1　ベクトルの演算

氏名		得点	/100

1 次の計算をせよ。　（各10点×2）

(1)　$3\vec{a}-(2\vec{a}-\vec{b})$

(2)　$2(4\vec{a}-\vec{b})-3(\vec{a}+2\vec{b})$

2 次の式を満たすベクトル $\vec{x}$, $\vec{y}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。　（各15点×2）

(1)　$4(\vec{a}-\vec{x})=3(\vec{b}-2\vec{x})$

(2)　$\begin{cases} \vec{x}-2\vec{y}=\vec{a} \\ 3\vec{x}+\vec{y}=\vec{b} \end{cases}$

3 AB＝6，AD＝8 の長方形ABCDがある。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{BD}$ と平行な単位ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。　（20点）

4 平行四辺形ABCDの辺BC，CDの中点をそれぞれM，Nとし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。　（各15点×2）

(1)　$\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AN}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2)　$\vec{a}$，$\vec{b}$ をそれぞれ $\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AN}$ で表せ。

2　ベクトルの成分

氏名		得点	/100

1 $\vec{a}=(2,\ -1)$，$\vec{b}=(-3,\ 4)$ のとき，次の問いに答えよ。（各15点×3）

(1) $3\vec{a}+2\vec{b}$ の成分を求めよ。

(2) $\vec{a}-\vec{b}$ の大きさを求めよ。

(3) $\vec{a}+\vec{b}$ と同じ向きの単位ベクトルの成分を求めよ。

2 座標平面上に3点A$(1,\ 1)$，B$(2,\ -1)$，C$(x,\ 5)$があるとき，次の問いに答えよ。（各15点×2）

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$の成分と大きさを求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$が平行のとき，$x$の値を求めよ。

3 $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$ のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値とそのときの実数 t の値を求めよ。（25点）

# 3　ベクトルの内積	氏名		得点	/100

1 $\vec{a}=(-2,\ 1)$, $\vec{b}=(3,\ 1)$ のとき，次の問いに答えよ。　（各10点×2）

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2)　ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を求めよ。

2 $\vec{a}=(x,\ 4)$, $\vec{b}=(2,\ -3)$, $\vec{c}=(4,\ -2)$ のとき，次の問いに答えよ。　（各10点×2）

(1)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直になるように x の値を定めよ。

(2)　$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{c}$ が平行になるように x の値を定めよ。

3 3点 O(0, 0)，A(3, 3)，B(−2, 4)を頂点とする△OABにおいて，次の問いに答えよ。

(1)　cos∠AOBを求めよ。

(2)　△OABの面積を求めよ。　（各15点×2）

4 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|4\vec{a}-\vec{b}|=7$ のとき，次の問いに答えよ。　（各15点×2）

(1)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(2)　$|\vec{a}+2\vec{b}|$ の値を求めよ。

4　位置ベクトル

氏名		得点	/100

1　Oを定点とし，点A，Bの位置ベクトルをそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$とするとき，線分ABを次のように分ける点Pの位置ベクトル$\vec{p}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。（各10点×2）

(1)　ABを2：3に内分する点P

(2)　ABを2：1に外分する点P

2　△ABCにおいて，重心をG，その平面上の任意の点をPとするとき，$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{PG}$が成り立つことを証明せよ。（20点）

3　△OABにおいて，辺OAを1：2に内分する点をP，辺OBの中点をQとし，BPとAQの交点をRとするとき，$\overrightarrow{OR}$を$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$で表せ。（20点）

4　△ABCと同じ平面上の点Pが等式$\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$を満たしているとき，次の問いに答えよ。（各20点×2）

(1)　点Pはどんな位置にあるか。

(2)　△PAB，△PBC，△PCAの面積の比を求めよ。

# 5　ベクトルの応用	氏名		得点	/100

1 次の直線の方程式を求めよ。（各15点×2）

(1) 点(2, 1)を通り，$\vec{d}=(3,\ -2)$ に平行な直線

(2) 点(2, 3)を通り，$\vec{n}=(-1,\ 4)$ に垂直な直線

2 点A$(\vec{a})$を中心とする半径3の円のベクトル方程式を求めよ。（10点）

3 直線 l : $x-3y+2=0$ がある。点A(2, −2)から直線 l に下ろした垂線の足をHとするとき，点Hの座標を求めよ。（20点）

4 △OABにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とするとき，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ で表される点Pの存在範囲を，次の各場合について図示せよ。（各20点×2）

(1) $s+t=2$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

(2) $2s+t\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

6　空間のベクトル

氏名		得点	/100

1 点(2，−1，3)に対して，次の点の座標を求めよ。　(各10点×4)

(1)　xy平面に関して対称な点　(2)　z 軸に関して対称な点

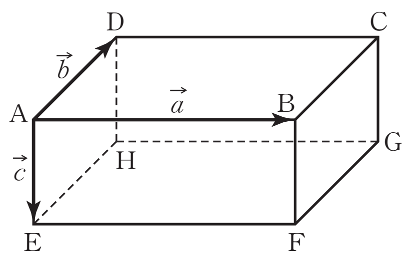
(3)　原点に関して対称な点　(4)　平面 $y=1$ に関して対称な点

2 次の点の座標を求めよ。　(各10点×2)

(1)　2点A(3，2，−1)，B(4，1，3)から等距離にある y 軸上の点P

(2)　3点A(2，2，3)，B(5，−3，1)，C(−4，7，2)を頂点とする△ABCの重心G

3 右の図の直方体において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。　(各10点×4)



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{CF}}$　(4)　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$

7　空間ベクトルの成分

氏名		得点	/100

1 $\vec{a}=(3,\ 1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ -4,\ 3)$，$\vec{c}=(x,\ y,\ -1)$ について，次の問いに答えよ。　(各15点×4)

(1)　$2\vec{a}+\vec{b}$ の成分を求めよ。

(2)　$|\vec{a}+\vec{b}|$ を求めよ。

(3)　$\vec{b}-\vec{a}$ と $\vec{c}$ が平行になるとき，x，y の値を求めよ。

(4)　$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルの成分を求めよ。

2 3点A$(1,\ 3,\ -2)$，B$(x,\ -1,\ 4)$，C$(2,\ y,\ 6)$について，次の問いに答えよ。　(各20点×2)

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=8$ のとき，x の値を求めよ。

(2)　3点A，B，Cが一直線上にあるとき，x，y の値を求めよ。

# 8　空間ベクトルの内積	氏名		得点	/100

1 $\vec{a}=(2,\ -2,\ -4)$，$\vec{b}=(-2,\ -1,\ 1)$ について，次の問いに答えよ。　(各15点×2)

(1)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を求めよ。

(2)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ。

2 3点A$(-1,\ 3,\ 2)$，B$(0,\ 5,\ 3)$，C$(1,\ 4,\ 1)$について，次の問いに答えよ。　(各15点×2)

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の内積を求めよ。

(2)　△ABCの面積を求めよ。

3 1辺の長さが2の正四面体ABCDについて，次の問いに答えよ。　(各20点×2)

(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ のなす角を求めよ。

9　空間の位置ベクトル

氏名		得点	/100

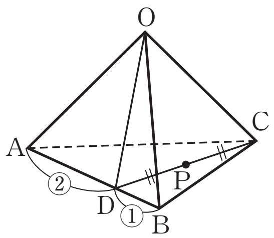
1　Oを定点とし，空間の3点A，B，Cの位置ベクトルをそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$とするとき，次の位置ベクトルを$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$で表せ。　（各10点×3）

(1)　線分ABを1：2に内分する点P($\vec{p}$)

(2)　線分BCを3：1に外分する点Q($\vec{q}$)

(3)　△ABCの重心G($\vec{g}$)

2　四面体OABCに対し，等式$\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{BP}+3\overrightarrow{CP}=\vec{0}$を満たす点Pはどのような位置にあるか。　（25点）



3　立方体ABCD−EFGHにおいて，辺AB，AD，FBを2：1に内分する点をそれぞれP，Q，Rとする。このとき$\overrightarrow{PQ}$と$\overrightarrow{PR}$のなす角を求めよ。　（25点）

4　四面体ABCDにおいて，辺AB，BC，CD，DAの中点をそれぞれP，Q，R，Sとする。このとき，線分PRの中点と線分QSの中点は一致することを示せ。　（20点）

10　空間ベクトルの応用

氏名		得点	/100

1 直方体ABCD−EFGHにおいて，対角線BHと対角線DFの交点をPとする。このとき，3点A，P，Gは一直線上にあることを示せ。（20点）

2 四面体OABCにおいて，辺OAの中点をPとし，辺OB，OCを3：2に内分する点をそれぞれQ，Rとする。△PQRの重心をGとし，直線OGと△ABCの交点をSとするとき，OG：GSを求めよ。（30点）

3 3点A(1，0，1)，B(0，−2，0)，C(2，1，−1)の定める平面をαとし，原点Oから平面αに下ろした垂線の足をHとするとき，点Hの座標を求めよ。（30点）

4 球面$(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=5$が$xy$平面と交わってできる図形の方程式を求めよ。（20点）

1　ベクトルの演算

氏名		得点	/100

1 次の計算をせよ。 (各10点×2)

(1) $3\vec{a}-(2\vec{a}-\vec{b})$

与式 $=3\vec{a}-2\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}+\vec{b}$

$\vec{a}+\vec{b}$

(2) $2(4\vec{a}-\vec{b})-3(\vec{a}+2\vec{b})$

与式 $=8\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{a}-6\vec{b}=5\vec{a}-8\vec{b}$

$5\vec{a}-8\vec{b}$

2 次の式を満たすベクトル $\vec{x}$, $\vec{y}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。 (各15点×2)

(1) $4(\vec{a}-\vec{x})=3(\vec{b}-2\vec{x})$

$4\vec{a}-4\vec{x}=3\vec{b}-6\vec{x}$

$2\vec{x}=-4\vec{a}+3\vec{b}$

$\vec{x}=-2\vec{a}+\dfrac{3}{2}\vec{b}$

(2) $\begin{cases}\vec{x}-2\vec{y}=\vec{a}\ \cdots①\\ 3\vec{x}+\vec{y}=\vec{b}\ \cdots②\end{cases}$

①+②×2 より，$\vec{x}=\dfrac{1}{7}\vec{a}+\dfrac{2}{7}\vec{b}$

①×3−② より，$\vec{y}=-\dfrac{3}{7}\vec{a}+\dfrac{1}{7}\vec{b}$

$\vec{x}=\dfrac{1}{7}\vec{a}+\dfrac{2}{7}\vec{b},\ \vec{y}=-\dfrac{3}{7}\vec{a}+\dfrac{1}{7}\vec{b}$

3 AB=6，AD=8 の長方形ABCDがある。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{BD}$ と平行な単位ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。 (20点)

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$　$|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{6^2+8^2}=10$ より，

$\overrightarrow{BD}$ と平行な単位ベクトルは，$\pm\dfrac{\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BD}|}=\pm\dfrac{1}{10}(\vec{b}-\vec{a})$

$\pm\dfrac{1}{10}(\vec{b}-\vec{a})$

4 平行四辺形ABCDの辺BC，CDの中点をそれぞれM，Nとし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。 (各15点×2)

(1) $\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AN}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{a}$

$\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b},\ \overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$

(2) $\vec{a}$，$\vec{b}$ をそれぞれ $\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AN}$ で表せ。

$\begin{cases}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}=\overrightarrow{AM}\\ \dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AN}\end{cases}$ を連立させて，$\begin{cases}\vec{a}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AM}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AN}\\ \vec{b}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}+\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AN}\end{cases}$

$\vec{a}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AM}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AN}$

$\vec{b}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}+\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AN}$

2　ベクトルの成分

氏名		得点	/100

1 $\vec{a}=(2,\ -1)$，$\vec{b}=(-3,\ 4)$ のとき，次の問いに答えよ。（各15点×3）

(1)　$3\vec{a}+2\vec{b}$ の成分を求めよ。

$3\vec{a}+2\vec{b}=3(2,\ -1)+2(-3,\ 4)$

$=(6,\ -3)+(-6,\ 8)=(0,\ 5)$

$(0,\ 5)$

(2)　$\vec{a}-\vec{b}$ の大きさを求めよ。

$\vec{a}-\vec{b}=(2,\ -1)-(-3,\ 4)=(5,\ -5)$ より，

$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}$

$5\sqrt{2}$

(3)　$\vec{a}+\vec{b}$ と同じ向きの単位ベクトルの成分を求めよ。

$\vec{a}+\vec{b}=(-1,\ 3)$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{10}$ より，

$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(-1,\ 3)=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}},\ \dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$

$\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{10},\ \dfrac{3\sqrt{10}}{10}\right)$

2 座標平面上に 3 点A(1，1)，B(2，−1)，C(x，5)があるとき，次の問いに答えよ。（各15点×2）

(1)　$\overrightarrow{AB}$の成分と大きさを求めよ。

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=(2,\ -1)-(1,\ 1)=(1,\ -2)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

$\overrightarrow{AB}=(1,\ -2)$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{5}$

(2)　$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$が平行のとき，x の値を求めよ。

$\overrightarrow{AB}=(1,\ -2)$，$\overrightarrow{AC}=(x-1,\ 4)$

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ より，$(x-1,\ 4)=k(1,\ -2)$

$\begin{cases} x-1=k \\ 4=-2k \end{cases}$ より，$k=-2$，$x=-1$

$x=-1$

3 $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$ のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値とそのときの実数 t の値を求めよ。（25点）

$\vec{a}+t\vec{b}=(1,\ 2)+t(3,\ 4)=(1+3t,\ 2+4t)$

$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(1+3t)^2+(2+4t)^2=25t^2+22t+5=25\left(t+\dfrac{11}{25}\right)^2+\dfrac{4}{25}$

よって，$t=-\dfrac{11}{25}$ のとき，最小値 $\sqrt{\dfrac{4}{25}}=\dfrac{2}{5}$ をとる。

$t=-\dfrac{11}{25}$ のとき，最小値 $\dfrac{2}{5}$

3　ベクトルの内積

氏名		得点	/100

1 $\vec{a}=(-2,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ 1)$ のとき，次の問いに答えよ。（各10点×2）

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\times3+1\times1$

$=-5$

-5

(2) ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を求めよ。

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-5}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ より，$\theta=135°$

$135°$

2 $\vec{a}=(x,\ 4)$，$\vec{b}=(2,\ -3)$，$\vec{c}=(4,\ -2)$ のとき，次の問いに答えよ。（各10点×2）

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直になるように x の値を定めよ。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ より，$2x-12=0$

よって，$x=6$

$x=6$

(2) $\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{c}$ が平行になるように x の値を定めよ。

$\vec{a}+\vec{b}=(x+2,\ 1)$　平行条件より，$(x+2)\times(-2)-1\times4=0$

よって，$x=-4$

$x=-4$

3 3点O(0，0)，A(3，3)，B(−2，4)を頂点とする△OABにおいて，次の問いに答えよ。（各15点×2）

(1) $\cos\angle AOB$ を求めよ。

$\cos\angle AOB=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

(2) △OABの面積を求めよ。

$\sin\angle AOB=\sqrt{1-\cos^2\angle AOB}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\angle AOB=9$

9

4 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|4\vec{a}-\vec{b}|=7$ のとき，次の問いに答えよ。（各15点×2）

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

$|4\vec{a}-\vec{b}|^2=16|\vec{a}|^2-8\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=16\times2^2-8\vec{a}\cdot\vec{b}+3^2=49$ より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

よって，$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{2}$

(2) $|\vec{a}+2\vec{b}|$ の値を求めよ。

$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=2^2+4\times3+4\times3^2=52$

よって，$|\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{13}$

$2\sqrt{13}$

4　位置ベクトル

氏名		得点	/100

1　Oを定点とし，点A，Bの位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ とするとき，線分ABを次のように分ける点Pの位置ベクトル $\vec{p}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。（各10点×2）

(1)　ABを2：3に内分する点P

$\vec{p}=\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}}{2+3}$

$\vec{p}=\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}$

(2)　ABを2：1に外分する点P

$\vec{p}=\dfrac{(-1)\vec{a}+2\vec{b}}{2-1}$

$\vec{p}=-\vec{a}+2\vec{b}$

2　△ABCにおいて，重心をG，その平面上の任意の点をPとするとき，$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{PG}$ が成り立つことを証明せよ。（20点）

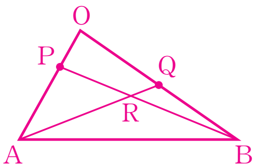
A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$，P$(\vec{p})$とする。

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{a}-\vec{p}+\vec{b}-\vec{p}+\vec{c}-\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{p}$

$3\overrightarrow{PG}=3(\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OP})=3\left(\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}-\vec{p}\right)=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{p}$

よって，$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{PG}$ が成り立つ。

3　△OABにおいて，辺OAを1：2に内分する点をP，辺OBの中点をQとし，BPとAQの交点をRとするとき，$\overrightarrow{OR}$を$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$で表せ。（20点）



AR：RQ$=s：(1-s)$ とすると，$\overrightarrow{OR}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OQ}=(1-s)\overrightarrow{OA}+\dfrac{s}{2}\overrightarrow{OB}$

PR：RB$=t：(1-t)$とすると，$\overrightarrow{OR}=(1-t)\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{OB}=\dfrac{1-t}{3}\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

$\begin{cases} 1-s=\dfrac{1-t}{3} \\ \dfrac{s}{2}=t \end{cases}$ より，$s=\dfrac{4}{5}$，$t=\dfrac{2}{5}$

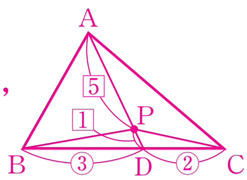
$\overrightarrow{OR}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OB}$

4　△ABCと同じ平面上の点Pが等式 $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を満たしているとき，次の問いに答えよ。（各20点×2）

(1)　点Pはどんな位置にあるか。

$-\overrightarrow{AP}+2(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+3(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$ より，

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{6}=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{5}$



BCを3：2に内分する点をDとするとき，点Pは線分ADを5：1に内分する点

(2)　△PAB，△PBC，△PCAの面積の比を求めよ。

△PBD$=3S$ とすると，

△PAB$=5\times3S=15S$，△PBC$=3S+2S=5S$，△PCA$=5\times2S=10S$

よって，$15S：5S：10S=3：1：2$

3：1：2

5　ベクトルの応用

氏名		得点	/100

1 次の直線の方程式を求めよ。（各15点×2）

(1)　点(2,　1)を通り，$\vec{d}=(3,\ -2)$ に平行な直線

$\begin{cases} x=2+3t \\ y=1-2t \end{cases}$ より t を消去して，$2x+3y-7=0$

$2x+3y-7=0$

(2)　点(2,　3)を通り，$\vec{n}=(-1,\ 4)$ に垂直な直線

求める直線は，$-x+4y+c=0$ とおける。

(2,　3)を通るから，$-2+12+c=0$，$c=-10$

よって，$-x+4y-10=0$

$x-4y+10=0$

2 点A($\vec{a}$)を中心とする半径3の円のベクトル方程式を求めよ。（10点）

円周上の任意の点をP($\vec{p}$)とする。

$|\overrightarrow{AP}|=3$ より，$|\vec{p}-\vec{a}|=3$

$|\vec{p}-\vec{a}|=3$

3 直線 l：$x-3y+2=0$ がある。点A(2,　−2)から直線 l に下ろした垂線の足をHとするとき，点Hの座標を求めよ。（20点）

直線 l の法線ベクトルは，$\vec{n}=(1,\ -3)$

Aを通り l に垂直な直線上の点を$(x,\ y)$とすると，$\begin{cases} x=2+t \\ y=-2-3t \end{cases}$ …①

Aを通り l に垂直な直線と l との交点がHだから，①を l の方程式に代入して，

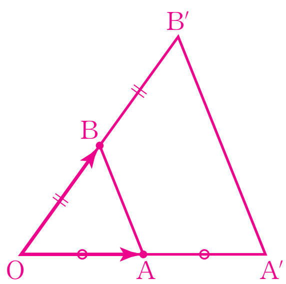
$2+t-3(-2-3t)+2=0$ より，$t=-1$

このとき，$x=1$，$y=1$

H(1,　1)

4 △OABにおいて，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$ とするとき，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ で表される点Pの存在範囲を，次の各場合について図示せよ。（各20点×2）

(1)　$s+t=2$，$s\geqq0$，$t\geqq0$



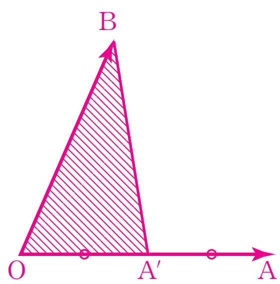
$s+t=2$ より，

$\frac{s}{2}+\frac{t}{2}=1$

$\vec{p}=\frac{s}{2}(2\vec{a})+\frac{t}{2}(2\vec{b})$

よって，線分A′B′

(2)　$2s+t\leqq1$，$s\geqq0$，$t\geqq0$



$\vec{p}=2s\left(\frac{\vec{a}}{2}\right)+t\vec{b}$ より，

△A′BOの周および内部

6　空間のベクトル

氏名		得点	/100

1 点(2, −1, 3)に対して，次の点の座標を求めよ。　(各10点×4)

(1) xy 平面に関して対称な点

(2, −1, −3)

(2) z 軸に関して対称な点

(−2, 1, 3)

(3) 原点に関して対称な点

(−2, 1, −3)

(4) 平面 $y=1$ に関して対称な点

(2, 3, 3)

2 次の点の座標を求めよ。　(各10点×2)

(1) 2点A(3, 2, −1)，B(4, 1, 3)から等距離にある y 軸上の点P

点Pの座標は(0, y, 0)とおける。

AP＝BP より，$AP^2=BP^2$

$(0-3)^2+(y-2)^2+(0+1)^2=(0-4)^2+(y-1)^2+(0-3)^2$

ゆえに，$y=-6$

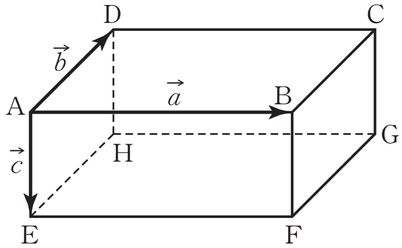
(0, −6, 0)

(2) 3点A(2, 2, 3)，B(5, −3, 1)，C(−4, 7, 2)を頂点とする△ABCの重心G

$G\left(\frac{2+5-4}{3}, \frac{2-3+7}{3}, \frac{3+1+2}{3}\right)=(1, 2, 2)$

(1, 2, 2)

3 右の図の直方体において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。　(各10点×4)



(1) $\overrightarrow{AH}$

$\vec{b}+\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{BD}$

$\vec{b}-\vec{a}$

(3) $\overrightarrow{CF}$

$\vec{c}-\vec{b}$

(4) $\overrightarrow{AG}$

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

7　空間ベクトルの成分

氏名		得点	/100

1 $\vec{a}=(3,\ 1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ -4,\ 3)$，$\vec{c}=(x,\ y,\ -1)$ について，次の問いに答えよ。（各15点×4）

(1)　$2\vec{a}+\vec{b}$ の成分を求めよ。

$2\vec{a}+\vec{b}=2(3,\ 1,\ 2)+(1,\ -4,\ 3)$

$=(6,\ 2,\ 4)+(1,\ -4,\ 3)$

$=(7,\ -2,\ 7)$

$(7,\ -2,\ 7)$

(2)　$|\vec{a}+\vec{b}|$ を求めよ。

$\vec{a}+\vec{b}=(4,\ -3,\ 5)$ より，

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{4^2+(-3)^2+5^2}=5\sqrt{2}$

$5\sqrt{2}$

(3)　$\vec{b}-\vec{a}$ と $\vec{c}$ が平行になるとき，x，y の値を求めよ。

$\vec{b}-\vec{a}=(-2,\ -5,\ 1)$

$\vec{c}=k(\vec{b}-\vec{a})$ より，$(x,\ y,\ -1)=k(-2,\ -5,\ 1)$

$k=-1$ だから，$x=2$，$y=5$

$x=2$，$y=5$

(4)　$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルの成分を求めよ。

$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(3,\ 1,\ 2)=\left(\dfrac{3\sqrt{14}}{14},\ \dfrac{\sqrt{14}}{14},\ \dfrac{2\sqrt{14}}{14}\right)$

$\left(\dfrac{3\sqrt{14}}{14},\ \dfrac{\sqrt{14}}{14},\ \dfrac{2\sqrt{14}}{14}\right)$

2 3点A$(1,\ 3,\ -2)$，B$(x,\ -1,\ 4)$，C$(2,\ y,\ 6)$について，次の問いに答えよ。（各20点×2）

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=8$ のとき，x の値を求めよ。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x,\ -1,\ 4)-(1,\ 3,\ -2)=(x-1,\ -4,\ 6)$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=64$ より，$(x-1)^2+(-4)^2+6^2=64$，$(x-1)^2=12$

$x-1=\pm\sqrt{12}=\pm2\sqrt{3}$ より，$x=1\pm2\sqrt{3}$

$x=1\pm2\sqrt{3}$

(2)　3点A，B，Cが一直線上にあるとき，x，y の値を求めよ。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x-1,\ -4,\ 6)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,\ y-3,\ 8)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より，$(x-1,\ -4,\ 6)=k(1,\ y-3,\ 8)$

$\begin{cases} x-1=k \\ -4=k(y-3) \\ 6=8k \end{cases}$ より，$k=\dfrac{3}{4}$，$x=\dfrac{7}{4}$，$y=-\dfrac{7}{3}$

$x=\dfrac{7}{4}$，$y=-\dfrac{7}{3}$

8　空間ベクトルの内積

氏名		得点	/100

1 $\vec{a}=(2,\ -2,\ -4)$，$\vec{b}=(-2,\ -1,\ 1)$ について，次の問いに答えよ。（各15点×2）

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を求めよ。

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{2\times(-2)+(-2)\times(-1)+(-4)\times 1}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-4)^2}\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+1^2}}=-\frac{1}{2}$$

$0°\leqq\theta\leqq 180°$ より，$\theta=120°$

120°

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ。

$\vec{e}=(x,\ y,\ z)$ とする。$\vec{a}\cdot\vec{e}=0$ より，$2x-2y-4z=0$ …①

$\vec{b}\cdot\vec{e}=0$ より，$-2x-y+z=0$ …②　$|\vec{e}|=1$ より，$x^2+y^2+z^2=1$ …③

①，②，③より，$(x,\ y,\ z)=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(1,\ -1,\ 1)$

$\vec{e}=\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\ \mp\frac{\sqrt{3}}{3},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

（複号同順）

2 3点A$(-1,\ 3,\ 2)$，B$(0,\ 5,\ 3)$，C$(1,\ 4,\ 1)$について，次の問いに答えよ。（各15点×2）

(1) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の内積を求めよ。

$\overrightarrow{AB}=(0,\ 5,\ 3)-(-1,\ 3,\ 2)=(1,\ 2,\ 1)$

$\overrightarrow{AC}=(1,\ 4,\ 1)-(-1,\ 3,\ 2)=(2,\ 1,\ -1)$

よって，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times 2+2\times 1+1\times(-1)=3$

3

(2) △ABCの面積を求めよ。

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{6})^2\times(\sqrt{6})^2-3^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

3 1辺の長さが2の正四面体ABCDについて，次の問いに答えよ。（各20点×2）

(1) 内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。

$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=2$，$\angle BAC=60°$ より，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times 2\times\cos 60°=2$

2

(2) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ のなす角を求めよ。

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2-2=0$

よって，$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ より，なす角は90°

90°

9　空間の位置ベクトル

氏名		得点	/100

1　Oを定点とし，空間の3点A，B，Cの位置ベクトルをそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$とするとき，次の位置ベクトルを$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$で表せ。　（各10点×3）

(1)　線分ABを1：2に内分する点P$(\vec{p})$

$\vec{p}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$

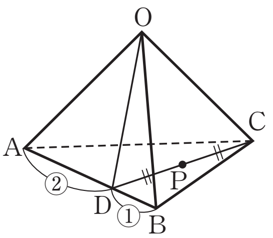
(2)　線分BCを3：1に外分する点Q$(\vec{q})$

$\vec{q}=\dfrac{-\vec{b}+3\vec{c}}{2}$

(3)　△ABCの重心G$(\vec{g})$

$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

2　四面体OABCに対し，等式$\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{BP}+3\overrightarrow{CP}=\vec{0}$を満たす点Pはどのような位置にあるか。　（25点）



$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}+2(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB})+3(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC})=\vec{0}$ より，

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{3}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}$　$\left(\overrightarrow{OD}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{3}\right)$

Pは，ABを2：1に内分する点をDとするとき，線分DCの中点

3　立方体ABCD−EFGHにおいて，辺AB，AD，FBを2：1に内分する点をそれぞれP，Q，Rとする。このとき$\overrightarrow{PQ}$と$\overrightarrow{PR}$のなす角を求めよ。　（25点）

立方体の1辺の長さをaとし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$とする。

$\overrightarrow{PQ}=\dfrac{2}{3}(\vec{b}-\vec{a})$，$\overrightarrow{PR}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{c})$ より，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=\dfrac{2}{9}(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}-|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{c})=-\dfrac{2}{9}a^2$

$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{\dfrac{4}{9}(|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2)}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}a$，$|\overrightarrow{PR}|=\sqrt{\dfrac{1}{9}(|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2)}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}a$

ゆえに，$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|}=-\dfrac{1}{2}$　よって，$\theta=120°$

120°

4　四面体ABCDにおいて，辺AB，BC，CD，DAの中点をそれぞれP，Q，R，Sとする。このとき，線分PRの中点と線分QSの中点は一致することを示せ。　（20点）

PRの中点をMとすると，$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR})=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{2}\right)=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$

QSの中点をNとすると，$\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AS})=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$

ゆえに，$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AN}$　よって，PRの中点とQSの中点は一致する。

10　空間ベクトルの応用

氏名		得点	/100

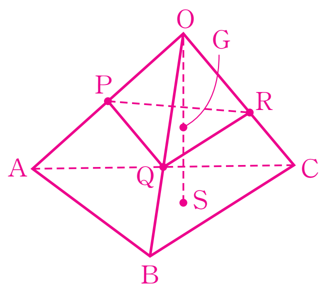
1 直方体ABCD−EFGHにおいて，対角線BHと対角線DFの交点をPとする。このとき，3点A，P，Gは一直線上にあることを示せ。（20点）

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする。

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}}{2}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$，$\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ より，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AG}$

よって，3点A，P，Gは一直線上にある。

2 四面体OABCにおいて，辺OAの中点をPとし，辺OB，OCを3：2に内分する点をそれぞれQ，Rとする。△PQRの重心をGとし，直線OGと△ABCの交点をSとするとき，OG：GS を求めよ。（30点）



$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}}{3}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OB}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OC}\right)$

$=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{OC}$

よって，$\overrightarrow{OS}=k\overrightarrow{OG}=\dfrac{k}{6}\overrightarrow{OA}+\dfrac{k}{5}\overrightarrow{OB}+\dfrac{k}{5}\overrightarrow{OC}$

$\dfrac{k}{6}+\dfrac{k}{5}+\dfrac{k}{5}=1$ より，$k=\dfrac{30}{17}$　$\overrightarrow{OS}=\dfrac{30}{17}\overrightarrow{OG}$ より，

OG：GS＝17：13

17：13

3 3点A(1，0，1)，B(0，−2，0)，C(2，1，−1)の定める平面をαとし，原点Oから平面αに下ろした垂線の足をHとするとき，点Hの座標を求めよ。（30点）

$\overrightarrow{OH}=l\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}=(l+2n,\ -2m+n,\ l-n)$　$l+m+n=1$ …①　と表せる。

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ より，$2l-4m+3n=0$ …②

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ より，$l+2m-5n=0$ …③

①，②，③より，$l=\dfrac{2}{5}$，$m=\dfrac{13}{35}$，$n=\dfrac{8}{35}$

よって，$\overrightarrow{OH}=\left(\dfrac{6}{7},\ -\dfrac{18}{35},\ \dfrac{6}{35}\right)$

$\left(\dfrac{6}{7},\ -\dfrac{18}{35},\ \dfrac{6}{35}\right)$

4 球面 $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=5$ がxy平面と交わってできる図形の方程式を求めよ。（20点）

$z=0$ を代入して，

$(x-1)^2+(y+3)^2+4=5$

$(x-1)^2+(y+3)^2=1$

$(x-1)^2+(y+3)^2=1$，$z=0$