

1 次のような等差数列について，初めの 5 項，一般項，第10項をそれぞれ求めよ。（各 6 点×6）

(1) 初項 5，公差 2

初めの 5 項________　一般項________　第10項________

(2) 初項 8，公差 -3

初めの 5 項________　一般項________　第10項________

2 次の問いに答えよ。（各 6 点×4）

(1) 第 3 項が 7，第 8 項が 32 である等差数列 $\{a_n\}$ の初項と公差を求めよ。また，一般項 a_n を求めよ。

初項________　公差________　一般項________

(2) 数列 9，x，$-x$，…… が等差数列であるとき，x の値を求めよ。

____

3 次の和を求めよ。（各10点×4）

(1) 初項 4，末項 31，項数 10 の等差数列の和

____

(2) 初項 3，公差 7 の等差数列の初項から第 n 項までの和

____

(3) $1+2+3+\cdots\cdots+30$

____

(4) $1+3+5+\cdots\cdots+39$

____

# 2　等比数列	氏名		得点	/100

1 次のような等比数列について，初めの 5 項と一般項をそれぞれ求めよ。（各10点×4）

(1) 初項 5，公比 2

初めの 5 項＿＿＿＿＿＿＿＿　一般項＿＿＿＿＿＿＿＿

(2) 初項 6，公比 $-\frac{1}{3}$

初めの 5 項＿＿＿＿＿＿＿＿　一般項＿＿＿＿＿＿＿＿

2 次の問いに答えよ。（各 6 点×4）

(1) 第 3 項が18，第 6 項が486である等比数列 $\{a_n\}$ の初項と公比を求めよ。また，一般項 a_n を求めよ。

初項＿＿＿＿＿＿＿＿　公比＿＿＿＿＿＿＿＿　一般項＿＿＿＿＿＿＿＿

(2) 数列 5，x，$\frac{80}{9}$，…… が等比数列であるとき，x の値を求めよ。

＿＿＿＿＿＿＿＿

3 次の和を求めよ。（各12点×3）

(1) 初項 3，公比 -2，項数 6 の等比数列の和

＿＿＿＿＿＿＿＿

(2) 初項 7，公比 1，項数 8 の等比数列の和

＿＿＿＿＿＿＿＿

(3) 等比数列 1，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4^2}$，$\frac{1}{4^3}$，…… の初項から第 n 項までの和

＿＿＿＿＿＿＿＿

3　いろいろな数列

氏名		得点	/100

1 次の和を求めよ。 （各12点×6）

(1) $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+15^2$

(2) $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+10^3$

(3) $\sum_{k=1}^{20} 5$

(4) $\sum_{k=1}^{n} 3^k$

(5) $\sum_{k=1}^{n} (2k-3)$

(6) $\sum_{k=1}^{n} k(3k-4)$

2 階差数列を利用して，次の数列の一般項 a_n を求めよ。 （14点）

2,　3,　10,　23,　42,　67,　……

3 初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=n^2-4n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 （14点）

# 4　漸化式	氏名		得点	/100

1 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の第 2 項から第 5 項を求めよ。（各12点×2）

(1) $a_1=2,\ a_{n+1}=4a_n-5$

(2) $a_1=1,\ a_{n+1}=3a_n+n$

2 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。（各12点×4）

(1) $a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+4$

(2) $a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n$

(3) $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+4n-1$

(4) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+(-2)^n$

3 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。（各14点×2）

(1) $a_1=2,\ a_{n+1}=4a_n-3$

(2) $a_1=0,\ a_2=1,\ a_{n+2}-8a_{n+1}+15a_n=0$

5　数学的帰納法

氏名		得点	/100

1 n が自然数のとき，次の等式(A)が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明する。

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}\quad \cdots(\mathrm{A})$$

下の下線部を補い，(続き)を書いて証明を完成せよ。　（各15点×4）

〔証明〕

[1]　$n=1$ のとき，

______________________________　よって，$n=1$ のとき(A)は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，(A)が成り立つ，すなわち，

______________________________　…①　が成り立つと仮定する。

①の両辺に________________を加えると

(続き)

これは，(A)において $n=k+1$ のときであるから，$n=k+1$ のときも(A)は成り立つ。

[1]，[2]より，すべての自然数 n について，(A)は成り立つ。

2 n が2以上の自然数のとき，次の不等式(A)が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明する。

$$3^n>4n\quad \cdots(\mathrm{A})$$

下の下線部を補い，(続き)を書いて証明を完成せよ。　（各10点×4）

〔証明〕

[1]　$n=2$ のとき，

______________________________　よって，$n=2$ のとき(A)は成り立つ。

[2]　$n\geqq 2$ として，$n=k$ のとき，(A)が成り立つ，すなわち，

________________　…①　が成り立つと仮定する。

①の両辺に______________をかけると

(続き)

これは，(A)において $n=k+1$ のときであるから，$n=k+1$ のときも(A)は成り立つ。

[1]，[2]より，2以上の自然数 n について，(A)は成り立つ。

6　確率変数の期待値と分散

氏名		得点	/100

1 次の変数 X の確率分布を求めよ。 (各 8 点×2)

(1)　6 枚のカード $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ の中から 1 枚を抜き出し，そのカードの数字を X とする。

(2)　2 枚の100円硬貨を同時に投げるとき，表の出た硬貨の金額の和を X とする。

2 確率変数 X が次の確率分布に従うとき，X の期待値，分散，標準偏差をそれぞれ求めよ。 (各 7 点×6)

(1)

X	0	2	4	計
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	1

期待値＿＿＿＿＿＿　分散＿＿＿＿＿＿　標準偏差＿＿＿＿＿＿

(2)

X	0	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$	1

期待値＿＿＿＿＿＿　分散＿＿＿＿＿＿　標準偏差＿＿＿＿＿＿

3 5 枚のカード $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ の中から同時に 2 枚を抜き出し，それらのカードの数字の和を X とする。次の問いに答えよ。 (各 7 点×6)

(1)　X の確率分布を求めよ。

(2)　確率変数 X の期待値，分散を求めよ。

期待値＿＿＿＿＿＿　分散＿＿＿＿＿＿

(3)　$Y=5X-3$ とする。確率変数 Y の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

期待値＿＿＿＿＿＿　分散＿＿＿＿＿＿　標準偏差＿＿＿＿＿＿

7　確率変数の和と積

氏名		得点	/100

1 確率変数 X，Y の確率分布が次の表で与えられているとき，$X+Y$，$4X+3Y$ の期待値をそれぞれ求めよ。

（各11点×2）

X	1	2	計
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

Y	1	2	計
P	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$X+Y$ の期待値＿＿＿＿＿＿　$4X+3Y$ の期待値＿＿＿＿＿＿

2 次の問いに答えよ。（各12点×2）

(1)　1個のさいころを2回投げるとき，出た目の数の積の期待値を求めよ。

＿＿＿＿＿＿

(2)　3つの確率変数 X，Y，Z が互いに独立で，確率分布がいずれも次の表で与えられるとき，XYZ の期待値を求めよ。

変数	1	2	計
確率	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

＿＿＿＿＿＿

3 袋の中に1，2，3，4を1つずつ書いた4個の同じ大きさの玉が入っている。この袋の中から1個の玉を取り出し，その数字を調べてからもとの袋に戻す試行を行う。次の問いに答えよ。（各9点×6）

(1)　この試行を1回行うとき，取り出した玉の数字の期待値，分散を求めよ。

期待値＿＿＿＿＿＿　分散＿＿＿＿＿＿

(2)　この試行を2回続けて行うとき，1回目，2回目に取り出した玉の数字をそれぞれ X，Y とする。

①　$X+Y$ の分散，標準偏差を求めよ。

分散＿＿＿＿＿＿　標準偏差＿＿＿＿＿＿

②　$4X-2Y$ の分散，標準偏差を求めよ。

分散＿＿＿＿＿＿　標準偏差＿＿＿＿＿＿

# 8　二項分布	氏名		得点	/100

1 次の問いに答えよ。（各８点×4）

(1)　１枚の硬貨を５回投げて，表の出る回数を X とする。

①　X はどのような二項分布に従うか。$B(n,\ p)$ の形に表せ。

②　確率 $P(X=2)$ を求めよ。

(2)　１個のさいころを４回投げて，１または６の目が出る回数を X とする。

①　X はどのような二項分布に従うか。$B(n,\ p)$ の形に表せ。

②　確率 $P(X \geqq 3)$ を求めよ。

2 確率変数 X が次の二項分布に従うとき，X の期待値，分散，標準偏差を求めよ。（各６点×6）

(1)　$B\left(8,\ \dfrac{2}{9}\right)$

期待値＿＿＿＿　分散＿＿＿＿　標準偏差＿＿＿＿

(2)　$B\left(20,\ \dfrac{3}{8}\right)$

期待値＿＿＿＿　分散＿＿＿＿　標準偏差＿＿＿＿

3 次の問いに答えよ。（各８点×4）

(1)　２枚の硬貨を同時に投げ，硬貨の表，裏を記録する。この試行を60回くり返すとき，２枚とも表が出る回数を X とする。X の期待値，標準偏差を求めよ。

期待値＿＿＿＿　標準偏差＿＿＿＿

(2)　赤玉３個と白玉２個が入っている袋から同時に２個の玉を取り出し，色を調べてから袋にもどす。この試行を50回くり返すとき，取り出した２個の玉が同じ色である回数を X とする。X の期待値，標準偏差を求めよ。

期待値＿＿＿＿　標準偏差＿＿＿＿

9　正規分布

氏名		得点	/100

※1～3では，正規分布表を用いてもよい。

1 確率変数Zが標準正規分布$N(0,\ 1)$に従うとき，次の確率を求めよ。 （各10点×6）

(1) $P(0 \leqq Z \leqq 1.35)$

(2) $P(-0.92 \leqq Z \leqq 0)$

(3) $P(Z \geqq 1.5)$

(4) $P(Z \leqq 0.7)$

(5) $P(-1.6 \leqq Z \leqq 0.8)$

(6) $P(0.45 \leqq Z \leqq 2)$

2 次の問いに答えよ。 （各10点×3）

(1) 確率変数Xが正規分布$N(10,\ 4^2)$に従うとき，確率$P(8 \leqq X \leqq 13)$を求めよ。

(2) 確率変数Xが正規分布$N(60,\ 10^2)$に従うとき，確率$P(X \geqq 72)$を求めよ。

(3) 17歳男子の身長が，平均170cm，標準偏差5cmの正規分布に従うものとする。17歳男子の中で，身長が168cm以上173cm以下の人は約何％いるか。

3 赤玉1個と白玉3個が入った袋から1個の玉を取り出し，色を調べてから袋に戻す。この試行を1200回くり返すとき，赤玉が取り出される回数が285回以下である確率を求めよ。 （10点）

10　母集団と標本

氏名		得点	/100

※母平均を m で表す。

1　0と書かれたカードが5枚，1と書かれたカードが4枚，2と書かれたカードが3枚，3と書かれたカードが2枚，4と書かれたカードが1枚ある。この15枚のカードを母集団，カードの数字を変量とするとき，母集団分布，母平均，母標準偏差を求めよ。（各8点×3）

母集団分布＿＿＿＿＿＿　母平均＿＿＿＿＿＿　母標準偏差＿＿＿＿＿＿

2　次の問いに答えよ。（各10点×6）

(1)　3枚のカード $\boxed{1}$，$\boxed{3}$，$\boxed{5}$ を母集団，カードの数字を変量とする。

①　母集団分布，母平均を求めよ。

母集団分布＿＿＿＿＿＿　母平均＿＿＿＿＿＿

②　この母集団から大きさ2の無作為標本を復元抽出するとき，標本平均 $\overline{X}$ の確率分布，期待値を求めよ。

確率分布＿＿＿＿＿＿　期待値＿＿＿＿＿＿

(2)　母平均60，母標準偏差8の十分大きい母集団から，大きさ25の無作為標本を抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ の期待値と標準偏差を求めよ。

期待値＿＿＿＿＿＿　標準偏差＿＿＿＿＿＿

3　母平均170，母標準偏差20の母集団から，大きさ100の無作為標本を抽出する。次の問いに答えよ。（各8点×2）

(1)　標本平均 $\overline{X}$ は，近似的にどのような正規分布に従うとみなせるか。

＿＿＿＿＿＿

(2)　標本平均 $\overline{X}$ が175より大きい値をとる確率を求めよ。ただし，正規分布表を用いてもよい。

＿＿＿＿＿＿

11　推定

氏名		得点	/100

1 次の問いに答えよ。 (各25点×2)

(1) ある県の男子高校生の中から900人を無作為に選んで調べたところ，握力の平均が43.2kgであった。
母標準偏差を7.5kgとして，この県の男子高校生の平均握力 m に対する信頼度95%の信頼区間を求めよ。

(2) 大量に生産されたある製品から，100個を無作為に抽出して長さを測ったところ，平均値は273.6mm，標準偏差は6.1mmであった。この製品の長さの平均値 m を信頼度95%で推定せよ。

2 ある検定試験の得点の母標準偏差は15点であるという。その母平均 m を信頼度95%で推定するとき，信頼区間の幅を2.8点以下にするには，標本の大きさ n を少なくともいくらにすればよいか。 (25点)

3 ある都市で，有権者から無作為に抽出した600人についてＡ政党の支持者を調べたら240人いた。この都市におけるＡ政党の支持率 p を，信頼度95%で推定せよ。 (25点)

12　経済と数学

氏名		得点	/100

1 年利率 1.5%の複利法で，毎年の初めにいくらかずつ積立貯金をする。15 年間で 200 万貯めるには，毎年何円ずつ貯金すればよいか求めよ。ただし，$1.015^{15}=1.25$ とする。

(30 点)

2 300 万円の自動車を購入して，月利率（1 カ月あたりの利率）0.5%で 60 回の均等払いで毎月返済するとき，毎月の返済額はいくらか。ただし，$1.005^{60}=1.35$ とする。

(30 点)

3 A 社は，次の表の P～S 社のいずれかの会社と業務提携を検討している。

	ブランド	品質	価格	販売力
P 社	8	9	8	9
Q 社	7	10	7	8
R 社	9	8	9	10
S 社	10	8	7	8

各項目に関して，ブランドに 10，品質に 8，価格に 5，販売力 4 の重要度(重み)をつけて，総合的に評価をして，業務提携をするのに最も適切な会社を選べ。

(40 点)

1　等差数列

氏名		得点	/100

1 次のような等差数列について，初めの５項，一般項，第10項をそれぞれ求めよ。（各６点×6）

(1) 初項５，公差２

$5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ \cdots\cdots$ （$+2$　$+2$　$+2$　$+2$）

$a_n=5+(n-1)\cdot 2=2n+3$

$a_{10}=2\cdot 10+3=23$

初めの５項　$5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13$　一般項　$2n+3$　第10項　23

(2) 初項８，公差 -3

$8,\ 5,\ 2,\ -1,\ -4,\ \cdots\cdots$ （-3　-3　-3　-3）

$a_n=8+(n-1)\cdot(-3)=-3n+11$

$a_{10}=-3\cdot 10+11=-19$

初めの５項　$8,\ 5,\ 2,\ -1,\ -4$　一般項　$-3n+11$　第10項　-19

2 次の問いに答えよ。（各６点×4）

(1) 第３項が７，第８項が32である等差数列 $\{a_n\}$ の初項と公差を求めよ。また，一般項 a_n を求めよ。

初項を a，公差を d とすると，$a_n=a+(n-1)d$

$a_3=7$ より，$a+2d=7$　…①　$a_8=32$ より，$a+7d=32$　…②

①，②を解くと，$a=-3,\ d=5$

また，$a_n=-3+(n-1)\cdot 5$

$=5n-8$

初項　-3　公差　5　一般項　$a_n=5n-8$

(2) 数列 $9,\ x,\ -x,\ \cdots\cdots$ が等差数列であるとき，x の値を求めよ。

$2x=9+(-x)$　$\longleftarrow$ 数列 $a,\ b,\ c$ が等差数列 $\Longleftrightarrow 2b=a+c$

これを解いて，$x=3$

$x=3$

3 次の和を求めよ。（各10点×4）

(1) 初項４，末項31，項数10の等差数列の和

$S_{10}=\dfrac{1}{2}\cdot 10(4+31)=175$　$\longleftarrow S_n=\dfrac{1}{2}n(a+l)$

175

(2) 初項３，公差７の等差数列の初項から第 n 項までの和

$S_n=\dfrac{1}{2}n\{2\cdot 3+(n-1)\cdot 7\}=\dfrac{1}{2}n(7n-1)$　$\longleftarrow S_n=\dfrac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$

$\dfrac{1}{2}n(7n-1)$

(3) $1+2+3+\cdots\cdots+30$

自然数の和。$\dfrac{1}{2}\cdot 30(30+1)=465$　$\longleftarrow 1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

465

(4) $1+3+5+\cdots\cdots+39$

奇数の和。$39=2\cdot 20-1$ より，$1+3+5+\cdots\cdots+39=20^2=400$　$\longleftarrow 1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$

400

2　等比数列

氏名		得点	/100

1 次のような等比数列について，初めの5項と一般項をそれぞれ求めよ。　(各10点×4)

(1) 初項5，公比2

$5,\ \underset{\times 2}{10},\ \underset{\times 2}{20},\ \underset{\times 2}{40},\ \underset{\times 2}{80},\ \cdots\cdots$

初めの5項 $5,\ 10,\ 20,\ 40,\ 80$　一般項 $5\cdot 2^{n-1}$

(2) 初項6，公比 $-\frac{1}{3}$

$6,\ -2,\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{9},\ \frac{2}{27},\ \cdots\cdots$

$\times\left(-\frac{1}{3}\right)\ \times\left(-\frac{1}{3}\right)\ \times\left(-\frac{1}{3}\right)\ \times\left(-\frac{1}{3}\right)$

初めの5項 $6,\ -2,\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{9},\ \frac{2}{27}$　一般項 $6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

2 次の問いに答えよ。　(各6点×4)

(1) 第3項が18，第6項が486である等比数列 $\{a_n\}$ の初項と公比を求めよ。また，一般項 a_n を求めよ。

初項を a，公比を r とすると，$a_n=ar^{n-1}$

$a_3=18$ より，$ar^2=18$　…①

$a_6=486$ より，$ar^5=486$　…②

②÷① より，$r^3=27$　r は実数であるから，$r=3$

これと①より，$a=2$　初項 2　公比 3　一般項 $a_n=2\cdot 3^{n-1}$

(2) 数列 $5,\ x,\ \frac{80}{9},\ \cdots\cdots$ が等比数列であるとき，x の値を求めよ。

$x^2=5\cdot\frac{80}{9}=\frac{400}{9}$ より，$x=\pm\frac{20}{3}$　⟵数列 $a,\ b,\ c$ が等比数列 $\Longleftrightarrow b^2=ac$

$x=\pm\frac{20}{3}$

3 次の和を求めよ。　(各12点×3)

(1) 初項3，公比 -2，項数6の等比数列の和

$S_6=\frac{3\{(-2)^6-1\}}{-2-1}=-63$　⟵$r\neq 1$ のとき，$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

-63

(2) 初項7，公比1，項数8の等比数列の和

$S_8=8\cdot 7=56$　⟵$r=1$ のとき，$S_n=na$

56

(3) 等比数列 $1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4^2},\ \frac{1}{4^3},\ \cdots\cdots$ の初項から第 n 項までの和

$$S_n=\frac{1\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$$

$\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$

3　いろいろな数列

氏名		得点	/100

1 次の和を求めよ。　（各12点×6）

(1)　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+15^2$

$=\frac{1}{6}\cdot 15(15+1)(2\cdot 15+1)$　$\longleftarrow \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$=1240$

1240

(2)　$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+10^3$

$=\left\{\frac{1}{2}\cdot 10(10+1)\right\}^2$　$\longleftarrow \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

$=55^2$

$=3025$

3025

(3)　$\sum_{k=1}^{20} 5$　$\longleftarrow \underbrace{5+5+5+\cdots\cdots+5}_{20個}$

$=20\cdot 5$　$\longleftarrow \sum_{k=1}^{n} c=nc$

$=100$

100

(4)　$\sum_{k=1}^{n} 3^k$

$=\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 3^{k-1}$　$\longleftarrow$初項 3，公比 3 の等比数列の和

$=\frac{3(3^n-1)}{3-1}$

$=\frac{3}{2}(3^n-1)$

$\frac{3}{2}(3^n-1)$

(5)　$\sum_{k=1}^{n} (2k-3)$

$=2\sum_{k=1}^{n} k-\sum_{k=1}^{n} 3$

$=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-3n$

$=n^2-2n$

$=n(n-2)$

$n(n-2)$

(6)　$\sum_{k=1}^{n} k(3k-4)=3\sum_{k=1}^{n} k^2-4\sum_{k=1}^{n} k$

$=3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$

$=\frac{1}{2}n(n+1)\{(2n+1)-4\}$

$=\frac{1}{2}n(n+1)(2n-3)$

$\frac{1}{2}n(n+1)(2n-3)$

2 階差数列を利用して，次の数列の一般項 a_n を求めよ。　（14点）

2，　3，　10，　23，　42，　67，　……

階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$：1，　7，　13，　19，　25，　……

初項 1，公差 6 の等差数列であるから，$b_n=1+(n-1)\cdot 6=6n-5$

$n\geqq 2$ のとき，$a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}(6k-5)=2+6\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-5(n-1)$

$=3n^2-8n+7$　…①

①で $n=1$ とすると，$a_1=3\cdot 1^2-8\cdot 1+7=2$ となり，①は $n=1$ のときも成り立つ。

よって，求める一般項は，$a_n=3n^2-8n+7$

$a_n=3n^2-8n+7$

3 初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=n^2-4n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。　（14点）

$n\geqq 2$ のとき，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-4n-\{(n-1)^2-4(n-1)\}$

$=2n-5$　…①

$n=1$ のとき，$a_1=S_1=1^2-4\cdot 1=-3$

①で $n=1$ とすると，$a_1=2\cdot 1-5=-3$ となり，①は $n=1$ のときも成り立つ。

よって，求める一般項は，$a_n=2n-5$

$a_n=2n-5$

4　漸化式

氏名		得点	/100

1 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の第 2 項から第 5 項を求めよ。 (各12点×2)

(1) $a_1=2,\ a_{n+1}=4a_n-5$

$a_2=4a_1-5=4\cdot2-5=3$

$a_3=4a_2-5=4\cdot3-5=7$

$a_4=4a_3-5=4\cdot7-5=23$

$a_5=4a_4-5=4\cdot23-5=87$

3, 7, 23, 87

(2) $a_1=1,\ a_{n+1}=3a_n+n$

$a_2=3a_1+1=3\cdot1+1=4$

$a_3=3a_2+2=3\cdot4+2=14$

$a_4=3a_3+3=3\cdot14+3=45$

$a_5=3a_4+4=3\cdot45+4=139$

4, 14, 45, 139

2 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 (各12点×4)

(1) $a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+4$

$\{a_n\}$ は初項 3，公差 4 の等差数列であるから

$a_n=3+(n-1)\cdot4=4n-1$

$a_n=4n-1$

(2) $a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n$

$\{a_n\}$ は初項 2，公比 3 の等比数列であるから

$a_n=2\cdot3^{n-1}$

$a_n=2\cdot3^{n-1}$

(3) $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+4n-1$

$a_{n+1}-a_n=4n-1$ より，$\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が $4n-1$ であるから，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}(4k-1)$$

$$=2+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)=2n^2-3n+3$$

初項は 2 なので，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

$a_n=2n^2-3n+3$

(4) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+(-2)^n$

$a_{n+1}-a_n=(-2)^n$ より，$\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が $(-2)^n$ であるから，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(-2)^k=1+\frac{-2\{1-(-2)^{n-1}\}}{1-(-2)}$$

$$=\frac{1-(-2)^n}{3}$$

初項は 1 なので，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

$a_n=\dfrac{1-(-2)^n}{3}$

3 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 (各14点×2)

(1) $a_1=2,\ a_{n+1}=4a_n-3$

$a_{n+1}=4a_n-3$ より，　$a_{n+1}-1=4(a_n-1)$　　←$\alpha=4\alpha-3$ を解くと $\alpha=1$

$b_n=a_n-1$ とおくと，$b_{n+1}=4b_n$

$\{b_n\}$ は公比 4 の等比数列で，初項は $b_1=a_1-1=2-1=1$ であるから，一般項は，

$b_n=1\cdot4^{n-1}=4^{n-1}$

$b_n=a_n-1$ より，　$a_n=b_n+1=4^{n-1}+1$

$a_n=4^{n-1}+1$

(2) $a_1=0,\ a_2=1,\ a_{n+2}-8a_{n+1}+15a_n=0$

$a_{n+2}-8a_{n+1}+15a_n=0$ は，次の 2 通りに変形できる。　←$x^2-8x+15=0$ の解は，$x=3,\ 5$

$a_{n+2}-3a_{n+1}=5(a_{n+1}-3a_n)$　…①　　$a_{n+2}-5a_{n+1}=3(a_{n+1}-5a_n)$　…②

①より，数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ は初項 $a_2-3a_1=1$，公比 5 の等比数列であるから，$a_{n+1}-3a_n=5^{n-1}$　…③

②より，数列 $\{a_{n+1}-5a_n\}$ は初項 $a_2-5a_1=1$，公比 3 の等比数列であるから，$a_{n+1}-5a_n=3^{n-1}$　…④

③−④ より，$2a_n=5^{n-1}-3^{n-1}$　　$a_n=\dfrac{5^{n-1}-3^{n-1}}{2}$

$a_n=\dfrac{5^{n-1}-3^{n-1}}{2}$

5　数学的帰納法

氏名		得点	/100

1 n が自然数のとき，次の等式(A)が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明する。

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}\quad\cdots(\mathrm{A})$$

下の下線部を補い，(続き)を書いて証明を完成せよ。　(各15点×4)

〔証明〕

[1]　$n=1$ のとき，

(左辺)$=\dfrac{1}{1\cdot2}=\dfrac{1}{2}$　　(右辺)$=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$　　よって，$n=1$ のとき(A)は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，(A)が成り立つ，すなわち，

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}\quad\cdots①$$

が成り立つと仮定する。

①の両辺に $\dfrac{1}{(k+1)\{(k+1)+1\}}$ を加えると

(続き)

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)\{(k+1)+1\}}$$

$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)\{(k+1)+1\}}=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}=\frac{k+1}{(k+1)+1}$$

これは，(A)において $n=k+1$ のときであるから，$n=k+1$ のときも(A)は成り立つ。

[1]，[2]より，すべての自然数 n について，(A)は成り立つ。

2 n が2以上の自然数のとき，次の不等式(A)が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明する。

$$3^n>4n\quad\cdots(\mathrm{A})$$

下の下線部を補い，(続き)を書いて証明を完成せよ。　(各10点×4)

〔証明〕

[1]　$n=2$ のとき，

(左辺)$=3^2=9$　　(右辺)$=4\cdot2=8$　　よって，$n=2$ のとき(A)は成り立つ。

[2]　$n\geqq2$ として，$n=k$ のとき，(A)が成り立つ，すなわち，

$3^k>4k$　$\cdots①$　が成り立つと仮定する。

①の両辺に 3 をかけると

(続き)

$3^{k+1}>4k\cdot3$　$\cdots②$

ここで，$4k\cdot3=12k=4(k+1)+8k-4$

$k\geqq2$ のとき，$8k-4>0$ であるから，$4k\cdot3>4(k+1)$　$\cdots③$

②，③より，$3^{k+1}>4(k+1)$

これは，(A)において $n=k+1$ のときであるから，$n=k+1$ のときも(A)は成り立つ。

[1]，[2]より，2以上の自然数 n について，(A)は成り立つ。

6　確率変数の期待値と分散

氏名		得点	/100

1 次の変数 X の確率分布を求めよ。（各 8 点×2）

(1)　6 枚のカード $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ の中から 1 枚を抜き出し，そのカードの数字を X とする。

X	1	2	3	計
P	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

(2)　2 枚の100円硬貨を同時に投げるとき，表の出た硬貨の金額の和を X とする。

○ ＜ ○(200)　×(100)

× ＜ ○(100)　×(0)

X	0	100	200	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

※以下，X の期待値を $E(X)$，分散を $V(X)$，標準偏差を $\sigma(X)$ で表す。

2 確率変数 X が次の確率分布に従うとき，X の期待値，分散，標準偏差をそれぞれ求めよ。（各 7 点×6）

(1)

X	0	2	4	計
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	1

$E(X)=0\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{3}{10}+4\cdot\frac{6}{10}=\frac{30}{10}=3$

$V(X)=(0-3)^2\cdot\frac{1}{10}+(2-3)^2\cdot\frac{3}{10}+(4-3)^2\cdot\frac{6}{10}=\frac{18}{10}=\frac{9}{5}$

別解　$V(X)=0^2\cdot\frac{1}{10}+2^2\cdot\frac{3}{10}+4^2\cdot\frac{6}{10}-3^2=\frac{9}{5}$

$\sigma(X)=\sqrt{\frac{9}{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

期待値 3　分散 $\frac{9}{5}$　標準偏差 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

(2)

X	0	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$	1

$E(X)=0\cdot\frac{1}{15}+1\cdot\frac{2}{15}+2\cdot\frac{3}{15}+3\cdot\frac{4}{15}+4\cdot\frac{5}{15}=\frac{40}{15}=\frac{8}{3}$

$V(X)=0^2\cdot\frac{1}{15}+1^2\cdot\frac{2}{15}+2^2\cdot\frac{3}{15}+3^2\cdot\frac{4}{15}+4^2\cdot\frac{5}{15}-\left(\frac{8}{3}\right)^2=\frac{130}{15}-\frac{64}{9}=\frac{14}{9}$

$\sigma(X)=\sqrt{\frac{14}{9}}=\frac{\sqrt{14}}{3}$

期待値 $\frac{8}{3}$　分散 $\frac{14}{9}$　標準偏差 $\frac{\sqrt{14}}{3}$

3 5 枚のカード $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ の中から同時に 2 枚を抜き出し，それらのカードの数字の和を X とする。次の問いに答えよ。（各 7 点×6）

(1)　X の確率分布を求めよ。

$P(X=2)=\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$　　$P(X=3)=\frac{{}_2C_1\cdot{}_2C_1}{{}_5C_2}=\frac{4}{10}$

$P(X=4)=\frac{{}_2C_2+{}_2C_1\cdot{}_1C_1}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$　　$P(X=5)=\frac{{}_2C_1\cdot{}_1C_1}{{}_5C_2}=\frac{2}{10}$

X	2	3	4	5	計
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	1

(2)　確率変数 X の期待値，分散を求めよ。

$E(X)=2\cdot\frac{1}{10}+3\cdot\frac{4}{10}+4\cdot\frac{3}{10}+5\cdot\frac{2}{10}=\frac{18}{5}$，$V(X)=2^2\cdot\frac{1}{10}+3^2\cdot\frac{4}{10}+4^2\cdot\frac{3}{10}+5^2\cdot\frac{2}{10}-\left(\frac{18}{5}\right)^2=\frac{69}{5}-\frac{324}{25}=\frac{21}{25}$

期待値 $\frac{18}{5}$　分散 $\frac{21}{25}$

(3)　$Y=5X-3$ とする。確率変数 Y の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

$E(Y)=E(5X-3)=5E(X)-3=5\cdot\frac{18}{5}-3=15$　　$V(Y)=V(5X-3)=5^2V(X)=25\cdot\frac{21}{25}=21$

$\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{21}$

期待値 15　分散 21　標準偏差 $\sqrt{21}$

7　確率変数の和と積

氏名		得点	/100

1 確率変数 X, Y の確率分布が次の表で与えられているとき，$X+Y$, $4X+3Y$ の期待値をそれぞれ求めよ。

（各11点×2）

X	1	2	計
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

Y	1	2	計
P	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$E(X)=1\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\frac{3}{5}=\frac{8}{5}$, $E(Y)=1\cdot\frac{4}{5}+2\cdot\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$

$E(X+Y)=\frac{8}{5}+\frac{6}{5}=\frac{14}{5}$

$E(4X+3Y)=4E(X)+3E(Y)=4\cdot\frac{8}{5}+3\cdot\frac{6}{5}=\frac{50}{5}=10$

$X+Y$ の期待値 $\frac{14}{5}$　　$4X+3Y$ の期待値 10

2 次の問いに答えよ。

（各12点×2）

(1)　1個のさいころを2回投げるとき，出た目の数の積の期待値を求めよ。

1回目，2回目に出る目の数をそれぞれ X, Y とすると，X と Y は独立な確率変数で，

$$E(X)=E(Y)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$$

よって，$E(XY)=E(X)E(Y)=\frac{7}{2}\cdot\frac{7}{2}=\frac{49}{4}$

$\frac{49}{4}$

(2)　3つの確率変数 X, Y, Z が互いに独立で，確率分布がいずれも次の表で与えられるとき，XYZ の期待値を求めよ。

変数	1	2	計
確率	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

$E(X)=E(Y)=E(Z)=1\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

よって，$E(XYZ)=E(X)E(Y)E(Z)=\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}=\frac{64}{27}$

$\frac{64}{27}$

3 袋の中に1, 2, 3, 4を1つずつ書いた4個の同じ大きさの玉が入っている。この袋の中から1個の玉を取り出し，その数字を調べてからもとの袋に戻す試行を行う。次の問いに答えよ。

（各9点×6）

(1)　この試行を1回行うとき，取り出した玉の数字の期待値，分散を求めよ。

期待値は，$1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$

分散は，$1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{4}+3^2\cdot\frac{1}{4}+4^2\cdot\frac{1}{4}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$

期待値 $\frac{5}{2}$　　分散 $\frac{5}{4}$

(2)　この試行を2回続けて行うとき，1回目，2回目に取り出した玉の数字をそれぞれ X, Y とする。

①　$X+Y$ の分散，標準偏差を求めよ。

X と Y は互いに独立な確率変数であるから，$V(X+Y)=V(X)+V(Y)=\frac{5}{4}+\frac{5}{4}=\frac{5}{2}$

$\sigma(X+Y)=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

分散 $\frac{5}{2}$　　標準偏差 $\frac{\sqrt{10}}{2}$

②　$4X-2Y$ の分散，標準偏差を求めよ。

$V(4X-2Y)=4^2V(X)+(-2)^2V(Y)=16\cdot\frac{5}{4}+4\cdot\frac{5}{4}=25$

$\sigma(4X-2Y)=\sqrt{25}=5$

分散 25　　標準偏差 5

8　二項分布

氏名		得点	/100

1 次の問いに答えよ。　(各 8 点×4)

(1)　1 枚の硬貨を 5 回投げて，表の出る回数を X とする。

①　X はどのような二項分布に従うか。$B(n,\ p)$ の形に表せ。

$n=5$　　1 回投げて表の出る確率は，$p=\dfrac{1}{2}$

$B\left(5,\ \dfrac{1}{2}\right)$

②　確率 $P(X=2)$ を求めよ。

$P(X=2)={}_5\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{10}{32}=\dfrac{5}{16}$

$\dfrac{5}{16}$

(2)　1 個のさいころを 4 回投げて，1 または 6 の目が出る回数を X とする。

①　X はどのような二項分布に従うか。$B(n,\ p)$ の形に表せ。

$n=4$　　1 回投げて 1 または 6 の目が出る確率は，$p=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

$B\left(4,\ \dfrac{1}{3}\right)$

②　確率 $P(X\geqq 3)$ を求めよ。

$P(X\geqq 3)=P(X=3)+P(X=4)$

$={}_4\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\cdot\dfrac{2}{3}+{}_4\mathrm{C}_4\left(\dfrac{1}{3}\right)^4=\dfrac{1}{9}$

$\dfrac{1}{9}$

2 確率変数 X が次の二項分布に従うとき，X の期待値，分散，標準偏差を求めよ。　(各 6 点×6)

(1)　$B\left(8,\ \dfrac{2}{9}\right)$　　$E(X)=8\cdot\dfrac{2}{9}=\dfrac{16}{9}$　　$V(X)=8\cdot\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{7}{9}=\dfrac{112}{81}$　　$\sigma(X)=\sqrt{8\cdot\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{7}{9}}=\dfrac{4\sqrt{7}}{9}$

期待値 $\dfrac{16}{9}$　　分散 $\dfrac{112}{81}$　　標準偏差 $\dfrac{4\sqrt{7}}{9}$

(2)　$B\left(20,\ \dfrac{3}{8}\right)$　　$E(X)=20\cdot\dfrac{3}{8}=\dfrac{15}{2}$　　$V(X)=20\cdot\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{5}{8}=\dfrac{75}{16}$　　$\sigma(X)=\sqrt{20\cdot\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{5}{8}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$

期待値 $\dfrac{15}{2}$　　分散 $\dfrac{75}{16}$　　標準偏差 $\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$

3 次の問いに答えよ。　(各 8 点×4)

(1)　2 枚の硬貨を同時に投げ，硬貨の表，裏を記録する。この試行を60回くり返すとき，2 枚とも表が出る回数を X とする。X の期待値，標準偏差を求めよ。

X は二項分布 $B\left(60,\ \dfrac{1}{4}\right)$ に従う。$E(X)=60\cdot\dfrac{1}{4}=15$　　$\sigma(X)=\sqrt{60\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3}{4}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

期待値 15　　標準偏差 $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

(2)　赤玉 3 個と白玉 2 個が入っている袋から同時に 2 個の玉を取り出し，色を調べてから袋にもどす。この試行を50回くり返すとき，取り出した 2 個の玉が同じ色である回数を X とする。X の期待値，標準偏差を求めよ。

X は二項分布 $B\left(50,\ \dfrac{2}{5}\right)$ に従う。$E(X)=50\cdot\dfrac{2}{5}=20$　　$\sigma(X)=\sqrt{50\cdot\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{3}{5}}=2\sqrt{3}$

期待値 20　　標準偏差 $2\sqrt{3}$

9　正規分布

氏名		得点	/100

※[1]～[3]では，正規分布表を用いてもよい。

1 確率変数Zが標準正規分布$N(0,\ 1)$に従うとき，次の確率を求めよ。　（各10点×6）

(1) $P(0 \leqq Z \leqq 1.35)$
$=p(1.35)$
$=0.4115$　　　**0.4115**

(2) $P(-0.92 \leqq Z \leqq 0)$
$=p(0.92)$
$=0.3212$　　　**0.3212**

(3) $P(Z \geqq 1.5)$
$=0.5-p(1.5)$
$=0.5-0.4332$
$=0.0668$　　　**0.0668**

(4) $P(Z \leqq 0.7)$
$=0.5+p(0.7)$
$=0.5+0.2580$
$=0.7580$　　　**0.7580**

(5) $P(-1.6 \leqq Z \leqq 0.8)$
$=P(-1.6 \leqq Z \leqq 0)+P(0 \leqq Z \leqq 0.8)$
$=p(1.6)+p(0.8)$
$=0.4452+0.2881$
$=0.7333$　　　**0.7333**

(6) $P(0.45 \leqq Z \leqq 2)$
$=P(0 \leqq Z \leqq 2)-P(0 \leqq Z \leqq 0.45)$
$=p(2)-p(0.45)$
$=0.4772-0.1736$
$=0.3036$　　　**0.3036**

2 次の問いに答えよ。　（各10点×3）

(1) 確率変数Xが正規分布$N(10,\ 4^2)$に従うとき，確率$P(8 \leqq X \leqq 13)$を求めよ。

$Z=\dfrac{X-10}{4}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X=8$ のとき $Z=-0.5$，$X=13$ のとき $Z=0.75$ であるから，

$P(8 \leqq X \leqq 13)=P(-0.5 \leqq Z \leqq 0.75)=p(0.5)+p(0.75)=0.1915+0.2734=0.4649$

0.4649

(2) 確率変数Xが正規分布$N(60,\ 10^2)$に従うとき，確率$P(X \geqq 72)$を求めよ。

$Z=\dfrac{X-60}{10}$ とおくと，Z は $N(0,\ 1)$ に従う。

$X=72$ のとき $Z=1.2$ であるから，

$P(X \geqq 72)=P(Z \geqq 1.2)=0.5-p(1.2)=0.5-0.3849=0.1151$

0.1151

(3) 17歳男子の身長が，平均170cm，標準偏差5cmの正規分布に従うものとする。17歳男子の中で，身長が168cm以上173cm以下の人は約何％いるか。

X が $N(170,\ 5^2)$ に従うとき，$Z=\dfrac{X-170}{5}$ は $N(0,\ 1)$ に従う。

$X=168$ のとき $Z=-0.4$，$X=173$ のとき $Z=0.6$ であるから，

$P(168 \leqq X \leqq 173)=P(-0.4 \leqq Z \leqq 0.6)=p(0.4)+p(0.6)$

$=0.1554+0.2257=0.3811 \longrightarrow$ 約38％

約38％

3 赤玉1個と白玉3個が入った袋から1個の玉を取り出し，色を調べてから袋に戻す。この試行を1200回くり返すとき，赤玉が取り出される回数が285回以下である確率を求めよ。　（10点）

確率変数 X が二項分布 $B\left(1200,\ \dfrac{1}{4}\right)$ に従うとき，$m=1200 \cdot \dfrac{1}{4}=300$，$\sigma^2=1200 \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{3}{4}=225=15^2$ より，

X は近似的に正規分布 $N(300,\ 15^2)$ に従い，$Z=\dfrac{X-300}{15}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$P(X \leqq 285)=P(Z \leqq -1)=P(Z \geqq 1)=0.5-p(1)=0.5-0.3413=0.1587$

0.1587

10　母集団と標本

氏名		得点	/100

※母平均を m で表す。

1　0と書かれたカードが5枚，1と書かれたカードが4枚，2と書かれたカードが3枚，3と書かれたカードが2枚，4と書かれたカードが1枚ある。この15枚のカードを母集団，カードの数字を変量とするとき，母集団分布，母平均，母標準偏差を求めよ。（各8点×3）

$m=0\cdot\frac{5}{15}+1\cdot\frac{4}{15}+2\cdot\frac{3}{15}+3\cdot\frac{2}{15}+4\cdot\frac{1}{15}=\frac{20}{15}=\frac{4}{3}$

$\sigma^2=0^2\cdot\frac{5}{15}+1^2\cdot\frac{4}{15}+2^2\cdot\frac{3}{15}+3^2\cdot\frac{2}{15}+4^2\cdot\frac{1}{15}-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{10}{3}-\frac{16}{9}=\frac{14}{9}$　　$\sigma>0$ より，$\sigma=\sqrt{\frac{14}{9}}=\frac{\sqrt{14}}{3}$

母集団分布

変量	0	1	2	3	4	計
確率	$\frac{5}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

母平均 $\frac{4}{3}$　　母標準偏差 $\frac{\sqrt{14}}{3}$

2　次の問いに答えよ。（各10点×6）

(1)　3枚のカード $\boxed{1}$，$\boxed{3}$，$\boxed{5}$ を母集団，カードの数字を変量とする。

①　母集団分布，母平均を求めよ。

$m=1\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{3}+5\cdot\frac{1}{3}=3$

母集団分布

変量	1	3	5	計
確率	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

母平均 3

②　この母集団から大きさ2の無作為標本を復元抽出するとき，標本平均 $\overline{X}$ の確率分布，期待値を求めよ。

X_1 \ X_2	1	3	5
1	1	2	3
3	2	3	4
5	3	4	5

1回目を X_1，2回目を X_2 とすると，$\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$ の値は左のようになる。

$E(\overline{X})=1\cdot\frac{1}{9}+2\cdot\frac{2}{9}+3\cdot\frac{3}{9}+4\cdot\frac{2}{9}+5\cdot\frac{1}{9}=3$

確率分布

$\overline{X}$	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

期待値 3

(2)　母平均60，母標準偏差8の十分大きい母集団から，大きさ25の無作為標本を抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ の期待値と標準偏差を求めよ。

$E(\overline{X})=m=60$

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{8}{\sqrt{25}}=\frac{8}{5}$

期待値 60　　標準偏差 $\frac{8}{5}$

3　母平均170，母標準偏差20の母集団から，大きさ100の無作為標本を抽出する。次の問いに答えよ。（各8点×2）

(1)　標本平均 $\overline{X}$ は，近似的にどのような正規分布に従うとみなせるか。

$N\left(170,\ \frac{20^2}{100}\right)$　すなわち，$N(170,\ 4)$

$N(170,\ 4)$

(2)　標本平均 $\overline{X}$ が175より大きい値をとる確率を求めよ。ただし，正規分布表を用いてもよい。

$Z=\frac{\overline{X}-170}{2}$ とおくと，Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$\overline{X}=175$ のとき，$Z=2.5$ であるから，

$P(\overline{X}>175)=P(Z>2.5)=0.5-p(2.5)=0.5-0.4938=0.0062$

0.0062

11　推定

	氏名		得点	/100

1 次の問いに答えよ。 (各25点×2)

(1) ある県の男子高校生の中から900人を無作為に選んで調べたところ，握力の平均が43.2kgであった。母標準偏差を7.5kgとして，この県の男子高校生の平均握力 m に対する信頼度95%の信頼区間を求めよ。

標本平均 $\overline{X}=43.2$，母標準偏差 $\sigma=7.5$，標本の大きさ $n=900$ であるから，

$$1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1.96\cdot\frac{7.5}{\sqrt{900}}\fallingdotseq 0.5$$

信頼度95%の信頼区間は，[43.2−0.5，43.2+0.5]

すなわち，[42.7，43.7]　単位はkg

[42.7，43.7]　単位はkg

(2) 大量に生産されたある製品から，100個を無作為に抽出して長さを測ったところ，平均値は273.6mm，標準偏差は6.1mmであった。この製品の長さの平均値 m を信頼度95%で推定せよ。

標本平均 $\overline{X}=273.6$，標本標準偏差 $S=6.1$，標本の大きさ $n=100$ であるから，

$$1.96\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}=1.96\cdot\frac{6.1}{\sqrt{100}}\fallingdotseq 1.2$$

信頼度95%の信頼区間は，[273.6−1.2，273.6+1.2]

すなわち，[272.4，274.8]　単位はmm

[272.4，274.8]　単位はmm

2 ある検定試験の得点の母標準偏差は15点であるという。その母平均 m を信頼度95%で推定するとき，信頼区間の幅を2.8点以下にするには，標本の大きさ n を少なくともいくらにすればよいか。 (25点)

母平均 m に対する信頼度95%の信頼区間の幅は，

$2\cdot1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ であるから，$2\cdot1.96\cdot\frac{15}{\sqrt{n}}\leqq 2.8$

よって，$n\geqq\left(\frac{2\cdot1.96\cdot15}{2.8}\right)^2=21^2=441$

少なくとも441にすればよい

3 ある都市で，有権者から無作為に抽出した600人についてA政党の支持者を調べたら240人いた。この都市におけるA政党の支持率 p を，信頼度95%で推定せよ。 (25点)

標本比率 R は，　$R=\frac{240}{600}=0.4$

$n=600$ であるから，$1.96\cdot\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}=1.96\cdot\sqrt{\frac{0.4\cdot0.6}{600}}=1.96\cdot0.02\fallingdotseq 0.04$

求める信頼区間は，[0.4−0.04，0.4+0.04]

すなわち，[0.36，0.44]

[0.36，0.44]

12　経済と数学

氏名		得点	/100

1 年利率 1.5％の複利法で，毎年の初めにいくらかずつ積立貯金をする。15 年間で 200 万貯めるには，毎年何円ずつ貯金すればよいか求めよ。ただし，$1.015^{15}=1.25$ とする。

（30 点）

x 円ずつ貯金するとする。

$$\frac{x\times(1+0.015)\{(1+0.015)^{15}-1\}}{(1+0.015)-1}=2000000$$

$$\frac{0.25375}{0.015}x=2000000$$

x＝118226.6･･･　よって，118227 円

118227 円

2 300 万円の自動車を購入して，月利率（1 カ月あたりの利率）0.5％で 60 回の均等払いで毎月返済するとき，毎月の返済額はいくらか。ただし，$1.005^{60}=1.35$ とする。

（30 点）

毎月の返済額を x 円とすると，

$$\frac{x(1.005^{60}-1)}{1.005-1}=3000000$$

$$\frac{0.35}{0.005}x=3000000$$

$x=42857.1\cdots$

よって，42858 円である。

42858 円

3 A 社は，次の表の P～S 社のいずれかの会社と業務提携を検討している。

	ブランド	品質	価格	販売力
P 社	8	9	8	9
Q 社	7	10	7	8
R 社	9	8	9	10
S 社	10	8	7	8

各項目に関して，ブランドに 10，品質に 8，価格に 5，販売力 4 の重要度(重み)をつけて，総合的に評価をして，業務提携をするのに最も適切な会社を選べ。

（40 点）

P 社･･･8 点×10＋9 点×8＋8 点×5＋9 点×4＝228 点

Q 社･･･7 点×10＋10 点×8＋7 点×5＋8 点×4＝217 点

R 社･･･9 点×10＋8 点×8＋9 点×5＋10 点×4＝239 点

S 社･･･10 点×10＋8 点×8＋7 点×5＋8 点×4＝231 点

よって，R 社と業務提携をするのがよい。

R 社