数学C

■数学C

●ねらいと特色

本書は，高校の重要科目である数学Cの内容を，基本的な事柄を中心に，じっくり時間をかけて理解することを目標として編集されています。

数学Cは，大学で学ぶより高度な数学や，物理学や経済学など数学以外の学問を学ぶときにも必要とされる重要な科目です。ですから，数学Cの基礎を確実に固めておくことはとても大切なのです。そのためには，基本となる事柄をしっかり把握したうえで，個々の問題の考え方，定理・公式の使い方に慣れることが何よりも大切です。

本書では，各単元の重要な学習項目，新しい学習項目，定理・公式・計算方法などを各項目ごとに例を用いてわかりやすく示したり，例題の考え方や解答を示したりすることで修得が速やかになるように工夫しました。また，理解を確かなものにするために，例や例題のあとでは精選された類題を生徒自身が解くようにしてあります。

さらに，いくつかの関連する項目をまとめて繰り返し問題を解くことで復習が絶えず可能となり，理解が定着できるようにしてあります。

本書を最大限に活用することで，数学Bの基礎力を大いに養ってください。

●構成と使い方

例・**例題**…**例**は，重要な学習項目，新しい学習項目，重要な定理・公式・計算方法などを確実に修得するために設けてあります。
また，**例題**は，新しく学習する項目の基本的かつ最重要な問題です。じっくり時間をかけて読み，理解することが大切です。

類題…**例**や**例題**で学習した考え方，解き方を時間をおかずに自分自身の力で解くことで，理解を確かなものにします。

問題A・B…いくつかの関連する項目をまとめて反復練習します。A問題は類題と同一レベル，B問題はやや発展した問題を収録してあります。

章末問題…各章のまとめの問題です。基本問題・発展問題の２段階構成で，やや程度の高い問題も含まれています。各章の学習の仕上げとしてアタックしてください。

もくじ

第1章　平面上のベクトル

1　ベクトルとその演算 …… 4
2　ベクトルの成分 …… 9
問題Ａ・Ｂ …… 12
3　ベクトルの内積 …… 14
4　位置ベクトル …… 18
問題Ａ・Ｂ …… 20
5　ベクトル方程式 …… 22
6　図形への応用 …… 26
問題Ａ・Ｂ …… 28
章末問題 …… 30

第2章　空間のベクトル

1　空間座標とベクトル …… 32
2　ベクトルの内積 …… 38
3　位置ベクトルと空間図形 …… 40
問題Ａ・Ｂ …… 46
章末問題 …… 48

第3章　複素数平面

1　複素数平面 …… 50
2　複素数の極形式 …… 52
3　ド・モアブルの定理 …… 54
問題 Ａ・Ｂ …… 56
4　図形と複素数(1) …… 58
5　図形と複素数(2) …… 60
6　いろいろな問題 …… 62
問題 Ａ・Ｂ …… 64
章末問題 …… 66

第4章　平面上の曲線

1　方程式の表す曲線 …… 68
2　放物線 …… 70
3　楕円 …… 72
問題 Ａ・Ｂ …… 74
4　双曲線 …… 76
5　2次曲線と直線 …… 78
6　2次曲線の性質 …… 80
問題 Ａ・Ｂ …… 82
7　媒介変数表示(1) …… 84
8　媒介変数表示(2) …… 86
9　極座標と極方程式 …… 88
10　いろいろな問題 …… 90
問題 Ａ・Ｂ …… 92
章末問題 …… 94

重要事項 —— 96
平方・立法・平方根の表 —— 100
三角比の表 —— 101
常用対数の表①② —— 102
正規分布表 —— 104

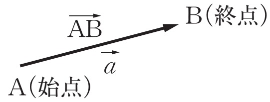
第 1 章　平面上のベクトル

1　ベクトルとその演算

1　ベクトルの相等

❶ **有向線分**について，その位置を問題にしないで，**向き**と**大きさ**だけに着目したものを**ベクトル**という。

❷ 有向線分ABで表されるベクトルを $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$, $\vec{\boldsymbol{a}}$ などと表す。
ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ で，Aを**始点**，Bを**終点**という。

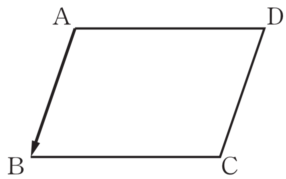


❸ ベクトル $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$, $\vec{a}$ の大きさを，それぞれ $|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|$, $|\vec{\boldsymbol{a}}|$ で表す。

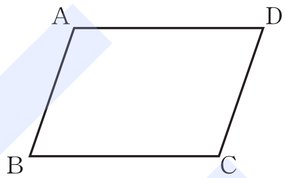
❹ 向きが同じで，大きさが等しいベクトルは**等しい**。
ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が等しいとき，$\vec{\boldsymbol{a}}=\vec{\boldsymbol{b}}$ と書く。

❺ $\vec{a}$ と大きさが等しく，向きが反対のベクトルを $\vec{a}$ の**逆ベクトル**といい，$-\vec{\boldsymbol{a}}$ で表す。

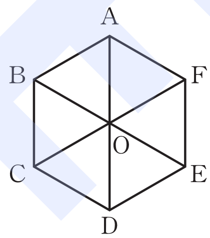
例　右の図の平行四辺形において，等しいベクトル，逆ベクトルをそれぞれ求めてみよう。
たとえば，
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と等しいベクトルは，　$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の逆ベクトルは，　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$,　$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$



1　右の図の平行四辺形ABCDについて，次のようなベクトルをすべて求めよ。
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と等しいベクトル
(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ の逆ベクトル



2　右の図の正六角形ABCDEFについて，次のようなベクトルをすべて求めよ。
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と等しいベクトル
(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の逆ベクトル
(3)　$\overrightarrow{\mathrm{CF}}$ と大きさが等しいベクトル
(4)　$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ と同じ向きのベクトル



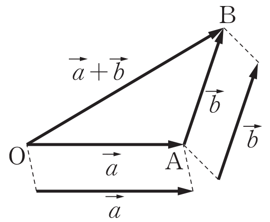
SAMPLE

2 ベクトルの加法

❶　2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ があり，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる点O，A，Bを定めるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**和**といい，$\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}}$ で表す。

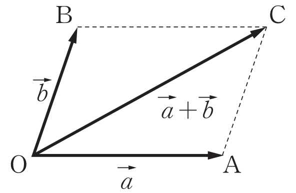
　すなわち，次のことが成り立つ。

$$\overrightarrow{\mathbf{OA}}+\overrightarrow{\mathbf{AB}}=\overrightarrow{\mathbf{OB}}$$



補足　2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ があるとき，始点をそろえて，平行四辺形をつくり，$\vec{a}+\vec{b}$ を表すこともできる。

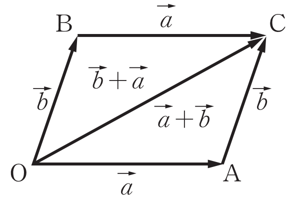
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$　（OCは平行四辺形の対角線）



❷　ベクトルの加法では，交換法則，結合法則が成り立つ。

交換法則　$\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}}$

結合法則　$\boldsymbol{(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})}$

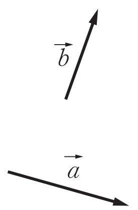


❸　大きさが0で，向きを考えないベクトルを**零ベクトル**といい，$\vec{\mathbf{0}}$ で表す。

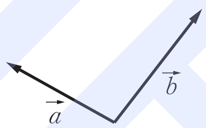
$$\overrightarrow{\mathbf{AA}}=\vec{\mathbf{0}},\quad \boldsymbol{\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}},\quad \boldsymbol{\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}}$$

3　$\vec{a}$, $\vec{b}$ が次のように表されているとき，$\vec{a}+\vec{b}$ を図示せよ。

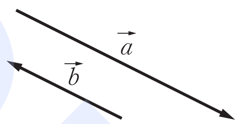
(1)



(2)

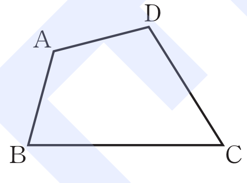


(3)



4　四角形ABCDについて，次の等式が成り立つことを示せ。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\vec{0}$$



SAMPLE

3 ベクトルの減法

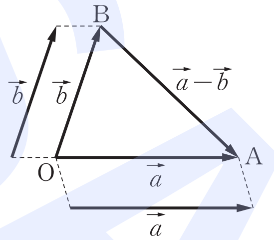
❶　2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ があり，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる点O，A，Bを定めるとき，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ を $\vec{a}$ から $\vec{b}$ を引いた**差**といい，$\boldsymbol{\vec{a}-\vec{b}}$ で表す。

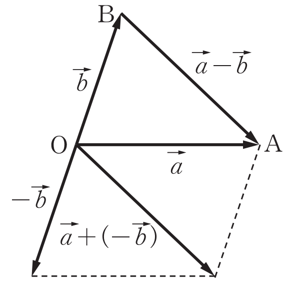
一般に，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから，次のことが成り立つ。

$$\overrightarrow{\mathbf{OA}}-\overrightarrow{\mathbf{OB}}=\overrightarrow{\mathbf{BA}}$$

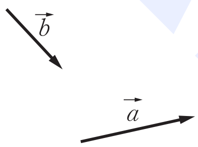
❷　ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の和と差について，次の等式が成り立つ。

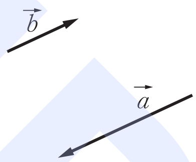
$$\boldsymbol{\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})}$$

❶


❷


5　$\vec{a}$, $\vec{b}$ が次のように表されているとき，$\vec{a}-\vec{b}$ を図示せよ。

(1)


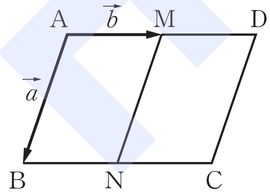
(2)


6　次の等式が成り立つことを示せ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{0}$

7　右の図の平行四辺形ABCDにおいて，点M，Nはそれぞれ辺AD，BCの中点である。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BM}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CM}}$



SAMPLE

4 ベクトルの実数倍

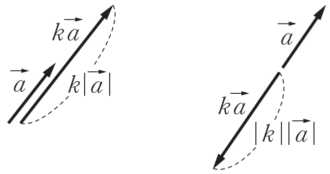
❶ ベクトル $\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき，実数 k に対して，$k\vec{a}$ ($\vec{a}$ の k 倍) を次のように定める。

[1] $k>0$ のとき，$\vec{a}$ と同じ向きで，大きさが $|\vec{a}|$ の k 倍のベクトル

[2] $k<0$ のとき，$\vec{a}$ と反対向きで，大きさが $|\vec{a}|$ の $|k|$ 倍のベクトル

[3] $k=0$ のとき，$\vec{0}$　$(0\vec{a}=\vec{0})$

[1] $k>0$ のとき　[2] $k<0$ のとき



❷ ベクトル $\vec{a}=\vec{0}$ のとき，任意の実数 k に対して，$k\vec{a}=k\vec{0}=\vec{0}$

❸ 実数倍についての基本性質　実数 k，l に対して，

$$\boldsymbol{k(l\vec{a})=kl\vec{a},\quad (k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a},\quad k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}}$$

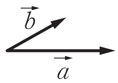
注 ベクトルの加法，減法，実数倍の計算は，整式の計算と同様に行うことができる。

例 $2(\vec{a}+3\vec{b})-(3\vec{a}-2\vec{b})=2\vec{a}+6\vec{b}-3\vec{a}+2\vec{b}=-\vec{a}+8\vec{b}$

8 右の図の $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，次のベクトルを図示せよ。

(1) $2\vec{a}$　(2) $-3\vec{b}$

(3) $2\vec{a}+\vec{b}$　(4) $\vec{a}-3\vec{b}$



9 次の計算をせよ。

(1) $(2\vec{a}-\vec{b})+(3\vec{a}+2\vec{b})$　(2) $3(\vec{a}-2\vec{b})-2(-\vec{a}+4\vec{b})$

5 ベクトルの平行

❶ $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の向きが同じであるか，または反対であるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**平行**であるといい，$\boldsymbol{\vec{a} /\!/ \vec{b}}$ と書く。

❷ $\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき，$\boldsymbol{\vec{a} /\!/ \vec{b} \iff \vec{b}=k\vec{a}}$ **となる実数 $\boldsymbol{k}$ が存在する。**

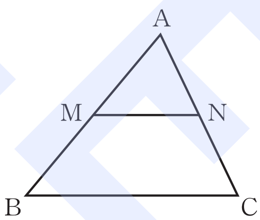
例 ベクトルを利用して，中点連結定理を証明してみよう。

△ABCの辺AB，ACの中点をそれぞれM，Nとすると，

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$$



よって，$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

したがって，$\mathrm{MN} /\!/ \mathrm{BC}$，$\mathrm{MN}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}$

SAMPLE

10　四角形ABCDの対角線の交点をOとする。$2\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=2\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ が成り立つとき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であることを示せ。

6 単位ベクトル

●大きさが1であるベクトルを**単位ベクトル**という。

$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルは，$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ と $-\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

11　次の問いに答えよ。

(1)　$|\vec{a}|=5$ のとき，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルを，$\vec{a}$ を用いて表せ。

(2)　$\vec{e}$ を単位ベクトルとするとき，$\vec{e}$ と向きが同じで，大きさが2であるベクトルを $\vec{e}$ を用いて表せ。

7 ベクトルの分解

●$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が平行でないとき，任意のベクトル $\vec{p}$ は実数 s，t を用いて，$\boldsymbol{\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}}$ の形に，ただ1通りに表される。

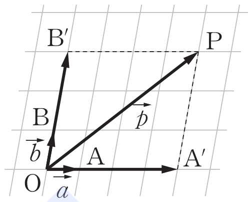
例　右の図において，$\vec{p}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表してみよう。

点Pを通り，直線OB，OAに平行な直線と，直線OA，OBの交点をそれぞれA′，B′とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$

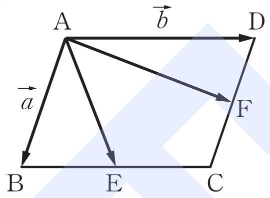
$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=4\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=4\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　　すなわち，$\vec{p}=4\vec{a}+3\vec{b}$



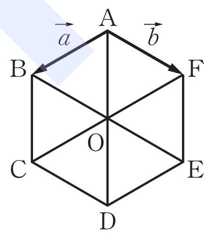
12　平行四辺形ABCDの辺BC，CDの中点をそれぞれE，Fとする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$



13　正六角形ABCDEFにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BF}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　　(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

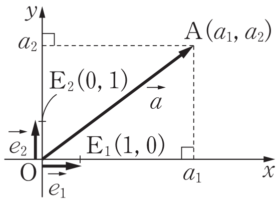


SAMPLE

2　ベクトルの成分

8　ベクトルの成分表示

❶　座標平面上で，x 軸，y 軸の正の向きにとった単位ベクトル $\vec{e_1}=\overrightarrow{\mathrm{OE_1}}$，$\vec{e_2}=\overrightarrow{\mathrm{OE_2}}$ を，**基本ベクトル**という。



❷　基本ベクトル表示　$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点A$(a_1,\ a_2)$をとると，$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$ の形にただ1通りに表せる。

a_1，a_2 を $\vec{a}$ の**成分**といい，a_1 を **x 成分**，a_2 を **y 成分**という。

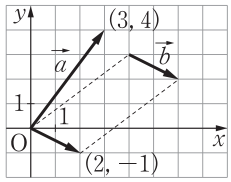
成分表示　$\boldsymbol{\vec{a}=(a_1,\ a_2)}$　　特に，$\vec{e_1}=(1,\ 0)$，$\vec{e_2}=(0,\ 1)$，$\vec{0}=(0,\ 0)$

❸　相等　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき

$$\boldsymbol{\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2}$$

❹　大きさ　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき　$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$

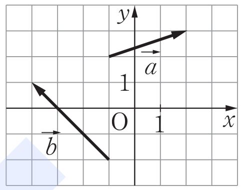
例　右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，ベクトルの成分と大きさを求めてみよう。



$\vec{a}=(3,\ 4)$，　$|\vec{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

$\vec{b}=(2,\ -1)$，　$|\vec{b}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

1　右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ を成分で表し，それぞれの大きさを求めよ。



9　ベクトルの成分による演算

1　和　$\vec{a}+\vec{b}=\boldsymbol{(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)}$

2　差　$\vec{a}-\vec{b}=\boldsymbol{(a_1,\ a_2)-(b_1,\ b_2)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)}$

3　実数倍　$k\vec{a}=\boldsymbol{k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)}$　k は実数

例　$\vec{a}=(-1,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ -2)$ のとき，$3\vec{a}+2\vec{b}$ の成分と大きさをそれぞれ求めてみよう。

$$3\vec{a}+2\vec{b}=3(-1,\ 1)+2(3,\ -2)=(-3,\ 3)+(6,\ -4)$$
$$=(-3+6,\ 3-4)=(3,\ -1)$$
$$|3\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$$

2　$\vec{a}=(-2,\ 1)$，$\vec{b}=(2,\ -3)$ であるとき，次のベクトルを成分を用いて表せ。また，その大きさを求めよ。

(1)　$\vec{a}+\vec{b}$　　(2)　$3\vec{a}-\vec{b}$　　(3)　$-4\vec{a}-3\vec{b}$

SAMPLE

3　$\vec{a}=(1,\ -4)$，$\vec{b}=(5,\ 2)$ のとき，次の等式を満たす $\vec{x}$ の成分を求めよ。

(1)　$2\vec{x}-\vec{a}=\vec{b}$　　　　(2)　$3\vec{a}-\vec{x}=2\vec{x}+6\vec{b}$

10 ベクトルの分解

例題　$\vec{a}=(-1,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ -2)$ のとき，$\vec{p}=(5,\ -3)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形に表せ。

考え方　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおいて，両辺を成分で表す。x 成分，y 成分が等しいことから連立方程式をつくり，それを解く。

解答　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと，

$$(5,\ -3)=s(-1,\ 1)+t(3,\ -2)=(-s+3t,\ s-2t)$$

x 成分，y 成分がそれぞれ等しいから，

$$-s+3t=5,\quad s-2t=-3$$

これを解いて，　$s=1$，　$t=2$

よって，　$\boldsymbol{\vec{p}=\vec{a}+2\vec{b}}$　答

4　$\vec{a}=(3,\ 2)$，$\vec{b}=(4,\ 5)$ のとき，次のベクトルを $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形に表せ。

(1)　$\vec{p}=(1,\ -4)$　　　　(2)　$\vec{q}=(-3,\ 5)$

11 ベクトルの平行

●ベクトルの平行　$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について，

$$\boldsymbol{\vec{a}/\!/\vec{b}} \iff \boldsymbol{(b_1,\ b_2)=k(a_1,\ a_2)} \text{ **となる実数 k が存在する。**}$$

$$\iff a_1b_2-a_2b_1=0$$

例　$\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ x)$ が平行となるとき，実数 x の値を求めてみよう。

$\vec{a}/\!/\vec{b}$ より，$(3,\ x)=k(1,\ 2)$ となる実数 k が存在する。

$(3,\ x)=(k,\ 2k)$ より，　$3=k$，　$x=2k$

よって，　$x=2k=2\times3=6$

別解　$\vec{a}/\!/\vec{b}$ より，　$1\times x-2\times3=0$

よって，　$x-6=0$

したがって，　$x=6$

5　次の2つのベクトルが平行となるように，実数 x の値を定めよ。

(1)　$\vec{a}=(3,\ 6)$，$\vec{b}=(-1,\ x)$　　　　(2)　$\vec{a}=(x+3,\ -x)$，$\vec{b}=(-2,\ 3)$

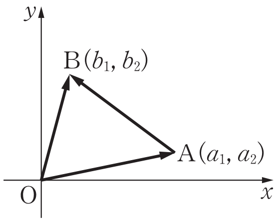
SAMPLE

12 座標と成分表示

●A$(a_1,\ a_2)$，B$(b_1,\ b_2)$ のとき，

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}}=(\boldsymbol{b_1-a_1},\ \boldsymbol{b_2-a_2})$$

$$|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|=\sqrt{(\boldsymbol{b_1-a_1})^2+(\boldsymbol{b_2-a_2})^2}$$



例　2点A$(-2,\ 3)$，B$(4,\ 1)$について，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分と大きさを求めてみよう。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(4-(-2),\ 1-3)$$
$$=(6,\ -2)$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{6^2+(-2)^2}=\sqrt{36+4}$$
$$=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

6　4点O$(0,\ 0)$，A$(-1,\ 3)$，B$(4,\ -2)$，C$(1,\ 2)$について，次のベクトルの成分と大きさを求めよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　　(3)　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

7　3点A$(1,\ 1)$，B$(2,\ 3)$，C$(3,\ 1)$を頂点とする△ABCは二等辺三角形であることを証明せよ。

13 ベクトルと平行四辺形

例 題　4点A$(3,\ 4)$，B$(2,\ 2)$，C$(5,\ 3)$，Dを頂点とする四角形ABCDが平行四辺形であるとき，点Dの座標を求めよ。

考え方　平行四辺形ABCDにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ が成り立つ。

解 答　点Dの座標を$(x,\ y)$とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2-3,\ 2-4)=(-1,\ -2)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=(5-x,\ 3-y)$$

四角形ABCDは平行四辺形であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ より，

$$(-1,\ -2)=(5-x,\ 3-y)$$

よって，　$-1=5-x$，　$-2=3-y$

ゆえに，　$x=6$，$y=5$　　したがって，点Dの座標は，　**(6，5)**　答

8　4点A$(-2,\ 3)$，B$(2,\ -1)$，C$(5,\ 0)$，Dを頂点とする四角形ABCDが平行四辺形であるとき，点Dの座標を求めよ。

SAMPLE

問題 A

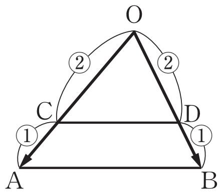
1　**［ベクトルの加法・減法］**　次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}$　　(2)　$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$

2　**［ベクトルの実数倍］**　次の等式を満たす $\vec{x}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(1)　$2\vec{a}+\vec{x}=3\vec{a}-\vec{b}$　　(2)　$3(\vec{a}-2\vec{b}-\vec{x})=2\vec{a}-3\vec{b}$

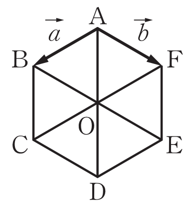
3　**［ベクトルの平行］**　右の図で，OC：CA＝OD：DB＝2：1 のとき，AB∥CD であることを，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ を用いて示せ。



4　**［ベクトルの分解］**　右の図のような正六角形ABCDEFにおいて，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{AC}$　　(2)　$\overrightarrow{BC}$

(3)　$\overrightarrow{CE}$　　(4)　$\overrightarrow{DF}$



5　**［ベクトルの成分］**　$\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(-2,\ 3)$ のとき，次のベクトルを成分で表せ。

(1)　$\vec{a}-2\vec{b}$　　(2)　$(\vec{a}+\vec{b})-(2\vec{a}-3\vec{b})$　　(3)　$2(\vec{a}-\vec{b})+3(\vec{a}+2\vec{b})$

6　**［ベクトルの分解・平行］**　$\vec{a}=(1,\ -3)$，$\vec{b}=(2,\ -1)$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\vec{c}=(9,\ 3)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形に表せ。

(2)　$\vec{a}+\vec{b}$ に平行で，大きさが 3 のベクトル $\vec{d}$ を求めよ。

7　**［ベクトルと平行四辺形・単位ベクトル］**　3 点 A$(2,\ -3)$，B$(1,\ -1)$，C$(-5,\ 1)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{AB}$ と反対向きの単位ベクトルを成分で表せ。

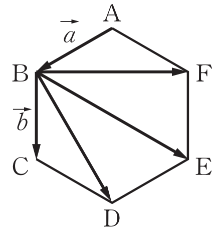
(2)　四角形ABCDが平行四辺形になるとき，頂点Dの座標を求めよ。

SAMPLE

問題 B

1 正六角形ABCDEFにおいて，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{BD}$　　(2) $\overrightarrow{BE}$　　(3) $\overrightarrow{BF}$



2 四角形ABCDと点Pがある。次の等式が成り立つとき，四角形ABCDはどんな四角形か。

$$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{DP}$$

3 ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$\vec{a}+\vec{b}=(3,\ 1)$，$2\vec{a}-\vec{b}=(-1,\ 4)$ のとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を求めよ。

4 異なる3点A$(1,\ 2)$，B$(3,\ a)$，C$(a,\ 5)$が同一直線上にあるとき，定数 a の値を求めよ。

5 0でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について，次のことを証明せよ。

$$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \iff a_1b_2-a_2b_1=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

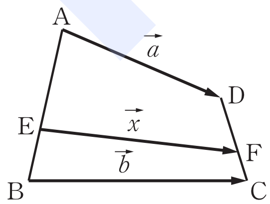
6 **5** の(*)を利用して，次の問いに答えよ。

(1) $\vec{a}=(1+2t,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ t)$ が平行のとき，t の値を求めよ。

(2) $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ x)$ について，$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-2\vec{b}$ が平行のとき，x の値を求めよ。

7 ベクトル $\vec{a}=(4,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ -1)$ のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値とそのときの実数 t の値を求めよ。

8 右の図のような四角形ABCDの辺AB，DCを2：1に内分する点をそれぞれE，Fとし，$\overrightarrow{AD}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{EF}=\vec{x}$ とする。このとき，$\vec{x}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ。



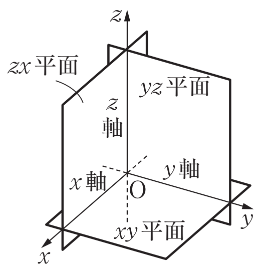
SAMPLE

第 2 章　空間のベクトル

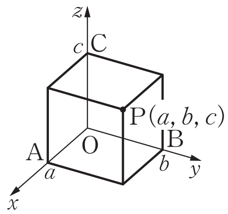
1　空間座標とベクトル

1　空間の点の座標

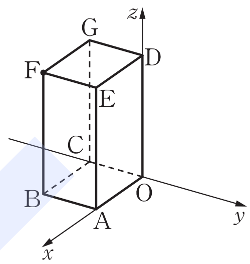
❶　右の図のように，空間の１点Oで互いに直交する３本の直線を定めるとき，これらを **x 軸**，**y 軸**，**z 軸**という。
また，２本の座標軸によって定まる平面を，それぞれ **xy 平面**，**yz 平面**，**zx 平面**といい，これらを**座標平面**という。



❷　空間の点Pに対して，点Pの**座標**$(a,\ b,\ c)$を右の図のように定める。a，b，c をそれぞれ点Pの **x 座標**，**y 座標**，**z 座標**という。また，点Pを **P$(a,\ b,\ c)$** と書く。



1　右の図の直方体OABC−DEFGにおいて，点Fの座標が$(2,\ -1,\ 3)$であるとき，残りの点の座標を求めよ。



2　次の平面，直線，点に関して，点P$(1,\ -2,\ 3)$と対称な点の座標を，それぞれ求めよ。

(1)　xy 平面　　(2)　yz 平面　　(3)　zx 平面
(4)　x 軸　　(5)　y 軸　　(6)　原点

2　２点間の距離

● A$(x_1,\ y_1,\ z_1)$，B$(x_2,\ y_2,\ z_2)$のとき，２点間の距離ABは，

$$\mathbf{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

とくに，原点Oと点Aの距離は，$\mathbf{OA}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$

例　A$(1,\ 1,\ 2)$，B$(0,\ 2,\ 5)$のとき，２点間の距離ABを求めてみよう。

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(0-1)^2+(2-1)^2+(5-2)^2}=\sqrt{11}$$

SAMPLE

3　次の 2 点間の距離を求めよ。

(1)　O(0, 0, 0), P(3, 4, 5)　　(2)　A(1, 0, 1), B(3, 2, 1)

(3)　A(2, −4, 5), B(4, 1, 2)　　(4)　A(−2, 3, −6), B(1, −1, −3)

3　2 点から等距離にある座標軸上の点

例 題　2 点A(1, 2, 3), B(0, 1, −1)から等距離にある x 軸上の点Pの座標を求めよ。

考え方　Pは x 軸上の点だから，P(x, 0, 0)とおける。

解 答　P(x, 0, 0)とおく。AP=BP より，$AP^2=BP^2$

$$AP^2=(x-1)^2+(0-2)^2+(0-3)^2=x^2-2x+14$$

$$BP^2=x^2+(0-1)^2+(0+1)^2=x^2+2$$

であるから，　$x^2-2x+14=x^2+2$

よって，　$2x=12$　　ゆえに，　$x=6$

したがって，　**P(6, 0, 0)**　答

4　次の点の座標を求めよ。

(1)　2 点A(2, 2, 3), B(1, 3, −1)から等距離にある y 軸上の点P

(2)　2 点A(−4, 2, −1), B(2, 1, −2)から等距離にある z 軸上の点Q

(3)　3 点O(0, 0, 0), A(−1, 1, 2), B(1, 2, 1)から等距離にある xy 平面上の点R

4　内分点，外分点の座標

● 2 点A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3)について，

線分ABを $m:n$ に，内分する点，および外分する点の座標は，

内分点　$$\left(\frac{na_1+mb_1}{m+n},\ \frac{na_2+mb_2}{m+n},\ \frac{na_3+mb_3}{m+n}\right)$$

外分点　$$\left(\frac{-na_1+mb_1}{m-n},\ \frac{-na_2+mb_2}{m-n},\ \frac{-na_3+mb_3}{m-n}\right)$$

例　2 点A(1, −2, 3), B(5, 2, −1)について，線分ABを 3：1 に，内分する点，および外分する点を求めてみよう。

内分点　$$\left(\frac{1\times1+3\times5}{3+1},\ \frac{1\times(-2)+3\times2}{3+1},\ \frac{1\times3+3\times(-1)}{3+1}\right)=(4,\ 1,\ 0)$$

外分点　$$\left(\frac{-1\times1+3\times5}{3-1},\ \frac{-1\times(-2)+3\times2}{3-1},\ \frac{-1\times3+3\times(-1)}{3-1}\right)$$

$$=(7,\ 4,\ -3)$$

SAMPLE

5　２点A(1，2，1)，B(2，1，3)について，次の点の座標を求めよ。

(1)　線分ABの中点　　(2)　線分ABを３：２に内分する点

(3)　線分ABを３：２に外分する点　　(4)　線分ABを２：３に外分する点

5 座標平面に平行な平面の方程式

❶　点A$(a,\ b,\ c)$を通り，xy平面に平行な平面の方程式は，　$z=c$

❷　点A$(a,\ b,\ c)$を通り，yz平面に平行な平面の方程式は，　$x=a$

❸　点A$(a,\ b,\ c)$を通り，zx平面に平行な平面の方程式は，　$y=b$

注　平面$z=c$，$x=a$，$y=b$は，それぞれz軸，x軸，y軸に垂直である。

例　点$(1,\ -2,\ 3)$を通り，次の座標平面に平行な平面の方程式を求めてみよう。
xy平面　$z=3$，　yz平面　$x=1$，　zx平面　$y=-2$

6　次の問いに答えよ

(1)　点A$(4,\ -1,\ -6)$を通る，次のような平面の方程式をそれぞれ求めよ。

①　xy平面に平行　　②　yz平面に平行

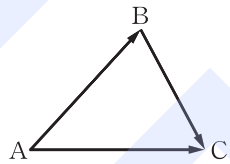
③　y軸に垂直　　④　z軸に垂直

(2)　平面$z=1$に関して点P$(2,\ 3,\ -1)$と対称な点Qの座標を求めよ。

6 空間のベクトル

●空間内の有向線分について，向きと大きさだけに着目したものを**空間のベクトル**という。空間のベクトルの和と差，実数倍などの定義や法則は平面の場合と同様であり，次のことが成り立つ。

1　ベクトルの加法・減法　$\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\overrightarrow{\mathbf{BC}}=\overrightarrow{\mathbf{AC}}$，　$\overrightarrow{\mathbf{AC}}-\overrightarrow{\mathbf{AB}}=\overrightarrow{\mathbf{BC}}$



2　交換法則　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

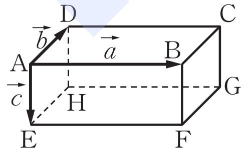
3　結合法則　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

4　零ベクトル　$\overrightarrow{\mathbf{AA}}=\vec{0}$，　$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$，　$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

5　実数倍の基本法則　(k，lは実数とする。)
$k(l\vec{a})=kl\vec{a}$，　$(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$，　$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

6　平行条件　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$のとき，$\vec{a}/\!/\vec{b}\Longleftrightarrow\vec{b}=k\vec{a}$ **となる実数kが存在する。**

7　右の図の直方体において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$とするとき，次のベクトルを$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{GH}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CF}}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{EC}}$　　(4)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AG}}$

SAMPLE

第3章　複素数平面

1　複素数平面

1　複素数平面

(1)　複素数 $z=a+bi$ を座標平面上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ で表すとき，この平面を**複素数平面**という。
また，この点Pを $\mathbf{P}(z)$ または**点 z** と書く。

(2)　x 軸を**実軸**，y 軸を**虚軸**という。

(3)　複素数 z の**共役複素数**を $\overline{z}$ で表す。$z=a+bi$ のとき，$\overline{z}=a-bi$

z が実数　$\Longleftrightarrow$　$\overline{z}=z$

z が純虚数　$\Longleftrightarrow$　$\overline{z}=-z$　　ただし，$z\neq 0$

(4)　複素数 z の**絶対値**を $|z|$ で表す。$z=a+bi$ のとき，$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

1　複素数平面上に次の複素数を表す点を図示せよ。

(1)　$1+3i$　　(2)　$2-i$　　(3)　$(1+i)^2$

2　複素数の性質

(1)　共役複素数

①　$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$　②　$\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$　③　$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$　④　$\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$

(2)　複素数の絶対値

①　$|z|=|-z|=|\overline{z}|$　②　$z\overline{z}=|z|^2$　③　$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$　④　$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$

2　次の複素数の共役複素数を求めよ。

(1)　$(3-2i)+(1+4i)$　　(2)　$(1+i)(2-3i)$

3　次の複素数の絶対値を求めよ。

(1)　$1+\sqrt{3}\,i$　　(2)　$(2+3i)(\sqrt{3}-i)$

SAMPLE

3 複素数の演算

$\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$ とする。

(1) **複素数の実数倍**　3 点 0，α，β が一直線上にある $\iff$ $\beta=k\alpha$ となる実数 k がある

(2) **複素数の和**　$\alpha+\beta=(a+c)+(b+d)i$

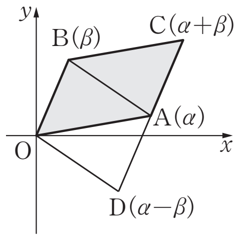
右の図で，四角形OACBは平行四辺形である。

(3) **複素数の差**　$\alpha-\beta=(a-c)+(b-d)i$

右の図で，四角形ODABは平行四辺形である。

(4) **2 点間の距離**

2 点 α，β 間の距離は，$|\beta-\alpha|$



4　次の2点間の距離を求めよ。

(1)　i，$2-3i$

(2)　$3+2i$，$7-5i$

4 共役複素数の性質

例 題　複素数 z について，$|z|=1$ のとき，$z+\dfrac{1}{z}$ は実数であることを証明せよ。

考え方　α が実数 $\iff$ $\overline{\alpha}=\alpha$　が成り立つ。また，$|z|^2=1^2$ より，$z\overline{z}=1$ となる。

証 明　$|z|=1$ の両辺を 2 乗すると，$|z|^2=1^2$　　$z\overline{z}=1$ より，$\overline{z}=\dfrac{1}{z}$

よって，$\overline{z+\dfrac{1}{z}}=\overline{z}+\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\overline{z}+\dfrac{1}{\overline{z}}=\dfrac{1}{z}+z=z+\dfrac{1}{z}$

つまり，$z+\dfrac{1}{z}$ は実数である。

5　複素数 z について，$|z|=1$ のとき，$z^n+\dfrac{1}{z^n}$　(n は自然数)は実数であることを証明せよ。

SAMPLE

2 複素数の極形式

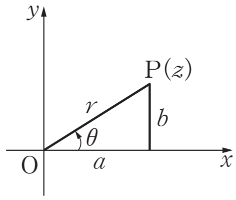
5 複素数の極形式

複素数 $z=a+bi$ を表す点をPとし，$\mathrm{OP}=r$，OPが x 軸(実軸)の正の部分となす角を θ とすると，

$$\boldsymbol{z=r(\cos\theta+i\sin\theta)} \qquad r=\sqrt{a^2+b^2}=|z|$$

θ を z の**偏角**といい，$\theta=\boldsymbol{\arg z}$ で表す。

$z=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ より，$a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$



注　本書では，とくに指示がなければ，角 θ は弧度法(ラジアン)で表された一般角とする。

1　次の複素数を極形式で表せ。

(1)　i　　(2)　$1+i$

(3)　$-\sqrt{3}+i$　　(4)　$-\sqrt{5}$

2　次の複素数の絶対値，偏角を求めよ。

(1)　$2-2i$　　(2)　$2i$

6 極形式の積・商

$\alpha=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$\beta=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ とする。

・**積**　$\alpha\beta=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|=r_1r_2 \qquad \arg\alpha\beta=\arg\alpha+\arg\beta=\theta_1+\theta_2$

・**商**　$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$

$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}=\dfrac{r_1}{r_2} \qquad \arg\dfrac{\alpha}{\beta}=\arg\alpha-\arg\beta=\theta_1-\theta_2$

3　$\alpha=1+\sqrt{3}i$，$\beta=1+i$ のとき，$\alpha\beta$ の極形式を求めよ。また，$\alpha\beta$ の絶対値，偏角を求めよ。ただし，偏角は絶対値が最小のものを答えよ。

4　$\alpha=1+\sqrt{3}i$，$\beta=1+i$ のとき，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ の極形式を求めよ。また，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ の絶対値，偏角を求めよ。ただし，偏角は絶対値が最小のものを答えよ。

SAMPLE

7 極形式による計算

例題　複素数 $z=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ を計算することにより，$\cos 15^\circ$，$\sin 15^\circ$ の値を求めよ。

考え方　z を $a+bi$ の形にする。また，$z=\dfrac{\alpha}{\beta}$ を極形式で表して，実部と虚部を比べる。

解答

$$z=\frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\frac{\sqrt{3}+1}{4}+\frac{\sqrt{3}-1}{4}i \cdots\cdots ①$$

また，　$1+i=\sqrt{2}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$　　$\sqrt{3}+i=2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)$

よって，$z=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}=\dfrac{\sqrt{2}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)}{2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ)$ ……②

①，②の実部，虚部を比べて，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos 15^\circ=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$

ゆえに，$\cos 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ……答

5　複素数 $z=(1+i)(1+\sqrt{3}i)$ を計算することによって，$\cos 105^\circ$，$\sin 105^\circ$ の値を求めよ。

SAMPLE

第4章　平面上の曲線

1　方程式の表す曲線

1　関数 $y=f(x)$ のグラフ

(1)　**関数 $y=f(x)$ のグラフ**

関数 $y=f(x)$ のグラフは，変数 x が関数の定義域を動くとき，座標平面上の点 $(x,\ f(x))$ 全体の作る図形である。

(2)　**1次関数 $y=mx+n$ のグラフ**

・　m の値が一定で，n の値が変化するとき，傾き m の直線群を表す。

・　n の値が一定で，m の値が変化するとき，定点 $(0,\ n)$ を通る直線群を表す。

1　次の関数について，x と y の対応表を完成させ，関数のグラフ上の点 $(x,\ y)$ をとってグラフの概形をかけ。

(1)　$y=x+\dfrac{4}{x}$

x	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
y								

(2)　$y=\dfrac{10}{x^2+2x+2}$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y							

2　方程式 $F(x,\ y)=0$ の表す曲線

x，y の方程式 $F(x,\ y)=0$ が与えられたとき，座標平面上で，座標がこの方程式を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の軌跡を，この**方程式の表す曲線**，または**曲線 $F(x,\ y)=0$** という。

また，方程式 $F(x,\ y)=0$ を，この**曲線の方程式**という。

2　次の方程式の表す曲線をかけ。

(1)　$x^2+y^2-8x-6y=0$

(2)　$3x-12=0$

SAMPLE

3 曲線の移動

方程式 $F(x,\ y)=0$ の表す曲線を，

(1)　直線 $y=x$ に関して対称移動した曲線の方程式は，$F(y,\ x)=0$

(2)　x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した曲線の方程式は，$F(x-p,\ y-q)=0$

3　次の問いに答えよ。

(1)　曲線 $x^2+y=0$ を直線 $y=x$ に関して対称移動した曲線の方程式を求めよ。

(2)　曲線 $x^2+y^2+4x=5$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動した曲線の方程式を求めよ。

4 方程式の表す曲線

例 題　2 つの円 $x^2+y^2-9=0$ ……①，$x^2+y^2-8x+6y+9=0$ ……② について，次の問いに答えよ。

(1)　2 つの円①，②は 2 点で交わることを示せ。

(2)　2 つの円①，②の交点を通る直線の方程式を求めよ。

(3)　2 つの円①，②の交点と原点を通る円の方程式を求めよ。

考え方　2 つの曲線 $f(x,\ y)=0$，$g(x,\ y)=0$ の交点を通る曲線は $f(x,\ y)+kg(x,\ y)=0$ と表される。

解 答　(1)　①を変形すると，$x^2+y^2=9$　　②を変形すると，$(x-4)^2+(y+3)^2=16$

よって，円①の中心は原点$(0,\ 0)$，半径は $r_1=3$

円②の中心は点$(4,\ -3)$，半径は $r_2=4$

中心間の距離は，$d=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$

$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$ が成り立つから，2 つの円①，②は 2 点で交わる。

(2)　①，②の交点を通る図形の方程式は，次のように表される。

$$x^2+y^2-9+k(x^2+y^2-8x+6y+9)=0 \ \cdots\cdots ③$$

③の 2 次の項を消去するために $k=-1$ を代入して，$4x-3y-9=0$ ……$\boxed{答}$

(3)　③の式に $x=0$，$y=0$ を代入して，$k=1$

これを③に代入して，$x^2+y^2-4x+3y=0$ ……$\boxed{答}$

4　2 つの放物線 $y=x^2-2x-3$ ……①，$y=-x^2+1$ ……② について，次の問いに答えよ。

(1)　2 つの放物線①，②の交点を通る直線の方程式を求めよ。

(2)　2 つの放物線①，②の交点と原点を通る放物線の方程式を求めよ。

SAMPLE

2 放物線

5 放物線の方程式

$p \neq 0$ とする。

$y^2=4px$　（x 軸に関して対称）　焦点$(p,\ 0)$，準線 $x=-p$，頂点$(0,\ 0)$

$x^2=4py$　（y 軸に関して対称）　焦点$(0,\ p)$，準線 $y=-p$，頂点$(0,\ 0)$

1　次の放物線について，頂点の座標，軸の方程式を求めよ。

(1)　$y^2=x$　　(2)　$y^2=6x$　　(3)　$x^2=-16y$

2　次の放物線について，焦点の座標，準線の方程式を求めよ。

(1)　$y^2=8x$　　(2)　$y^2=-12x$　　(3)　$x^2=2y$

3　次の放物線の方程式を求めよ。

(1)　焦点$(-2,\ 0)$，準線 $x=2$　　(2)　焦点$\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$，準線 $y=-\frac{1}{4}$

(3)　頂点$(0,\ 0)$，準線 $y=\frac{1}{2}$　　(4)　頂点$(0,\ 0)$，焦点$(6,\ 0)$

6 放物線の平行移動

$p \neq 0$ とする。

放物線 $y^2=4px$，$x^2=4py$ を x 軸方向に m，y 軸方向に n だけ平行移動すると，それぞれ，

$$(y-n)^2=4p(x-m) \qquad (x-m)^2=4p(y-n)$$

4　次の放物線は，原点を頂点とするどんな放物線をどのように平行移動すると得られるか。

(1)　$(y-2)^2=x$　　(2)　$(x+1)^2=-2y$　　(3)　$(y+3)^2=5(x+2)$

SAMPLE

7 放物線と領域

$p \neq 0$ とする。

(1) $y^2 > 4px \iff$ 放物線の外側　$y^2 < 4px \iff$ 放物線の内側

(2) $x^2 > 4py \iff$ 放物線の外側　$x^2 < 4py \iff$ 放物線の内側

5 次の不等式で表される領域を図示せよ。

(1) $y^2 > 2x$　(2) $y^2 < \frac{1}{4}x$　(3) $x^2 \geqq -3y$

8 放物線の方程式の決定

例題 焦点が$(2,\ 3)$，軸が$y=3$で，点$(2,\ 2)$を通る放物線の方程式を求めよ。

考え方 放物線上の点をP，焦点をF，Pと準線の距離をPHとすると，PF＝PH　つまり，$PF^2 = PH^2$が成り立つ。

解答 放物線上の点を$P(x,\ y)$，焦点を$F(2,\ 3)$とする。

また，準線は軸$y=3$に垂直だから，$x=k$とする。

Pから準線に垂線PHを下ろすと，PF＝PH　つまり，$PF^2 = PH^2$だから，

$(x-2)^2+(y-3)^2=(x-k)^2$ ……①

①に$x=2$，$y=2$を代入して，$k=1,\ 3$

①に$k=1$を代入して，$(y-3)^2=2x-3$

①に$k=3$を代入して，$(y-3)^2=-2x+5$

答 $(y-3)^2=2x-3$，$(y-3)^2=-2x+5$

6 焦点が$(-1,\ -2)$，軸が$x=-1$で，点$(1,\ -2)$を通る放物線の方程式を求めよ。

SAMPLE

章末問題

基本問題

1　次の問いに答えよ。

(1)　放物線 $3x+y^2=0$ について，焦点の座標，準線の方程式を求めよ。

(2)　楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{12}=1$ について，焦点の座標，長軸と短軸の長さを求めよ。

(3)　双曲線 $4x^2-y^2=-1$ について，焦点の座標，漸近線の方程式を求めよ。

2　次の２次曲線の方程式を求めよ。

(1)　焦点の座標が $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，準線の方程式が $x=-\dfrac{1}{2}$ である放物線

(2)　焦点の座標が $(\sqrt{3},\ 0)$，$(-\sqrt{3},\ 0)$ で，短軸の長さが４である楕円

(3)　２直線 $y=x$，$y=-x$ を漸近線とし，点 $(4,\ 5)$ を通る双曲線

3　次の問いに答えよ。

(1)　直線 $y=x+m$ と楕円 $3x^2+2y^2=6$ が接するとき，m の値と接点の座標を求めよ。

(2)　双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 上の点 $(3\sqrt{2},\ -2)$ における接線の方程式を求めよ。

(3)　放物線 $y^2=8x$ に点 $(-4,\ 2)$ から引いた接線の方程式を求めよ。

4　次の問いに答えよ。

(1)　曲線 $y^2-8x+4=0$ は放物線であることを示せ。また，その頂点と焦点の座標，および準線の方程式を求めよ。

(2)　曲線 $x^2+4x+4y^2=0$ は楕円であることを示せ。また，その焦点の座標を求めよ。

(3)　曲線 $x^2-y^2-6x-4y=0$ は双曲線であることを示せ。また，その焦点の座標を求めよ

5　t または θ を媒介変数とするとき，次の媒介変数表示はどのような図形を表すか。

(1)　$x=t-3,\ y=-3t+5$　　(2)　$x=\sqrt{2}\cos\theta-1,\ y=\sqrt{2}\sin\theta+2$　　(3)　$x=6t^2,\ y=-3t$

6　極座標がそれぞれ $\left(4,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$，$\left(2,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$ である点A，Bと極Oを頂点とする△OABの面積を求めよ。

7　次の極方程式で表される曲線を，直交座標に関する方程式で表せ。

(1)　$r=\sin\theta$　　(2)　$r^2\sin\theta\cos\theta=1$

SAMPLE

発展問題

8　放物線 $y=x^2$ ……① の焦点をF，放物線①上の x 座標が a である点Pを通る接線を l，l と y 軸との交点をT，Pから出て準線に垂直な直線と x 軸との交点をQとする。

(1)　焦点Fの座標，準線の方程式，および l の方程式を求めよ。

(2)　△PFTはどのような三角形か。

(3)　∠FPTと∠QPTはどのような関係にあるか。

9　楕円 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ と直線 $l:x+y=t$ が共有点をもつような t の値の範囲は $\boxed{}$ である。また，$t=4$ のとき，楕円 C 上の点と直線 l 上の点との距離の最小値は $\boxed{}$ である。

10　点 $(2,\ 0)$ と楕円 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ の周上の点Pを結ぶ直線が再びこの楕円と交わる点をQとする。Pが楕円の周上を動くとき，線分PQの中点の軌跡を求め，図示せよ。

11　実数 x，y が 2 つの不等式 $y\leqq 2x+1$，$x^2+2y^2\leqq 22$ を満たすとき，$x+y$ のとる値の範囲を求めよ。

12　次の問いに答えよ。

(1)　座標平面上の動点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ と $\mathrm{F}(0,\ \sqrt{5})$ との距離が，Pと直線 $y=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ との距離の $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 倍に等しいとき，Pの軌跡は双曲線となることを示し，その漸近線を求めよ。

(2)　(1)の双曲線上の任意の点における接線が，漸近線と交わる点をQ，Rとする。このとき，△OQRの面積は一定であることを示せ。

13　座標平面上を運動する 2 つの点PとQがあり，時刻 t におけるPの座標は $(\cos t,\ \sin t)$，Qの座標は $(4-5\cos t,\ 3\sin t)$ である。

(1)　点P，Qがそれぞれ描く曲線を図示せよ。

(2)　線分PQの長さが最小となる点P，Qの位置を求めよ。

14　極方程式 $r=\dfrac{l}{1-e\cos\theta}$　$(0<e<1)$ で表される曲線は，1つの焦点Fが極Oにある楕円である。この焦点Fを通る 2 つの直線が，この楕円と点A，BおよびC，Dで交わり，AB⊥CD であるとき，$\dfrac{1}{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{\mathrm{CD}}$ は一定であることを示せ。

ヒント　**8**(2)放物線の定義から考える。 **9**後半は，点と直線との距離の公式を利用する。
10直線の方程式を $y=m(x-2)$ として，y を消去する。 **11**領域を図示する。
12(2)$\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ のとき，$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$
13(1)$\sin^2 t+\cos^2 t=1$ を利用して t を消去する。
14$\mathrm{A}(r_1,\ \theta)$ とすると，$\mathrm{B}(r_2,\ \theta+\pi)$，$\mathrm{C}\left(r_3,\ \theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\mathrm{D}\left(r_4,\ \theta+\dfrac{3}{2}\pi\right)$ と表される。

SAMPLE

高校ゼミ
Standard

数学C

解答編

第 1 章 平面上のベクトル

p.4〜8 **❶ ベクトルとその演算**

1 (1) $\overrightarrow{BC}$ (2) $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CB}$

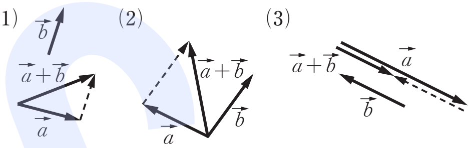
2 (1) $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{FO}$, $\overrightarrow{OC}$

(2) $\overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{EF}$

(3) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{FC}$

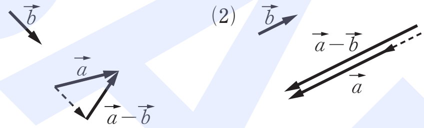
(4) $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{CF}$

3 (1) (2) (3)



4 左辺$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$
$=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}=\vec{0}=$右辺

5 (1) (2)



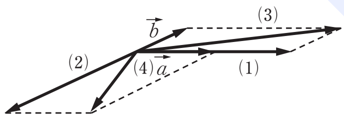
6 (1) 左辺$=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$
$=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}=$右辺

(2) 左辺$=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$
$=$右辺

7 (1) $\boldsymbol{\overrightarrow{BM}}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\vec{b}-\vec{a}}$

(2) $\boldsymbol{\overrightarrow{CM}}=\overrightarrow{NA}=-\overrightarrow{AN}=\boldsymbol{-\vec{a}-\vec{b}}$

8



9 (1) $(2\vec{a}-\vec{b})+(3\vec{a}+2\vec{b})$
$=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{a}+2\vec{b}=\boldsymbol{5\vec{a}+\vec{b}}$

(2) $3(\vec{a}-2\vec{b})-2(-\vec{a}+4\vec{b})$
$=3\vec{a}-6\vec{b}+2\vec{a}-8\vec{b}=\boldsymbol{5\vec{a}-14\vec{b}}$

10 $2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$ より,
$\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OB}=2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$
よって, $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}$ から, $AD /\!/ BC$

11 (1) $\dfrac{1}{5}\vec{a}$, $-\dfrac{1}{5}\vec{a}$ (2) $2\vec{e}$

12 (1) $\boldsymbol{\overrightarrow{AE}}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\boldsymbol{\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}}$

(2) $\boldsymbol{\overrightarrow{AF}}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\boldsymbol{\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{a}}$

13 (1) $\boldsymbol{\overrightarrow{BF}}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\vec{b}-\vec{a}}$

(2) $\boldsymbol{\overrightarrow{AD}}=2\overrightarrow{AO}=\boldsymbol{2(\vec{a}+\vec{b})}$

(3) $\boldsymbol{\overrightarrow{AE}}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=2(\vec{a}+\vec{b})-\vec{a}=\boldsymbol{\vec{a}+2\vec{b}}$

p.9〜11 **❷ ベクトルの成分**

1 $\boldsymbol{\vec{a}=(3,\ 1)}$
$|\vec{a}|=\sqrt{3^2+1^2}=\boldsymbol{\sqrt{10}}$
$\boldsymbol{\vec{b}=(-3,\ 3)}$
$|\vec{b}|=\sqrt{(-3)^2+3^2}=\sqrt{18}=\boldsymbol{3\sqrt{2}}$

2 (1) $\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}}=(-2,\ 1)+(2,\ -3)$
$=(-2+2,\ 1-3)=\boldsymbol{(0,\ -2)}$
$\boldsymbol{|\vec{a}+\vec{b}|}=\sqrt{0^2+(-2)^2}=\boldsymbol{2}$

(2) $\boldsymbol{3\vec{a}-\vec{b}}=3(-2,\ 1)-(2,\ -3)$
$=(-6,\ 3)-(2,\ -3)$
$=(-6-2,\ 3-(-3))=\boldsymbol{(-8,\ 6)}$
$\boldsymbol{|3\vec{a}-\vec{b}|}=\sqrt{(-8)^2+6^2}=\boldsymbol{10}$

(3) $\boldsymbol{-4\vec{a}-3\vec{b}}=-4(-2,\ 1)-3(2,\ -3)$
$=(8,\ -4)-(6,\ -9)$
$=(8-6,\ -4-(-9))=\boldsymbol{(2,\ 5)}$
$\boldsymbol{|-4\vec{a}-3\vec{b}|}=\sqrt{2^2+5^2}=\boldsymbol{\sqrt{29}}$

3 (1) $2\vec{x}-\vec{a}=\vec{b}$ より,
$2\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}=(1+5,\ -4+2)=(6,\ -2)$
よって, $\boldsymbol{\vec{x}=(3,\ -1)}$

(2) $3\vec{a}-\vec{x}=2\vec{x}+6\vec{b}$ より, $3\vec{x}=3\vec{a}-6\vec{b}$
よって, $\boldsymbol{\vec{x}}=\vec{a}-2\vec{b}=(1,\ -4)-2(5,\ 2)$
$=(1-10,\ -4-4)=\boldsymbol{(-9,\ -8)}$

4 (1) $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと,
$(1,\ -4)=s(3,\ 2)+t(4,\ 5)$
$=(3s+4t,\ 2s+5t)$
よって, $\begin{cases}3s+4t=1\\2s+5t=-4\end{cases}$
ゆえに, $s=3$, $t=-2$ より, $\boldsymbol{\vec{p}=3\vec{a}-2\vec{b}}$

(2) $\vec{q}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと,
$(-3,\ 5)=(3s+4t,\ 2s+5t)$
よって, $\begin{cases}3s+4t=-3\\2s+5t=5\end{cases}$
ゆえに, $s=-5$, $t=3$ より, $\boldsymbol{\vec{q}=-5\vec{a}+3\vec{b}}$

5 (1) $\vec{a} /\!/ \vec{b}$ より, $\vec{b}=k\vec{a}$ とおける。
$(-1,\ x)=k(3,\ 6)=(3k,\ 6k)$ より,
$-1=3k$, $x=6k$
よって, $k=-\dfrac{1}{3}$ したがって, $\boldsymbol{x=-2}$

(2) $\vec{a} /\!/ \vec{b}$ より, $\vec{a}=k\vec{b}$ とおける。
$(x+3,\ -x)=k(-2,\ 3)=(-2k,\ 3k)$ より,
$x+3=-2k$, $-x=3k$
よって, $k=3$ したがって, $\boldsymbol{x=-9}$

6 (1) $\boldsymbol{\overrightarrow{OA}=(-1,\ 3)}$
$\boldsymbol{|\overrightarrow{OA}|}=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\boldsymbol{\sqrt{10}}$

(2) $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}}=(4-(-1),\ -2-3)=\boldsymbol{(5,\ -5)}$
$\boldsymbol{|\overrightarrow{AB}|}=\sqrt{5^2+(-5)^2}=\sqrt{50}=\boldsymbol{5\sqrt{2}}$

(3) $\boldsymbol{\overrightarrow{BC}}=(1-4,\ 2-(-2))=\boldsymbol{(-3,\ 4)}$
$\boldsymbol{|\overrightarrow{BC}|}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{25}=\boldsymbol{5}$

SAMPLE

7 $\overrightarrow{AB}=(2-1,\ 3-1)=(1,\ 2)$
$\overrightarrow{BC}=(3-2,\ 1-3)=(1,\ -2)$
$\overrightarrow{CA}=(1-3,\ 1-1)=(-2,\ 0)$ より，
$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，
$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$，
$|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{(-2)^2+0}=\sqrt{4}=2$
よって，△ABC は AB＝BC の二等辺三角形である。

8 点Dの座標を$(x,\ y)$とする。
$\overrightarrow{AB}=(2-(-2),\ -1-3)=(4,\ -4)$
$\overrightarrow{DC}=(5-x,\ -y)$
四角形ABCDは平行四辺形であるから，
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ より，$(4,\ -4)=(5-x,\ -y)$
よって，$4=5-x$，$-4=-y$ より，
$x=1$，$y=4$
したがって，$D(x,\ y)=\boldsymbol{(1,\ 4)}$

p.12 問題A

1 (1) 左辺$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
右辺$=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}$
よって，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}$
(2) $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})$
$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})-(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})$
$=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}=\vec{0}$
よって，$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$

2 (1) $2\vec{a}+\vec{x}=3\vec{a}-\vec{b}$
$\boldsymbol{\vec{x}}=3\vec{a}-\vec{b}-2\vec{a}=\boldsymbol{\vec{a}-\vec{b}}$
(2) $3(\vec{a}-2\vec{b}-\vec{x})=2\vec{a}-3\vec{b}$ より，
$3\vec{a}-6\vec{b}-3\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}$
$-3\vec{x}=-\vec{a}+3\vec{b}$　よって，$\boldsymbol{\vec{x}=\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}}$

3 $\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ より，
$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$
$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$　よって，$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$ より，AB∥CD

4 (1) $\boldsymbol{\overrightarrow{AC}}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}=\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})$
$=\boldsymbol{2\vec{a}+\vec{b}}$
(2) $\boldsymbol{\overrightarrow{BC}}=\overrightarrow{AO}=\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}}$
(3) $\boldsymbol{\overrightarrow{CE}}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{b})-(2\vec{a}+\vec{b})$
$=\boldsymbol{-\vec{a}+\vec{b}}$
(4) $\boldsymbol{\overrightarrow{DF}}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=\vec{b}-2(\vec{a}+\vec{b})$
$=\boldsymbol{-2\vec{a}-\vec{b}}$

5 (1) $\vec{a}-2\vec{b}=(1,\ 2)-(-4,\ 6)=\boldsymbol{(5,\ -4)}$
(2) $(\vec{a}+\vec{b})-(2\vec{a}-3\vec{b})$
$=\vec{a}-2\vec{a}+\vec{b}+3\vec{b}=-\vec{a}+4\vec{b}$
$=(-1,\ -2)+(-8,\ 12)=\boldsymbol{(-9,\ 10)}$
(3) $2(\vec{a}-\vec{b})+3(\vec{a}+2\vec{b})$
$=2\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{a}+6\vec{b}=5\vec{a}+4\vec{b}$
$=(5,\ 10)+(-8,\ 12)=\boldsymbol{(-3,\ 22)}$

6 (1) $\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと，
$(9,\ 3)=s(1,\ -3)+t(2,\ -1)$
$=(s+2t,\ -3s-t)$
よって，$\begin{cases} s+2t=9 \\ -3s-t=3 \end{cases}$
これを解いて，$s=-3$，$t=6$
したがって，$\boldsymbol{\vec{c}=-3\vec{a}+6\vec{b}}$
(2) $\vec{a}+\vec{b}/\!/\vec{d}$ より，$\vec{d}=k(\vec{a}+\vec{b})$ とおける。
$\vec{a}+\vec{b}=(1,\ -3)+(2,\ -1)=(3,\ -4)$ より，
$\vec{d}=k(3,\ -4)=(3k,\ -4k)$　……①
$|\vec{d}|=3$ より，
$\sqrt{(3k)^2+(-4k)^2}=\sqrt{25k^2}=5|k|=3$
よって，$k=\pm\frac{3}{5}$　これを①に代入して
$\boldsymbol{\vec{d}=\left(\pm\frac{9}{5},\ \mp\frac{12}{5}\right)}$　**(複号同順)**

7 (1) $\overrightarrow{AB}=(1,\ -1)-(2,\ -3)=(-1,\ 2)$
$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$
よって，$\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,\ -2)=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$
$=\boldsymbol{\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\ -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}$
(2) $D(x,\ y)$とすると，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ より，
$\overrightarrow{AB}=(-1,\ 2)$，$\overrightarrow{DC}=(-5-x,\ 1-y)$
$\begin{cases} -1=-5-x \\ 2=1-y \end{cases}$ より，$\begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \end{cases}$
よって，**D(−4，−1)**

p.13 問題B

1 (1) $\boldsymbol{\overrightarrow{BD}}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{2\vec{b}-\vec{a}}$
(2) $\boldsymbol{\overrightarrow{BE}}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AB}$
$=2\vec{b}-\vec{a}-\vec{a}=\boldsymbol{-2\vec{a}+2\vec{b}}$
(3) $\boldsymbol{\overrightarrow{BF}}=\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BE}-\vec{b}$
$=-2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{b}=\boldsymbol{-2\vec{a}+\vec{b}}$

2 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{DP}$ より，
$\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{CP}$
よって，$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{PC}$
したがって，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ だから，四角形ABCDは**平行四辺形**である。

3 $\vec{a}+\vec{b}=(3,\ 1)$　……①
$2\vec{a}-\vec{b}=(-1,\ 4)$　……②とする。
①＋② から，$3\vec{a}=(3,\ 1)+(-1,\ 4)=(2,\ 5)$
よって，$\boldsymbol{\vec{a}=\left(\frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\right)}$
これと①から，

$\vec{b}=(3,\ 1)-\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)=\boldsymbol{\left(\dfrac{7}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)}$

4 3点A，B，Cが同一直線上にあるとき，
$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ (k は実数)と表せる。
$\overrightarrow{AB}=(3-1,\ a-2)=(2,\ a-2)$
$\overrightarrow{AC}=(a-1,\ 5-2)=(a-1,\ 3)$ より，
$(2,\ a-2)=k(a-1,\ 3)$
よって，$2=k(a-1)$ ……①，$a-2=3k$ ……②
②より，$a=3k+2$
これを①に代入して，$2=k(3k+2-1)$，
$3k^2+k-2=0$　これを解くと，$k=\dfrac{2}{3},\ -1$
したがって，$k=\dfrac{2}{3}$ のとき，$\boldsymbol{a=4}$，
$k=-1$ のとき，$\boldsymbol{a=-1}$

5 $\vec{a}/\!/\vec{b}$ のとき，$\vec{a}=k\vec{b}$ $(k\neq 0)$ と表せるから，
$(a_1,\ a_2)=k(b_1,\ b_2)$ より，$a_1=kb_1$，$a_2=kb_2$
よって，$a_1b_2-a_2b_1=kb_1\cdot b_2-kb_2\cdot b_1=0$
ゆえに，$\vec{a}/\!/\vec{b} \Longrightarrow a_1b_2-a_2b_1=0$
逆に，$a_1b_2-a_2b_1=0$
すなわち　$a_1b_2=a_2b_1$ ……①とすると，
[1]　$b_1\neq 0$，$b_2\neq 0$ のとき
①の両辺を b_1b_2 で割ると，$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$ より，
$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=k$ $(k\neq 0)$ とおける。
よって，$a_1=b_1k$，$a_2=b_2k$ より，$\vec{a}=k\vec{b}$
と表せるから，$\vec{a}/\!/\vec{b}$
[2]　$b_1=0$，$b_2\neq 0$ のとき
①より，$a_1b_2=0$　$b_2\neq 0$ より，$a_1=0$
このとき，$\vec{a}\neq 0$ より，$a_2\neq 0$
よって，$\vec{a}=(0,\ a_2)=k(0,\ b_2)=k\vec{b}$
と表せるから，$\vec{a}/\!/\vec{b}$
[3]　$b_1\neq 0$，$b_2=0$ のとき
[2]と同様にして，$a_2=0$，$a_1\neq 0$ がいえる。
よって，$\vec{a}=(a_1,\ 0)=k(b_1,\ 0)=k\vec{b}$
と表せるから，$\vec{a}/\!/\vec{b}$
以上より，$\vec{a}/\!/\vec{b} \Longleftrightarrow a_1b_2-a_2b_1=0$

6 (1) $\vec{a}/\!/\vec{b}$ のとき，
$(1+2t)\cdot t-2\cdot 3=0$ より，
$2t^2+t-6=0$　よって，$\boldsymbol{t=-2,\ \dfrac{3}{2}}$
(2) $\vec{a}+\vec{b}=(1+2,\ 2+x)=(3,\ 2+x)$
$\vec{a}-2\vec{b}=(1,\ 2)-2(2,\ x)=(1-4,\ 2-2x)$
$=(-3,\ 2-2x)$
$(\vec{a}+\vec{b})/\!/(\vec{a}-2\vec{b})$ のとき，
$3\cdot(2-2x)-(2+x)(-3)=0$ より，
$6-6x+6+3x=0$　よって，$\boldsymbol{x=4}$

7 $\vec{a}+t\vec{b}=(4,\ 2)+t(3,\ -1)=(4+3t,\ 2-t)$
$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(4+3t)^2+(2-t)^2$
$=10t^2+20t+20$
$=10(t+1)^2+10$
よって，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は $t=-1$ のとき最小で，最小値は10である。
$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq 0$ より，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は $\boldsymbol{t=-1}$ **のとき**最小で，
最小値は $\boldsymbol{\sqrt{10}}$

8 $\vec{x}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\vec{a}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{DF}$ ……①
一方，$\vec{x}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\vec{b}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CF}$ ……②
ここで，$\overrightarrow{EB}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{EA}$，$\overrightarrow{CF}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DF}$ を②に代入すると，$\vec{x}=\vec{b}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{EA}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DF}$ ……③
①＋2×③ より，$3\vec{x}=\vec{a}+2\vec{b}$
よって，$\boldsymbol{\vec{x}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}}$

p.14～17

3 ベクトルの内積

1 (1) $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}}=2\cdot 3\cdot\cos 30^\circ=6\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{3\sqrt{3}}$
(2) $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}}=2\cdot 3\cdot\cos 120^\circ=6\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\boldsymbol{-3}$
(3) $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}}=2\cdot 3\cdot\cos 0^\circ=6\cdot 1=\boldsymbol{6}$
(4) $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}}=2\cdot 3\cdot\cos 180^\circ=6\cdot(-1)=\boldsymbol{-6}$

2 (1) $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}=2\cdot 2\cdot\cos 60^\circ=4\cdot\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{2}$
(2) $\boldsymbol{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}}=\sqrt{3}\cdot 1\cdot\cos 90^\circ=\sqrt{3}\cdot 0=\boldsymbol{0}$
(3) $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}=2\cdot 2\cdot\cos 120^\circ=4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\boldsymbol{-2}$

3 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1\cdot 3+2\cdot 5=\boldsymbol{7}$
(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=5\cdot(-2)+4\cdot 3=\boldsymbol{2}$
(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}\cdot(-2)+1\cdot 2\sqrt{3}=\boldsymbol{0}$

4 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 1+4\cdot(-3)=-10$
$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$
$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$
$\cos\theta=\dfrac{-10}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\dfrac{-10}{10\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
よって，$\boldsymbol{\theta=135^\circ}$
(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 3+1\cdot(-6)=0$
$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$
$|\vec{b}|=\sqrt{3^2+(-6)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$
$\cos\theta=\dfrac{0}{\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{5}}=0$　よって，$\boldsymbol{\theta=90^\circ}$
(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot(1-\sqrt{3})+1\cdot(1+\sqrt{3})=2$
$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$
$|\vec{b}|=\sqrt{(1-\sqrt{3})^2+(1+\sqrt{3})^2}$
$=\sqrt{1-2\sqrt{3}+3+1+2\sqrt{3}+3}$

SAMPLE

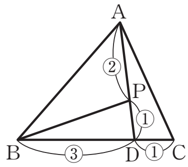
BC上の点で，$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$　よって，3点A，P，Dは一直線上にあり，**AP：PD＝2：1**

(2)　$\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{4}$ より，

BD：DC＝3：1

△PBDの面積をSとすると，

$S=9\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{9}{4}}$



第2章　空間のベクトル

p.32～37

❶ 空間座標とベクトル

1　O(0，0，0)，A(2，0，0)，B(2，−1，0)，C(0，−1，0)，D(0，0，3)，E(2，0，3)，G(0，−1，3)

2　(1)　x，y座標は変わらず，z座標の符号が逆になる。よって，**(1，−2，−3)**

(2)　y，z座標は変わらず，x座標の符号が逆になる。よって，**(−1，−2，3)**

(3)　z，x座標は変わらず，y座標の符号が逆になる。よって，**(1，2，3)**

(4)　x座標は変わらず，y，z座標の符号が逆になる。よって，**(1，2，−3)**

(5)　y座標は変わらず，x，z座標の符号が逆になる。よって，**(−1，−2，−3)**

(6)　x，y，z座標の符号が逆になる。

よって，**(−1，2，−3)**

3　(1)　$\mathrm{OP}=\sqrt{3^2+4^2+5^2}=\sqrt{50}=\mathbf{5\sqrt{2}}$

(2)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(2-0)^2+(1-1)^2}=\sqrt{8}$

$=\mathbf{2\sqrt{2}}$

(3)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(4-2)^2+\{1-(-4)\}^2+(2-5)^2}$

$=\sqrt{2^2+5^2+(-3)^2}=\mathbf{\sqrt{38}}$

(4)　AB

$=\sqrt{\{1-(-2)\}^2+(-1-3)^2+\{-3-(-6)\}^2}$

$=\sqrt{3^2+(-4)^2+3^2}=\mathbf{\sqrt{34}}$

4　(1)　Pはy軸上の点だから，P(0，y，0)とおける。AP＝BPより，$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

$\mathrm{AP}^2=(0-2)^2+(y-2)^2+(0-3)^2$

$=y^2-4y+17$

$\mathrm{BP}^2=(0-1)^2+(y-3)^2+\{0-(-1)\}^2$

$=y^2-6y+11$

よって，$y^2-4y+17=y^2-6y+11$

これを解くと，$y=-3$

したがって，**P(0，−3，0)**

(2)　Qはz軸上の点だから，Q(0，0，z)とおける。

AQ＝BQより，$\mathrm{AQ}^2=\mathrm{BQ}^2$

$\mathrm{AQ}^2=\{0-(-4)\}^2+(0-2)^2+\{z-(-1)\}^2$

$=z^2+2z+21$

$\mathrm{BQ}^2=(0-2)^2+(0-1)^2+\{z-(-2)\}^2$

$=z^2+4z+9$

よって，$z^2+2z+21=z^2+4z+9$

これを解くと，$z=6$　したがって，**Q(0，0，6)**

(3)　Rはxy平面上の点だから，R(x，y，0)とおける。

OR＝ARより，$\mathrm{OR}^2=\mathrm{AR}^2$

よって，

$x^2+y^2=(-1-x)^2+(1-y)^2+(2-0)^2$
これより，$x-y+3=0$ ……①
$\mathrm{OR}=\mathrm{BR}$ より，$\mathrm{OR}^2=\mathrm{BR}^2$
よって，$x^2+y^2=(1-x)^2+(2-y)^2+(1-0)^2$
これより，$x+2y-3=0$ ……②
①，②より，$x=-1$，$y=2$
したがって，$\mathbf{R(-1,\ 2,\ 0)}$

5 (1) $\left(\dfrac{1+2}{2},\ \dfrac{2+1}{2},\ \dfrac{1+3}{2}\right)=\left(\boldsymbol{\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2},\ 2}\right)$

(2) $\left(\dfrac{2\cdot1+3\cdot2}{3+2},\ \dfrac{2\cdot2+3\cdot1}{3+2},\ \dfrac{2\cdot1+3\cdot3}{3+2}\right)$
$=\left(\boldsymbol{\dfrac{8}{5},\ \dfrac{7}{5},\ \dfrac{11}{5}}\right)$

(3) $\left(\dfrac{-2\cdot1+3\cdot2}{3-2},\ \dfrac{-2\cdot2+3\cdot1}{3-2},\ \dfrac{-2\cdot1+3\cdot3}{3-2}\right)$
$=\mathbf{(4,\ -1,\ 7)}$

(4) $\left(\dfrac{-3\cdot1+2\cdot2}{2-3},\ \dfrac{-3\cdot2+2\cdot1}{2-3},\ \dfrac{-3\cdot1+2\cdot3}{2-3}\right)$
$=\mathbf{(-1,\ 4,\ -3)}$

6 (1) ① $z=-6$ ② $x=4$ ③ $y=-1$
④ $z=-6$
(2) Qの x，y 座標はPと変わらないから，Qの座標をQ$(2,\ 3,\ c)$とおく。
Pの z 座標とQの z 座標の中点が $z=1$ であるから，$\dfrac{-1+c}{2}=1$ よって，$c=3$
したがって，$\mathbf{Q(2,\ 3,\ 3)}$

7 (1) $\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\boldsymbol{-\vec{a}}$
(2) $\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{c}-\vec{b}=\boldsymbol{-\vec{b}+\vec{c}}$
(3) $\overrightarrow{\mathrm{EC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}}$
(4) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\vec{b}-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\boldsymbol{-\vec{a}-\vec{c}}$

8 (1) $\overrightarrow{\mathrm{GA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AG}}=-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$
$=\boldsymbol{-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}}$
(2) $\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}=\boldsymbol{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}$
(3) $\overrightarrow{\mathrm{EC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}}$
(4) $\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}=\boldsymbol{\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}}$

9 $\vec{a}=-4\vec{e_1}+5\vec{e_2}-\vec{e_3}$

10 $4-x=1$，$5=3y-1$，$2z+3=5$
よって，$\boldsymbol{x=3,\ y=2,\ z=1}$

11 (1) $|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$
(2) $|\vec{b}|=\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}=\sqrt{49}=\mathbf{7}$
(3) $|\vec{c}|=\sqrt{(-6)^2+(-5)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{64}=\mathbf{8}$

12 (1) $\boldsymbol{\vec{b}-\vec{c}}=(0,\ 1,\ 2)-(3,\ -1,\ 0)$
$=\mathbf{(-3,\ 2,\ 2)}$
$|\boldsymbol{\vec{b}-\vec{c}}|=\sqrt{(-3)^2+2^2+2^2}=\boldsymbol{\sqrt{17}}$
(2) $\boldsymbol{2(-\vec{a}+2\vec{b})}=-2\vec{a}+4\vec{b}$
$=-2(2,\ 0,\ -3)+4(0,\ 1,\ 2)$
$=(-4,\ 0,\ 6)+(0,\ 4,\ 8)$
$=\mathbf{(-4,\ 4,\ 14)}$
$|\boldsymbol{2(-\vec{a}+2\vec{b})}|=\sqrt{(-4)^2+4^2+14^2}=\boldsymbol{2\sqrt{57}}$
(3) $\boldsymbol{2\vec{a}-(\vec{b}-\vec{c})}$
$=2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$
$=2(2,\ 0,\ -3)-(0,\ 1,\ 2)+(3,\ -1,\ 0)$
$=(4,\ 0,\ -6)-(0,\ 1,\ 2)+(3,\ -1,\ 0)$
$=\mathbf{(7,\ -2,\ -8)}$
$|\boldsymbol{2\vec{a}-(\vec{b}-\vec{c})}|=\sqrt{7^2+(-2)^2+(-8)^2}$
$=\sqrt{117}=\boldsymbol{3\sqrt{13}}$

13 $\vec{p}=(1,\ 2,\ 4)$ より，
$(1,\ 2,\ 4)=l(1,\ 1,\ 1)+m(0,\ 3,\ -1)$
$+n(2,\ 3,\ 3)$
とおくと，
$l+2n=1$，$l+3m+3n=2$，$l-m+3n=4$
これらを解いて，$l=-4$，$m=-\dfrac{1}{2}$，$n=\dfrac{5}{2}$
よって，$\boldsymbol{\vec{p}=-4\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{5}{2}\vec{c}}$

14 (1) $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}=(2-3,\ -3-2,\ 1-1)$
$=\mathbf{(-1,\ -5,\ 0)}$
$|\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}|=\sqrt{(-1)^2+(-5)^2+0^2}=\boldsymbol{\sqrt{26}}$
(2) $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}=(1-(-2),\ -3-(-4),\ 0-1)$
$=\mathbf{(3,\ 1,\ -1)}$
$|\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}|=\sqrt{3^2+1^2+(-1)^2}=\boldsymbol{\sqrt{11}}$

15 D$(x,\ y,\ z)$とおくと，
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(4-2,\ 3-(-1),\ 2-4)=(2,\ 4,\ -2)$
$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=(7-x,\ 5-y,\ 5-z)$
四角形ABCDが平行四辺形のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ であるから，
$2=7-x$，$4=5-y$，$-2=5-z$
よって，$x=5$，$y=1$，$z=7$
したがって，$\mathbf{D(5,\ 1,\ 7)}$

16 $\vec{a}/\!/\vec{b}$ のとき，$\vec{a}=k\vec{b}$ とおけるので，
$(x-1,\ 2,\ 1)=k(4,\ 5,\ 2y)$
よって，$x-1=4k$，$2=5k$，$1=2ky$
したがって，$k=\dfrac{2}{5}$，$\boldsymbol{x=\dfrac{13}{5}}$，$\boldsymbol{y=\dfrac{5}{4}}$

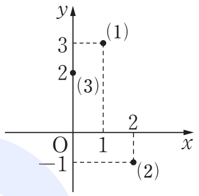
17 3点A，B，Cが一直線上にあるとき，
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が成り立つから，
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3-a,\ b+2,\ -12)$
$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(4-a,\ 6,\ -6)$ より，
$(3-a,\ b+2,\ -12)=k(4-a,\ 6,\ -6)$
よって，$3-a=k(4-a)$，$b+2=6k$，
$-12=-6k$
これらを解くと，$k=2$，$\boldsymbol{a=5,\ b=10}$

18 $\vec{a}$ と平行な単位ベクトルは $\pm\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{6}$

第 3 章　複素数平面

p.50～51　**1 複素数平面**

1　(3)　$(1+i)^2=1+2i+i^2=1+2i-1=2i$



2　(1)　$z=4+2i$ より，$\overline{z}=\mathbf{4-2}\boldsymbol{i}$

(2)　$z=2-3i^2-i=5-i$ より，$\overline{z}=\mathbf{5+}\boldsymbol{i}$

3　(1)　$|1+\sqrt{3}\,i|=\sqrt{1+(\sqrt{3}\,)^2}=\mathbf{2}$

(2)　$|(2+3i)(\sqrt{3}-i)|=|2+3i||\sqrt{3}-i|$
$=\sqrt{2^2+3^2}\sqrt{(\sqrt{3}\,)^2+(-1)^2}=\mathbf{2\sqrt{13}}$

4　(1)　$\sqrt{(2-0)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{20}=\mathbf{2\sqrt{5}}$

(2)　$\sqrt{(7-3)^2+(-5-2)^2}=\mathbf{\sqrt{65}}$

5　$|z|^2=1^2$ より，$z\overline{z}=1$　　$\overline{z}=\dfrac{1}{z}$

$$\overline{z^n+\frac{1}{z^n}}=\overline{z^n}+\frac{1}{\overline{z^n}}=(\overline{z})^n+\frac{1}{(\overline{z})^n}=\frac{1}{z^n}+z^n$$
$$=z^n+\frac{1}{z^n}$$

よって，$z^n+\dfrac{1}{z^n}$ は実数である。

p.52～53　**2 複素数の極形式**

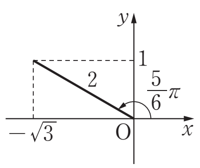
1　(1)　$\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$

(2)　$\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

(3)　$|-\sqrt{3}+i|=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$

図より，$\theta=\dfrac{5}{6}\pi$

与式$=\mathbf{2\left(\cos\dfrac{5}{6}\pi+\boldsymbol{i}\sin\dfrac{5}{6}\pi\right)}$



(4)　$|-\sqrt{5}|=\sqrt{5}$

与式$=\mathbf{\sqrt{5}\,(\cos\pi+\boldsymbol{i}\sin\pi)}$

2　(1)　$z=2-2i$ とおく。

絶対値　$|z|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=\mathbf{2\sqrt{2}}$

偏角　$\arg z=\mathbf{-\dfrac{\pi}{4}+2\boldsymbol{n}\pi}$　**($\boldsymbol{n}$ は整数)**

(2)　$z=2i$ とおく。

絶対値　$|z|=\sqrt{0^2+2^2}=\sqrt{4}=\mathbf{2}$

偏角　$\arg z=\mathbf{\dfrac{\pi}{2}+2\boldsymbol{n}\pi}$　**($\boldsymbol{n}$ は整数)**

3　$\alpha=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\beta=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\alpha\beta=2\cdot\sqrt{2}\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$

$\quad=\mathbf{2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{12}\pi+\boldsymbol{i}\sin\dfrac{7}{12}\pi\right)}$

絶対値　$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|=2\cdot\sqrt{2}=\mathbf{2\sqrt{2}}$

偏角　$\arg\alpha\beta=\arg\alpha+\arg\beta=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}=\mathbf{\dfrac{7}{12}\pi}$

4　$\alpha=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\beta=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$

$\quad=\mathbf{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+\boldsymbol{i}\sin\dfrac{\pi}{12}\right)}$

絶対値　$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\mathbf{\sqrt{2}}$

偏角　$\arg\dfrac{\alpha}{\beta}=\arg\alpha-\arg\beta=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=\mathbf{\dfrac{\pi}{12}}$

5　$z=(1+i)(1+\sqrt{3}\,i)$
$\quad=(1-\sqrt{3}\,)+(1+\sqrt{3}\,)i$ ……①

また，
$z=\{\sqrt{2}\,(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)\}\{2(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)\}$
$\quad=2\sqrt{2}\,(\cos 105^\circ+i\sin 105^\circ)$ ……②

①，②の実部，虚部を比べて，
$2\sqrt{2}\cos 105^\circ=1-\sqrt{3}$，$2\sqrt{2}\sin 105^\circ=1+\sqrt{3}$

よって，

$\mathbf{\cos 105^\circ=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$，$\mathbf{\sin 105^\circ=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$

p.54～55　**3 ド・モアブルの定理**

1　(1)　与式$=\cos\left(6\cdot\dfrac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(6\cdot\dfrac{\pi}{12}\right)$

$\quad=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}=\boldsymbol{i}$

(2)　$\sqrt{3}+3i=2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

与式$=(2\sqrt{3}\,)^5\left\{\cos\left(5\cdot\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(5\cdot\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$

$\quad=288\sqrt{3}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$

$\quad=288\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\mathbf{144\sqrt{3}-432\boldsymbol{i}}$

2　(1)　$\sqrt{3}-i=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)$

$\quad=2\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$

与式

$=2^{-6}\left\{\cos(-6)\cdot\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin(-6)\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{64}(\cos\pi+i\sin\pi)$

$=\mathbf{-\dfrac{1}{64}}$

SAMPLE

第4章 平面上の曲線

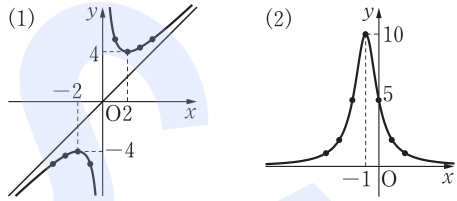
p.68～69 **1 方程式の表す曲線**

1 (1)

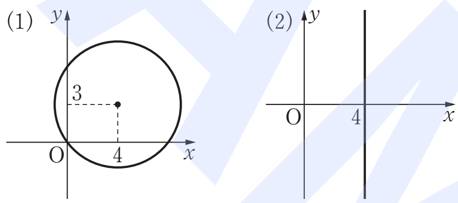
x	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
y	-5	$-\dfrac{13}{3}$	-4	-5	5	4	$\dfrac{13}{3}$	5

(2)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	1	2	5	10	5	2	1



2 (1) $x^2+y^2-8x-6y=0$
$(x-4)^2+(y-3)^2=25$
中心$(4,\ 3)$，半径5の円
(2) $3x-12=0$　　$x=4$



3 (1) $x^2+y=0$ の x と y を入れかえて，
$y^2+x=0$　　$\boldsymbol{x+y^2=0}$
(2) $x^2+y^2+4x=5$ の x，y にそれぞれ $x-2$，$y+1$を代入して，
$(x-2)^2+(y+1)^2+4(x-2)=5$
$\boldsymbol{x^2+y^2+2y=8}$

4 (1) ①，②の辺々を加えて，
$2y=-2x-2$
よって，$\boldsymbol{x+y+1=0}$
(2) $x^2-2x-3-y+k(x^2-1+y)=0$ ……①
$x=y=0$ を代入して，$k=-3$
$k=-3$ を①に代入して整理すると，
$$\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x}$$
求める軌跡は，**直線 $y=-3x+1$ の $x>2$ の部分**

p.70～71 **2 放物線**

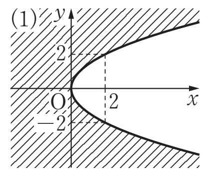
1 (1) $y^2=x$ は x 軸に関して対称。
頂点$(0,\ 0)$，軸 $y=0$
(2) $y^2=6x$ は x 軸に関して対称。
頂点$(0,\ 0)$，軸 $y=0$
(3) $x^2=-16y$ は y 軸に関して対称。
頂点$(0,\ 0)$，軸 $x=0$

2 (1) $y^2=4\cdot 2x$　　**焦点$(2,\ 0)$，　準線 $x=-2$**
(2) $y^2=4\cdot(-3)x$　　**焦点$(-3,\ 0)$，準線 $x=3$**
(3) $x^2=4\cdot\dfrac{1}{2}y$　　**焦点$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，　準線 $y=-\dfrac{1}{2}$**

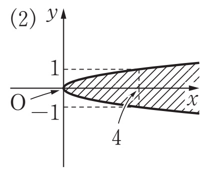
3 (1) $y^2=4(-2)x$ より，$\boldsymbol{y^2=-8x}$
(2) $x^2=4\cdot\dfrac{1}{4}y$ より，$\boldsymbol{x^2=y}$
(3) $x^2=4\left(-\dfrac{1}{2}\right)y$ より，$\boldsymbol{x^2=-2y}$
(4) $y^2=4\cdot 6x$ より，$\boldsymbol{y^2=24x}$

4 (1) 放物線 $y^2=x$ を y 軸方向に2だけ平行移動
(2) $\{x-(-1)\}^2=-2y$
放物線 $x^2=-2y$ を x 軸方向に-1だけ平行移動
(3) $\{y-(-3)\}^2=5\{x-(-2)\}$
放物線 $y^2=5x$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に -3だけ平行移動

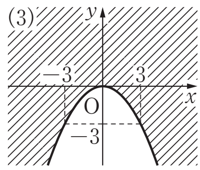
5



（境界線を含まない）



（境界線を含まない）



（境界線を含む）

6 放物線上の点をP$(x,\ y)$とする。
準線は軸 $x=-1$ に垂直だから，$y=k$ とおける。
$(x+1)^2+(y+2)^2=(y-k)^2$ ……① に $x=1$，$y=-2$ を代入して，$k=0$，-4
①に代入して整理すると，順に，
$\boldsymbol{(x+1)^2=-4(y+1)}$，$\boldsymbol{(x+1)^2=4(y+3)}$

p.72～73 **3 楕　円**

1 (1) $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$
$y=0$ のとき $x=\pm5$，$x=0$ のとき $y=\pm4$
頂点　$(\pm5,\ 0)$，$(0,\ \pm4)$
長軸　$2\times5=$**10**　　**短軸**　$2\times4=$**8**
(2) 両辺を16で割って，$\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$
$y=0$ のとき $x=\pm4$，$x=0$ のとき $y=\pm2$
頂点　$(\pm4,\ 0)$，$(0,\ \pm2)$
長軸　$2\times4=8$　　**短軸**　$2\times2=4$

2 (1) $\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$
$4>3$ より，焦点は x 軸上にある。
焦点　$(\pm\sqrt{4^2-3^2},\ 0)=$**$(\pm\sqrt{7},\ 0)$**
中心　$(0,\ 0)$
(2) $\dfrac{x^2}{(\sqrt{5})^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$
$\sqrt{5}<3$ より，焦点は y 軸上にある。
焦点　$(0,\ \pm\sqrt{9-5})=$**$(0,\ \pm2)$**
中心　$(0,\ 0)$

3 (1) 長軸の半分は3，短軸の半分は2である。

SAMPLE

①，②を解いて，$m=-\dfrac{4}{3}$，$n=-\dfrac{1}{3}$

求める直線ABの方程式は，

$\boldsymbol{y=-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{1}{3}}$

6　2円が共有点をもつ条件は，

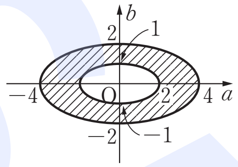
(半径の差)≦(2円の中心間の距離)≦(半径の和)

つまり，$3-1\leqq\sqrt{a^2+4b^2}\leqq3+1$

$4\leqq a^2+4b^2\leqq16$

よって，$\dfrac{a^2}{4}+b^2\geqq1$，$\dfrac{a^2}{16}+\dfrac{b^2}{4}\leqq1$ の共通部分。

求める存在範囲は，図の斜線部分。

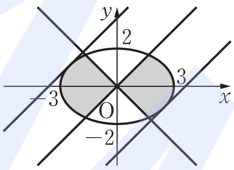


（境界線を含む）

7　領域Dは

楕円 $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$ と

直線 $y=\pm x$ で囲まれた部分で図のようになる。



（境界線を含む）

$y-x=k$ ……① とおくと

k はこの直線の y 切片であるから，①を $4x^2+9y^2=36$ に代入して整理すると，

$13x^2+18kx+9k^2-36=0$ ……②

②が重解をもつとき，$k=\pm\sqrt{13}$

共有点をもつ条件は $-\sqrt{13}\leqq k\leqq\sqrt{13}$ だから，

$k=\sqrt{13}$ のとき最大となり，

②から，$x=-\dfrac{9k}{13}=-\dfrac{9\sqrt{13}}{13}$

このとき，$y=x+k=-\dfrac{9\sqrt{13}}{13}+\sqrt{13}=\dfrac{4\sqrt{13}}{13}$

求める点の座標は $\boldsymbol{\left(-\dfrac{9\sqrt{13}}{13},\ \dfrac{4\sqrt{13}}{13}\right)}$

p.94～95

章末問題

1　(1)　$y^2=4\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)x$

焦点 $\boldsymbol{\left(-\dfrac{3}{4},\ 0\right)}$，**準線** $\boldsymbol{x=\dfrac{3}{4}}$

(2)　縦長の楕円になる。

焦点　$(0,\ \pm\sqrt{12-4})=\boldsymbol{(0,\ \pm2\sqrt{2})}$

$x=0$ のとき $y=\pm2\sqrt{3}$，$y=0$ のとき $x=\pm2$

長軸　$2\times2\sqrt{3}=\boldsymbol{4\sqrt{3}}$　　**短軸**　$2\times2=\boldsymbol{4}$

(3)　上と下に開いた双曲線になる。

焦点　$\left(0,\ \pm\sqrt{\dfrac{1}{4}+1}\right)=\boldsymbol{\left(0,\ \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)}$

漸近線　$4x^2-y^2=0$ より，$y^2=4x^2$

よって，$\boldsymbol{y=\pm2x}$

2　(1)　右に開いた放物線になる。

よって，$y^2=4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot x$　　$\boldsymbol{y^2=2x}$

(2)　横長の楕円になるから，

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　$(a>b>0)$ とおける。

短軸　$2b=4$ より，$b=2$

焦点　$\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$ より，$a^2=7$

よって，$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{7}+\dfrac{y^2}{4}=1}$

(3)　上と下に開いた直角双曲線になるから，

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=-1$　$(a>0)$ とおける。

$a^2=y^2-x^2$ に $x=4$，$y=5$ を代入して，$a^2=9$

よって，$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{9}=-1}$

3　(1)　$y=x+m$ ……① を $3x^2+2y^2=6$ に代入して整理すると，

$5x^2+4mx+(2m^2-6)=0$ ……②

$\dfrac{D}{4}=(2m)^2-5(2m^2-6)=0$ を解いて，

$m=\pm\sqrt{5}$

②に代入して，$(\sqrt{5}x\pm2)^2=0$

$x=\mp\dfrac{2}{\sqrt{5}}$　（複号同順）　①に代入して，

$\boldsymbol{m=\sqrt{5}}$，　**接点** $\boldsymbol{\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)}$

$\boldsymbol{m=-\sqrt{5}}$，**接点** $\boldsymbol{\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ -\dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)}$

(2)　$\dfrac{3\sqrt{2}x}{9}-\dfrac{-2y}{4}=1$　　$\dfrac{\sqrt{2}}{3}x+\dfrac{1}{2}y=1$

両辺に6を掛けて，$\boldsymbol{2\sqrt{2}x+3y=6}$

(3)　接点を$(a,\ b)$とする。

接線は，$by=4(x+a)$ ……①

$x=-4$，$y=2$ を代入して整理すると，

$b=2a-8$ ……②

$b^2=8a$ に代入して整理すると，

$(a-2)(a-8)=0$　　$a=2,\ 8$

②に代入して，$(a,\ b)=(2,\ -4)$，$(8,\ 8)$

①に代入して，$\boldsymbol{x+y+2=0}$，$\boldsymbol{x-2y+8=0}$

4　(1)　方程式を整理して，$y^2=8\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$

これは放物線 $y^2=8x$ を x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ だけ平行移動した放物線である。

頂点 $\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)}$，**焦点** $\boldsymbol{\left(\dfrac{5}{2},\ 0\right)}$，**準線** $\boldsymbol{x=-\dfrac{3}{2}}$

(2)　方程式を整理して，$\dfrac{(x+2)^2}{4}+y^2=1$

これは楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を x 軸方向に -2 だけ平行移動した楕円である。

焦点 $\boldsymbol{(\sqrt{3}-2,\ 0)}$，$\boldsymbol{(-\sqrt{3}-2,\ 0)}$

(3)　方程式を整理して，$\dfrac{(x-3)^2}{5}-\dfrac{(y+2)^2}{5}=1$

これは双曲線 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{5}=1$ を x 軸方向に3，y 軸方向に -2 だけ平行移動した双曲線である。

焦点 $\boldsymbol{(\sqrt{10}+3,\ -2)}$，$\boldsymbol{(-\sqrt{10}+3,\ -2)}$

SAMPLE

5 (1) $t=x+3$ を $y=-3t+5$ に代入して,
$y=-3(x+3)+5=-3x-4$
よって，**直線 $y=-3x-4$**

(2) $\cos\theta=\frac{x+1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta=\frac{y-2}{\sqrt{2}}$ を
$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ に代入して,
$\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{(y-2)^2}{2}=1$
よって，**円 $(x+1)^2+(y-2)^2=2$**

(3) $3x=18t^2=2(-3t)^2=2y^2$
よって，**放物線 $y^2=\frac{3}{2}x$**

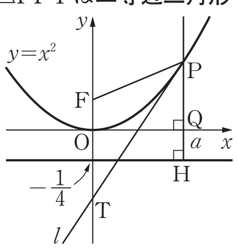
6 $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$
$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot4\cdot2\sin\frac{\pi}{6}=\mathbf{2}$

7 (1) $\sin\theta=\frac{y}{r}$ より，$r=\frac{y}{r}$，$r^2=y$
$x^2+y^2=y$
よって，$\boldsymbol{x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}}$

(2) $\cos\theta=\frac{x}{r}$，$\sin\theta=\frac{y}{r}$ より，
$r^2\cdot\frac{y}{r}\cdot\frac{x}{r}=1$　　よって，$\boldsymbol{xy=1}$

8 (1) $x^2=4\cdot\frac{1}{4}y$ より，$\mathbf{F}\left(\mathbf{0},\ \frac{1}{4}\right)$
準線の方程式は，$y=-\frac{1}{4}$
P$(a,\ a^2)$より，**l の方程式は,**
$ax=2\cdot\frac{1}{4}(y+a^2)$
よって，$\boldsymbol{2ax-y-a^2=0}$

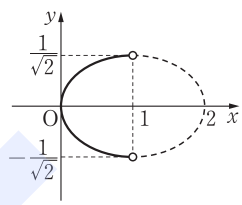
(2) 図で，放物線の定義により，
$\mathrm{PF}=\mathrm{PH}=a^2+\frac{1}{4}$
T$(0,\ -a^2)$より，$\mathrm{FT}=\frac{1}{4}+a^2$
よって，PF＝FT
ゆえに，△PFTは**二等辺三角形**である。



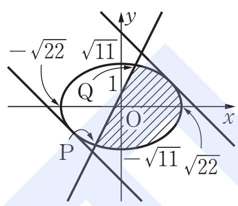
(3) (2)より，∠FPT＝∠FTP
FT∥PH より，∠FTP＝∠QPT
よって，**∠FPT＝∠QPT**

9 $y=t-x$ を $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ に代入して整理すると,
$5x^2-8tx+4t^2-4=0$
共有点をもつから,
$\frac{D}{4}=(-4t)^2-5(4t^2-4)\geqq0$
これを解いて，$\boldsymbol{-\sqrt{5}\leqq t\leqq\sqrt{5}}$
楕円上の点をP$(2\cos\theta,\ \sin\theta)$とおくと，点Pと直線 $x+y-4=0$ の距離は,
$\frac{|2\cos\theta+\sin\theta-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\{4-\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)\}$
ただし, $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$
求める最小値は，$\frac{4-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}}$

10 点(2, 0)と点Pを通る直線の方程式は
$y=m(x-2)$ ……① と表される。
①を楕円の方程式 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ ……② に代入して整理すると,
$(1+2m^2)x^2-8m^2x+(8m^2-2)=0$ ……③
①と②は異なる2点で交わるから,
$\frac{D}{4}=(-4m^2)^2-(1+2m^2)(8m^2-2)>0$
これを解いて，$-\frac{1}{\sqrt{2}}<m<\frac{1}{\sqrt{2}}$ ……④
このとき，③の2つの解をα，βとし，線分PQの中点をM$(X,\ Y)$とすると,
$X=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{4m^2}{1+2m^2}$ ……⑤
$Y=m\left(\frac{4m^2}{1+2m^2}-2\right)=-\frac{2m}{1+2m^2}$ ……⑥
$m=0$ のとき，$X=Y=0$
$m\neq0$ のとき，⑤÷⑥ より，$m=-\frac{X}{2Y}$
これを⑤に代入して整理すると,
$X^2-2X+2Y^2=0$
$(X-1)^2+2Y^2=1$
$X=2-\frac{2}{1+2m^2}$ で,
④より，$0\leqq X<1$
よって，求める軌跡は,
楕円 $(x-1)^2+2y^2=1$ の $0\leqq x<1$ の部分。



11 連立方程式 $y=2x+1$, $x^2+2y^2=22$ を解いて,
$(x,\ y)=(-2,\ -3)$, $\left(\frac{10}{9},\ \frac{29}{9}\right)$
これより，与えられた連立不等式の表す領域は図の斜線部分(境界線を含む)であり,



P$(-2,\ -3)$，Q$\left(\frac{10}{9},\ \frac{29}{9}\right)$
$x+y=k$ とおくと，$y=-x+k$ ……①
kが最大になるのは，①と $x^2+2y^2=22$ が接するときである。2式から y を消去して,
$3x^2-4kx+(2k^2-22)=0$
接するから，$\frac{D}{4}=(-2k)^2-3(2k^2-22)=0$
これを解いて，$k=\pm\sqrt{33}$

SAMPLE

図より，$k>0$ だから，$k=\sqrt{33}$
k が最小になるのは，①が点P$(-2,\ -3)$を通るときだから，$k=-2-3=-5$
求める値の範囲は，$\boldsymbol{-5 \leqq x+y \leqq \sqrt{33}}$

12 (1) $PF^2=x^2+(y-\sqrt{5})^2$ より，

$$x^2+(y-\sqrt{5})^2=\left\{\frac{\sqrt{5}}{2}\left|y-\frac{4}{\sqrt{5}}\right|\right\}^2$$

整理して，$x^2-\dfrac{y^2}{4}=-1$ ……①

これは双曲線を表す。

漸近線は，$x-\dfrac{y}{2}=0$，$x+\dfrac{y}{2}=0$

より，$\boldsymbol{2x-y=0}$，$\boldsymbol{2x+y=0}$

(2) 双曲線①上の点P$(x_1,\ y_1)$における接線の方程式は，$x_1x-\dfrac{y_1y}{4}=-1$ ……②

②と $2x-y=0$ を連立させて，

$$Q\left(-\frac{2}{2x_1-y_1},\ -\frac{4}{2x_1-y_1}\right)$$

②と $2x+y=0$ を連立させて，

$$R\left(-\frac{2}{2x_1+y_1},\ \frac{4}{2x_1+y_1}\right)$$

△OQRの面積は，

$$\frac{1}{2}\left|\left(-\frac{2}{2x_1-y_1}\right)\left(\frac{4}{2x_1+y_1}\right)-\left(-\frac{2}{2x_1+y_1}\right)\left(-\frac{4}{2x_1-y_1}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{-16}{4x_1{}^2-y_1{}^2}\right|$$

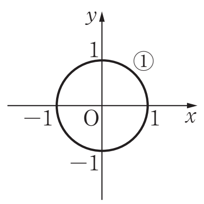
$x_1{}^2-\dfrac{y_1{}^2}{4}=-1$ より，$4x_1{}^2-y_1{}^2=-4$

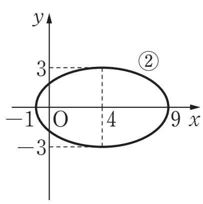
よって，$\triangle OQR=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{-16}{-4}\right|=2$ （一定）

13 (1) P$(x,\ y)$とすると，$x=\cos t$，$y=\sin t$ より，
$x^2+y^2=1$ ……①
Q$(x,\ y)$とすると，

$\cos t=\dfrac{4-x}{5}$, $\sin t=\dfrac{y}{3}$ より，

$\dfrac{(x-4)^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ ……②





(2) $PQ^2=(4-5\cos t-\cos t)^2+(3\sin t-\sin t)^2$
$=36\cos^2 t+4\sin^2 t-48\cos t+16$
$=36\cos^2 t+4(1-\cos^2 t)-48\cos t+16$
$=32\cos^2 t-48\cos t+20$
$=32\left(\cos t-\dfrac{3}{4}\right)^2+2$

$\cos t=\dfrac{3}{4}$ のとき最小となる。

このとき，$\sin t=\pm\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

求める座標は，

$\mathbf{P}\left(\dfrac{3}{4},\ \pm\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$，$\mathbf{Q}\left(\dfrac{1}{4},\ \pm\dfrac{3\sqrt{7}}{4}\right)$ **（複号同順）**

14 A$(r_1,\ \theta)$とすると，B$(r_2,\ \theta+\pi)$，
C$\left(r_3,\ \theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$，D$\left(r_4,\ \theta+\dfrac{3}{2}\pi\right)$

4点A，B，C，Dは与えられた楕円上にあるから，

$$r_1=\frac{l}{1-e\cos\theta}$$

$$r_2=\frac{l}{1-e\cos(\theta+\pi)}=\frac{l}{1+e\cos\theta}$$

$$r_3=\frac{l}{1-e\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{l}{1+e\sin\theta}$$

$$r_4=\frac{l}{1-e\cos\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)}=\frac{l}{1-e\sin\theta}$$

よって，

$$AB=r_1+r_2=\frac{l}{1-e\cos\theta}+\frac{l}{1+e\cos\theta}$$

$$=\frac{2l}{1-e^2\cos^2\theta}$$

$$CD=r_3+r_4=\frac{l}{1+e\sin\theta}+\frac{l}{1-e\sin\theta}$$

$$=\frac{2l}{1-e^2\sin^2\theta}$$

ゆえに，

$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{1-e^2\cos^2\theta}{2l}+\frac{1-e^2\sin^2\theta}{2l}$$

$$=\frac{2-e^2}{2l}\quad（一定）$$

23－1－1

SAMPLE