◆本書の特色と構成◆

1 本書は，数学Ⅱ・数学Ｂ（数学Ｂの内容のうち，確率分布と統計的な推測は除く）の２科目について，総まとめと大学入試へ向けての土台づくりを目的として編集されています。

2 全体は10講座から成り，各講座とも１～1.5時間が標準授業時間です。

3 各講座の構成は以下の通りです。

①パターンの修得……例題として取り上げた最も重要でかつ応用範囲の広い典型パターン問題や，その類題・関連問題を説くことで解法に習熟します。

②演　　　　　習……例題レベルを変形した問題や，やや発展した内容の問題を扱うことで，さまざまなタイプの問題に対応できる応用力を養成します。

も　く　じ

第 2 講座　複素数と方程式

パターンの修得

例題 1　複素数の相等

1　次の等式を満たす実数 x，y の値をそれぞれ求めよ。

(1)　$(3-2i)x+(2+3i)y=5+i$　　(2)　$(x+yi)(2-3i)=3+2i$

解法のポイント　$a+bi=c+di \Longleftrightarrow a=c,\ b=d$

2　類題　次の等式を満たす実数 x，y の値をそれぞれ求めよ。

(1)　$(3+i)x-i(2+i)y=13-5i$　　(2)　$\dfrac{(1+2i)(x+yi)}{3+2i}=3-4i$

例題 2　2 次方程式の解の判別

3　2 次方程式 $kx^2-4kx+2k+4=0$ が重解をもつように，定数 k の値を定めよ。また，そのときの重解を求めよ。

解法のポイント　異なる 2 つの実数解 $\Longleftrightarrow D>0$，重解 $\Longleftrightarrow D=0$，
異なる 2 つの虚数解 $\Longleftrightarrow D<0$

4　類題　2 次方程式 $ax^2+x+1=0$ が異なる 2 つの実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

例題 3　解と係数の関係

5　2 次方程式 $x^2+3x+1=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^3+\beta^3$　　(2)　$\dfrac{\beta}{\alpha^2-1}+\dfrac{\alpha}{\beta^2-1}$

解法のポイント　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とすると，
$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

6　類題　2 次方程式 $2x^2-4x+5=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$(\alpha-\beta)^2$　　(2)　$\dfrac{\beta}{\alpha+1}+\dfrac{\alpha}{\beta+1}$

例題 4　2数を解とする2次方程式

7　2次方程式 $x^2+2x+k=0$ の2つの解の比が $3:(-2)$ であるとき，定数 k の値および2つの解を求めよ。

解法のポイント　2つの解を 3α，-2α $(\alpha\neq0)$ とおき，解と係数の関係を用いる。

8　類題　2次方程式 $x^2+kx+18=0$ の2つの解の比が $1:2$ であるとき，定数 k の値および2つの解を求めよ。

例題 5　因数定理

9　整式 $P(x)$ を $x+1$ で割ると余りが5，$x-2$ で割ると余りが -7 である。$P(x)$ を $(x+1)(x-2)$ で割ったときの余りを求めよ。

解法のポイント　$P(x)$ を2次式 $(x+1)(x-2)$ で割ったときの余りは1次式または定数であるから，$ax+b$ とおける。

10　類題　整式 $P(x)$ を $x-2$ で割ると余りが8，$x-3$ で割ると余りが11である。$P(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割ったときの余りを求めよ。

例題 6　高次方程式

11　方程式 $x^3-x+a=0$ の1つの解が2であるとき，定数 a の値および他の解を求めよ。

解法のポイント　$x=2$ を代入する。

12　類題　方程式 $3x^3+ax^2+bx-6=0$ が2つの解 -1，3をもつとき，定数 a，b の値および他の解を求めよ。

13　方程式 $2x^3-5x^2+ax+b=0$ の1つの解が $2+3i$ であるとき，実数の定数 a，b の値および他の2つの解を求めよ。

演習

14　次の 2 次方程式を解け。

(1)　$2x^2-4x+3=0$　　(2)　$(x+1)(x+3)=x(9-2x)$

15　2 次方程式 $ax^2+(a-1)x-1=0$ の解を判別せよ。

16　2 次方程式 $x^2-2x+3=0$ の 2 つの解を α, β とするとき，$\alpha-\dfrac{1}{\beta}$, $\beta-\dfrac{1}{\alpha}$ を 2 つの解とする 2 次方程式を求めよ。

17　次の方程式を解け。

(1)　$x^3-5x+4=0$　　(2)　$2x^3+7x^2+7x+2=0$

18　x^3+ax+b が x^2+3x+2 で割り切れるとき，定数 a，b の値を求めよ。

19　$x^{10}+x$ を x^2-1 で割ったときの余りを求めよ。

20　方程式 $4x^3+(a-4)x-a=0$ が 2 重解をもつとき，定数 a の値を求めよ。

21　**発展**　整式 $P(x)$ を x^2+1 および $x-1$ で割ったときの余りが，それぞれ $x-3$，2 であるとき，$P(x)$ を $(x^2+1)(x-1)$ で割ったときの余りを求めよ。

ヒント　$P(x)$ を 3 次式 $(x^2+1)(x-1)$ で割ったときの余りを ax^2+bx+c とおく。

第3講座　図形と方程式

パターンの修得

例題 1　内分点と外分点，線分の長さ

1　2 点 A$(3,\ -4)$，B$(-2,\ 1)$ を結ぶ線分 AB を 2:1 に内分する点 P および外分する点 Q の座標を求めよ。また，線分 AB の長さを求めよ。

解法のポイント　2 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分を $m:n$ に分ける点の座標は，

$$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$$

2 類題　2 点 A$(-1,\ 4)$，B$(4,\ -6)$ を結ぶ線分 AB を 2:3 に内分する点を P，外分する点を Q とするとき，線分 PQ の長さを求めよ。

例題 2　直線の方程式

3　点 $(1,\ 2)$ を通って，直線 $2x+y+3=0$ に平行な直線と垂直な直線の方程式を求めよ。

解法のポイント　$y=mx+n$ と $y=m'x+n'$ が平行 ⟶ $m=m'$，$n \neq n'$，垂直 ⟶ $mm'=-1$

4 類題　次の直線の方程式を求めよ。

(1)　2 直線 $4x+3y=12$，$5x-4y=6$ の交点と原点を通る直線

(2)　点 $(1,\ -4)$ を通り，2 点 $(0,\ 2)$，$(3,\ 0)$ を通る直線に垂直な直線

例題 3　円の方程式

5　次の円の方程式を求めよ。

(1)　2 点 $(4,\ 5)$，$(2,\ -3)$ を直径の両端とする円

(2)　3 点 $(-3,\ 5)$，$(-3,\ -1)$，$(1,\ 3)$ を通る円

解法のポイント　(1)は $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，(2)は $x^2+y^2+ax+by+c=0$ を使う。

6 類題　次の円の方程式を求めよ。

(1)　点 $(3,\ 0)$ で x 軸に接し，点 $(1,\ 2)$ を通る円

(2)　y 軸上に中心があり，2 点 $(-2,\ 1)$，$(3,\ 2)$ を通る円

(3)　点 $(2,\ 3)$ を中心とし，円 $x^2+y^2+4x-12y+24=0$ に接する円

例題 4　点と直線の距離

7　放物線 $y=x^2$ 上の点Pと直線 $x-y-2=0$ の距離が $\sqrt{2}$ のとき，点Pの座標を求めよ。

解法のポイント　点 $(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離は，$h=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

8 類題　直線 $2x-y-5=0$ を l とし，放物線 $y=x^2$ 上の点をPとする。Pと l の距離が最小となるとき，Pの座標を求めよ。また，そのときのPと l の距離 d を求めよ。

例題 5　円と接線

9　次の円周上の与えられた点における接線の方程式を求めよ。

(1)　$x^2+y^2=25$　$(3,\ 4)$　　(2)　$x^2+y^2=4$　$(1,\ -\sqrt{3})$

解法のポイント　円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は $x_1x+y_1y=r^2$

10 類題　次の接線の方程式を求めよ。

(1)　点 $(4,\ 2)$ を通り，円 $x^2+y^2=10$ に接する接線

(2)　原点から円 $x^2+y^2-2x-6y+8=0$ にひいた接線

例題 6　軌跡

11　2点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(3,\ 0)$ に対し，$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2=16$ を満たす点Pの軌跡を求めよ。

解法のポイント　$\mathrm{P}(x,\ y)$ として，与えられた条件を x，y の式に表す。

12 類題　次のような点Pの軌跡を求めよ。

(1)　2点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(5,\ 0)$ からの距離の比が $1:2$ である点P

(2)　3点 $\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 2)$ に対して，$2\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ となる点P

例題 7　不等式の表す領域

13　次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$x+2y+3>0$　　(2)　$\begin{cases} x^2+y^2\leqq 9 \\ x-y\leqq 0 \end{cases}$

解法のポイント　(2)　連立不等式では，2つの領域の共通部分が求める領域となる。

14 類題　次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$x^2+y^2-2x+4y+4\leqq 0$　　(2)　$(x+y-2)(x^2-y)>0$

演習

15　直線 $3x+y-6=0$ に関して，点 A(5，11) と対称な点 B の座標を求めよ。

16　k を定数とするとき，直線 $(5k+3)x+(7k+8)y-k+7=0$ は k の値に関係なく定点を通る。この定点の座標を求めよ。

17　点 (3，5) を中心とし，円 $x^2+y^2-6x=0$ に接する円の方程式を求めよ。

18　2 円 $x^2+y^2-6x-4y+1=0$，$x^2+y^2=4$ について，次の問いに答えよ。

(1)　2 円は異なる 2 点で交わることを示し，2 円の交点を通る直線の方程式を求めよ。

(2)　2 円の交点を通り，さらに原点を通る円の方程式を求めよ。

19　t が任意の実数値をとって変化するとき，$\begin{cases} x=t+1 \\ y=t^2-2t \end{cases}$ で表される点 P$(x,\ y)$ の軌跡を求めよ。

20　直線 $y=x+1$ が円 $x^2+y^2=4$ によって切り取られる部分の長さを求めよ

21　x，y が 4 つの不等式 $2x+y \leqq 6$，$x+2y \leqq 6$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ を満たすとき，$x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

22　**発展**　実数 x，y が $x^2+y^2+x+y=1$ を満たしながら変化するとき，点 P$(x+y,\ xy)$ の描く図形を図示せよ。

ヒント　$x+y=u$，$xy=v$ とおき，条件式を u，v の式で表す。また，x，y は $t^2-ut+v=0$ の解。

解　答　《select Ⅰ 数学Ⅱ・Bのまとめ》

第1講座　式と証明

[p.2]

1 (1)

$$
\begin{array}{rr}
 & 2x+1 \\ \cline{2-2}
x^2-3x+1 \big) & 2x^3-5x^2+2x+3 \\
 & 2x^3-6x^2+2x \\ \cline{2-2}
 & x^2 \qquad +3 \\
 & x^2-3x+1 \\ \cline{2-2}
 & 3x+2
\end{array}
$$

商　$2x+1$，余り　$3x+2$

(2)

$$
\begin{array}{rr}
 & 3x^2+4x+8 \\ \cline{2-2}
x-2 \big) & 3x^3-2x^2 \qquad +1 \\
 & 3x^3-6x^2 \\ \cline{2-2}
 & 4x^2 \\
 & 4x^2-8x \\ \cline{2-2}
 & 8x+1 \\
 & 8x-16 \\ \cline{2-2}
 & 17
\end{array}
$$

商　$3x^2+4x+8$，余り　17

2 (1)

$$
\begin{array}{rr}
 & 3x^2-6x+6 \\ \cline{2-2}
x+2 \big) & 3x^3 \qquad -6x+11 \\
 & 3x^3+6x^2 \\ \cline{2-2}
 & -6x^2-6x \\
 & -6x^2-12x \\ \cline{2-2}
 & 6x+11 \\
 & 6x+12 \\ \cline{2-2}
 & -1
\end{array}
$$

商　$3x^2-6x+6$，余り　-1

(2)

$$
\begin{array}{rr}
 & x-1 \\ \cline{2-2}
2x^2-x+1 \big) & 2x^3-3x^2 \qquad +3 \\
 & 2x^3-x^2+x \\ \cline{2-2}
 & -2x^2-x+3 \\
 & -2x^2+x-1 \\ \cline{2-2}
 & -2x+4
\end{array}
$$

商　$x-1$，余り　$-2x+4$

3 (1) $\dfrac{x^2-x}{x^2+x-6}\times\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+2x}$

$=\dfrac{x(x-1)}{(x+3)(x-2)}\times\dfrac{(x+2)(x+3)}{x(x+2)}=\boldsymbol{\dfrac{x-1}{x-2}}$

(2) $\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}-\dfrac{x-5}{x^2-5x+6}$

$=\dfrac{(2x-1)(x-3)-(x-5)(x-1)}{(x-2)(x-1)(x-3)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{x+1}{(x-1)(x-3)}}$

4 (1) $\dfrac{x^2}{x^2-9}\div\dfrac{x}{2x^2-5x-3}$

$=\dfrac{x^2}{(x+3)(x-3)}\times\dfrac{(2x+1)(x-3)}{x}$

$=\boldsymbol{\dfrac{x(2x+1)}{x+3}}$

(2) $\dfrac{x+4}{x^2-x-2}-\dfrac{x+3}{x^2-1}$

$=\dfrac{(x+4)(x-1)-(x+3)(x-2)}{(x+1)(x-2)(x-1)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{2}{(x-2)(x-1)}}$

5 両辺に $(2x-1)(x+4)$ を掛けると

$x+13=a(x+4)+b(2x-1)$ より

$x+13=(a+2b)x+4a-b$

これも x についての恒等式であるから

$a+2b=1$，$4a-b=13$ より，$\boldsymbol{a=3}$，$\boldsymbol{b=-1}$

6 両辺に $(x+2)(x+5)$ を掛けると

$2x-5=a(x+2)+b(x+5)$ より，

$2x-5=(a+b)x+2a+5b$

これも x についての恒等式であるから

$a+b=2$，$2a+5b=-5$ より，$\boldsymbol{a=5}$，$\boldsymbol{b=-3}$

[p.3]

7 (1) $a+b=-c$，$b+c=-a$，$c+a=-b$

左辺$=ab(a-b)\cdot(-c)+bc(b-c)\cdot(-a)$

$\quad+ca(c-a)\cdot(-b)$

$\quad=-a^2bc+ab^2c-ab^2c+abc^2$

$\quad-abc^2+a^2bc=0=$右辺

(2) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと，$a=bk$，$c=dk$

$\dfrac{2a+3c}{2b+3d}=\dfrac{2bk+3dk}{2b+3d}=\dfrac{k(2b+3d)}{2b+3d}=k$

$\dfrac{a-c}{b-d}=\dfrac{bk-dk}{b-d}=\dfrac{k(b-d)}{b-d}=k$

よって，$\dfrac{2a+3c}{2b+3d}=\dfrac{a-c}{b-d}$

8 (1) $(ab+b^2)-(ca+c^2)$

$=(b-c)a+(b+c)(b-c)$

$=(a+b+c)(b-c)=0$

よって，$ab+b^2=ca+c^2$

(2) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと，$a=bk$，$c=dk$

$\dfrac{ab}{a^2+b^2}=\dfrac{bk\cdot b}{(bk)^2+b^2}=\dfrac{b^2k}{b^2(k^2+1)}=\dfrac{k}{k^2+1}$

$\dfrac{cd}{c^2+d^2}=\dfrac{dk\cdot d}{d^2k^2+d^2}=\dfrac{d^2k}{d^2(k^2+1)}=\dfrac{k}{k^2+1}$

よって，$\dfrac{ab}{a^2+b^2}=\dfrac{cd}{c^2+d^2}$

9 (1) $a^2-6ab+10b^2=(a-3b)^2+b^2$

ここで，$(a-3b)^2\geqq0$，$b^2\geqq0$ であるから，

$(a-3b)^2+b^2\geqq0$ より，$a^2-6ab+10b^2\geqq0$

等号が成り立つのは，$a-3b=0$ かつ $b=0$

すなわち，$a=b=0$ のとき