1　等差数列

氏名		得点	/100

1 次の等差数列の一般項 a_n と第10項を求めよ。（各10点×4）

(1) 初項 4，公差 2

(2) 第 3 項が12，第15項が -24

2 3 つの数 6，a，18がある。次の条件を満たすような a の値を求めよ。（各10点×2）

(1) 3 数がこの順に等差数列をなす

(2) 3 数がこの順に調和数列をなす

3 次の等差数列の和を求めよ。（各10点×2）

(1) 初項15，公差 -4，項数 n

(2) 2，5，8，……，56

4 次の問いに答えよ。（各10点×2）

(1) 初項から第 5 項までの和が75，第 6 項から第10項までの和が225である等差数列の一般項 a_n を求めよ。

(2) 第 5 項が34，第20項が -26 の等差数列について，初項から第何項までの和が最大となるか。

# 2　等比数列	氏名		得点	/100

1 次の等比数列の一般項 a_n と第 5 項を求めよ。 (各10点×4)

(1) 初項 4，公比 3

(2) 25，5，1，……

2 次の問いに答えよ。 (各10点×2)

(1) 第 2 項が12，第 4 項が192である等比数列の初項 a と公比 r を求めよ。

(2) $x<y$ とする。3 つの数 x，15，y はこの順に等比数列をなし，3 数の和は49である。このとき，x，y の値を求めよ。

3 次の等比数列の，初項から(　)内に示された項までの和を求めよ。 (各10点×2)

(1) 初項64，公比 $\frac{1}{2}$ （第 6 項）

(2) 初項 3，公比 -2 （第 n 項）

4 次の問いに答えよ。 (各10点×2)

(1) 初項 5，公比 2 の等比数列の初項から第 n 項までの和が1275であるとき，n の値を求めよ。

(2) 初項から第 3 項までの和が35，初項から第 6 項までの和が315である等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

# 3 いろいろな数列	氏名		得点	/100

1 次の和を求めよ。 （各12点×3）

(1) $\sum_{k=1}^{n}(4k+3)$　　(2) $\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}$　　(3) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$

2 次の問いに答えよ。 （各13点×2）

(1) 数列 $\frac{1}{2\cdot5}$，$\frac{1}{5\cdot8}$，$\frac{1}{8\cdot11}$，$\frac{1}{11\cdot14}$，…… の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(2) 和 $S=2+3\cdot2^2+5\cdot2^3+7\cdot2^4+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot2^n$ を求めよ。

3 次の数列の一般項 a_n を求めよ。 （各12点×2）

(1) 2，4，9，17，28，……　　(2) 1，3，7，15，31，……

4 初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=2n^2-3n$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 （14点）

# 4　漸化式，数学的帰納法	氏名		得点	/100

1 次のように定義される数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。（各14点×4）

(1)　$a_1=3,\ a_{n+1}=-2a_n$

(2)　$a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=2n+1$

(3)　$a_1=\dfrac{4}{3},\ a_{n+1}=4a_n-1$

(4)　$a_1=2,\ a_{n+1}=2a_n+2^n$

2 数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和をS_nとすると，$S_n=2a_n-1$が成り立つ。このとき，数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。（14点）

3 nが自然数のとき，次の等式が成り立つことを数学的帰納法によって証明せよ。（15点）

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$$

4 nが自然数のとき，次の不等式が成り立つことを数学的帰納法によって証明せよ。（15点）

$$3^n>n(n+1)$$

1　等差数列

氏名		得点	/100

初項 a，公差 d，初項から第 n 項までの和 S_n とする。

1 次の等差数列の一般項 a_n と第10項を求めよ。（各10点×4）

(1) 初項 4，公差 2

$a_n=4+(n-1)\cdot2=2n+2$

$a_{10}=2\cdot10+2=22$

$a_n=2n+2$　　22

(2) 第 3 項が12，第15項が -24

$a+2d=12$，$a+14d=-24$　これを解いて，$a=18$，$d=-3$

$a_n=18+(n-1)\cdot(-3)=-3n+21$

$a_{10}=-3\cdot10+21=-9$

$a_n=-3n+21$　　-9

2 3 つの数 6，a，18がある。次の条件を満たすような a の値を求めよ。（各10点×2）

(1) 3 数がこの順に等差数列をなす

$2a=6+18$ より，

$2a=24$　$a=12$

$a=12$

(2) 3 数がこの順に調和数列をなす

$2\cdot\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{18}$ より，

$\dfrac{2}{a}=\dfrac{2}{9}$　$a=9$

$a=9$

3 次の等差数列の和を求めよ。（各10点×2）

(1) 初項15，公差 -4，項数 n

$S_n=\dfrac{n}{2}\{2\cdot15+(n-1)\cdot(-4)\}$

$=n(17-2n)$

$n(17-2n)$

(2) 2，5，8，……，56

$a_n=2+(n-1)\cdot3=3n-1$

$3n-1=56$ より，$n=19$

$S_{19}=\dfrac{19(2+56)}{2}=551$

551

4 次の問いに答えよ。（各10点×2）

(1) 初項から第 5 項までの和が75，第 6 項から第10項までの和が225である等差数列の一般項 a_n を求めよ。

$S_5=\dfrac{5}{2}(2a+4d)=75$ から，$a+2d=15$

$S_{10}-S_5=\dfrac{10}{2}(2a+9d)-75=225$ から，$2a+9d=60$

これを解いて，$a=3$，$d=6$　$a_n=3+(n-1)\cdot6=6n-3$

$a_n=6n-3$

(2) 第 5 項が34，第20項が -26 の等差数列について，初項から第何項までの和が最大となるか。

$a+4d=34$，$a+19d=-26$　これを解いて，$a=50$，$d=-4$

$a_n=50+(n-1)(-4)=-4n+54$

$-4n+54\geqq0$ とすると，$n\leqq13.5$ より，

第13項までの和が最大となる。

第13項

# 2　等比数列	氏名		得点	/100

初項 a，公比 r，初項から第 n 項までの和 S_n とする。

1 次の等比数列の一般項 a_n と第 5 項を求めよ。（各10点×4）

(1) 初項 4，公比 3

$a_n=4\cdot3^{n-1}$　$a_5=4\cdot3^4=324$

$a_n=4\cdot3^{n-1}$　　324

(2) 25，5，1，……

$a_n=25\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{5}\right)^{n-3}$　$a_5=\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{25}$

$a_n=\left(\frac{1}{5}\right)^{n-3}$ $(a_n=5^{3-n})$　　$\frac{1}{25}$

2 次の問いに答えよ。（各10点×2）

(1) 第 2 項が12，第 4 項が192である等比数列の初項 a と公比 r を求めよ。

$ar=12$ ……①　$ar^3=192$ ……②　②÷① より，$r^2=16$　$r=\pm4$

$r=4$ のとき，$a=3$，$r=-4$ のとき，$a=-3$

$a=3$，$r=4$
$a=-3$，$r=-4$

(2) $x<y$ とする。3 つの数 x，15，y はこの順に等比数列をなし，3 数の和は49である。このとき，x，y の値を求めよ。

$xy=15^2$，$x+15+y=49$ より，$x+y=34$

x，y は 2 次方程式 $t^2-34t+225=0$ の 2 解である。

$(t-9)(t-25)=0$ より，$t=9$，25　$x<y$ より，$x=9$，$y=25$

$x=9$，$y=25$

3 次の等比数列の，初項から（　）内に示された項までの和を求めよ。（各10点×2）

(1) 初項64，公比 $\frac{1}{2}$　（第 6 項）

$$S_6=\frac{64\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{2}}=126$$

126

(2) 初項 3，公比 -2　（第 n 項）

$$S_n=\frac{3\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=1-(-2)^n$$

$1-(-2)^n$

4 次の問いに答えよ。（各10点×2）

(1) 初項 5，公比 2 の等比数列の初項から第 n 項までの和が1275であるとき，n の値を求めよ。

$\frac{5(2^n-1)}{2-1}=1275$ より，$2^n-1=255$　$2^n=256=2^8$

よって，$n=8$

$n=8$

(2) 初項から第 3 項までの和が35，初項から第 6 項までの和が315である等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$\frac{a(r^3-1)}{r-1}=35$ ……①　$\frac{a(r^6-1)}{r-1}=315$ ……②　②÷① より，$r^3+1=9$

$r=2$，$a=5$　よって，$S_n=\frac{5(2^n-1)}{2-1}=5(2^n-1)$

$S_n=5(2^n-1)$

3　いろいろな数列

氏名		得点	/100

1 次の和を求めよ。　（各12点×3）

(1) $\sum_{k=1}^{n}(4k+3)$

与式$=4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}3$

$=4\cdot\frac{n}{2}(n+1)+3n$

$=n(2n+5)$

答 $n(2n+5)$

(2) $\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}$

与式$=\frac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}$

$=\frac{1}{2}(3^n-1)$

答 $\frac{1}{2}(3^n-1)$

(3) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$

与式$=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)$

$=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$

$=\frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)$

答 $\frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)$

2 次の問いに答えよ。　（各13点×2）

(1) 数列 $\frac{1}{2\cdot5}$，$\frac{1}{5\cdot8}$，$\frac{1}{8\cdot11}$，$\frac{1}{11\cdot14}$，…… の初項から第 n 項までの和を求めよ。

一般項は $a_n=\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$ だから，

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{n}{2(3n+2)}$

答 $\frac{n}{2(3n+2)}$

(2) 和 $S=2+3\cdot2^2+5\cdot2^3+7\cdot2^4+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot2^n$ を求めよ。

$2S=1\cdot2^2+3\cdot2^3+5\cdot2^4+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot2^{n+1}$

$S-2S=2+2\cdot2^2+2\cdot2^3+2\cdot2^4+\cdots\cdots+2\cdot2^n-(2n-1)\cdot2^{n+1}$

$-S=2+\frac{2^3(2^{n-1}-1)}{2-1}-(2n-1)\cdot2^{n+1}$ より，$S=6+(2n-3)\cdot2^{n+1}$

答 $S=6+(2n-3)\cdot2^{n+1}$

3 次の数列の一般項 a_n を求めよ。階差数列を b_n とする。　（各12点×2）

(1) 2，4，9，17，28，……

$b_n=3n-1$ より，$n\geqq2$ のとき，

$a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}(3k-1)=\frac{1}{2}(3n^2-5n+6)$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

答 $a_n=\frac{1}{2}(3n^2-5n+6)$

(2) 1，3，7，15，31，……

$b_n=2^n$ より，$n\geqq2$ のとき，

$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n-1$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

答 $a_n=2^n-1$

4 初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=2n^2-3n$ で与えられる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。　（14点）

$n\geqq2$ のとき，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2-3n-\{2(n-1)^2-3(n-1)\}=4n-5$ ……①

$n=1$ のとき，$a_1=S_1=-1$　これは①で $n=1$ としても成り立つ。

よって，$a_n=4n-5$

答 $a_n=4n-5$

4　漸化式，数学的帰納法

氏名		得点	/100

1 次のように定義される数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。　（各14点×4）

(1) $a_1=3$，$a_{n+1}=-2a_n$

初項 3，公比 −2 の等比数列だから，

$a_n=3\cdot(-2)^{n-1}$

答 $a_n=3\cdot(-2)^{n-1}$

(2) $a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=2n+1$

$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)=n^2$

答 $a_n=n^2$

(3) $a_1=\frac{4}{3}$，$a_{n+1}=4a_n-1$

$a_{n+1}-\frac{1}{3}=4\left(a_n-\frac{1}{3}\right)$ と変形できる。

数列 $\left\{a_n-\frac{1}{3}\right\}$ は初項 $\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=1$，

公比 4 の等比数列より，$a_n-\frac{1}{3}=1\cdot 4^{n-1}$

$a_n=4^{n-1}+\frac{1}{3}$

答 $a_n=4^{n-1}+\frac{1}{3}$

(4) $a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n+2^n$　両辺を 2^{n+1} でわると，

$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$　$\frac{a_n}{2^n}=b_n$ とおくと，

$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{2}$

$b_1=1$ より，$b_n=1+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(n+1)$

$a_n=2^n\cdot b_n=2^{n-1}(n+1)$

答 $a_n=2^{n-1}(n+1)$

2 数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和をS_nとすると，$S_n=2a_n-1$ が成り立つ。このとき，数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。　（14点）

$n=1$ のとき，$a_1=S_1=2a_1-1$ より，$a_1=1$ ……①

$n\geqq 2$ のとき，$a_n=S_n-S_{n-1}$ より，$a_n=2a_n-1-(2a_{n-1}-1)$　$a_n=2a_{n-1}$ ……②

①，②より，数列$\{a_n\}$は初項 1，公比 2 の等比数列

よって，$a_n=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$

答 $a_n=2^{n-1}$

3 n が自然数のとき，次の等式が成り立つことを数学的帰納法によって証明せよ。　（15点）

$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$

［証明］　i）$n=1$ のとき，左辺=1，右辺=1 で成り立つ。

ii）$n=k$ のとき，成り立つと仮定して，両辺に $2(k+1)-1=2k+1$ を加えて，

$1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ。i），ii）より，すべての自然数について成り立つ。

4 n が自然数のとき，次の不等式が成り立つことを数学的帰納法によって証明せよ。　（15点）

$3^n>n(n+1)$

［証明］　i）$n=1$ のとき，左辺=3，右辺=2 で成り立つ。

ii）$n=k$ のとき，成り立つと仮定して，両辺に 3 をかけて，$3^{k+1}>3k(k+1)$

ここで，$k\geqq 1$ より，$3k(k+1)-(k+1)(k+2)=2(k^2-1)\geqq 0$

よって，$3^{k+1}>(k+1)(k+2)$ であり，$n=k+1$ のときも成り立つ。

i），ii）より，すべての自然数について成り立つ。