◆本書の特色と構成◆

1本書は，高校3年生の大学受験直前対策用として，短期間に，数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学A，数学Bの総まとめをし，大学入試に出題される標準的な問題に対応できる学力を身につけることを目的として編集されています。

2全体は10講座から成り，各講座とも1～1.5時間が標準授業時間です。

3第1講座から第7講座まではそれぞれ2ページ構成，第8講座から第10講座まではそれぞれ3ページ構成です。

4各講座は，標準問題と発展問題に分かれています。標準問題には，大学入試に出題される最も典型的な問題を精選して収録しました。また，発展問題では，やや高度な問題を，ヒントをつけて取り上げました。ヒントを参考にして挑戦してください。応用力のいっそうの充実が図れます。

もくじ

第1講座　数と式 …… 2

第2講座　関数 …… 4

第3講座　確率 …… 6

第4講座　ベクトル …… 8

第5講座　数列 …… 10

第6講座　式と証明，複素数と方程式 …… 12

第7講座　図形と方程式 …… 14

第8講座　三角関数，指数・対数関数 …… 16

第9講座　微分法 …… 19

第10講座　積分法 …… 22

第2講座　関　　数

標準問題

1　**[2次関数のグラフ]**　2つの放物線 $C_1: y=x^2+4x+m$，$C_2: y=x^2+2mx-m^2-3$ がある。放物線 C_1 の頂点の y 座標は，C_2 の頂点の y 座標よりも大きいとする。次の問いに答えよ。ただし，m は定数とする。

(1)　放物線 C_2 の頂点の座標を m の式で表せ。

(2)　m のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　放物線 C_1 と C_2 の交点の x 座標は $-\frac{3}{4}$ である。m の値を求めよ。

2　**[2次関数の最大・最小①]**　関数 $y=(x^2-4x+3)^2-2x^2+8x+3+a$ について，次の問いに答えよ。ただし，$0 \leqq x \leqq 3$ とする。

(1)　$t=x^2-4x+3$ とおくとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　y の最大値が6であるとき，a の値を求めよ。

3　**[2次関数の最大・最小②]**　x，y が実数で，$x^2-2xy+2y^2=2$ であるとき

(1)　x のとる値の範囲を求めよ。

(2)　$-x^2-2x+1$ のとる値の範囲を求めよ。

(3)　$x+2y$ のとる値の範囲を求めよ。

4　**[2次関数の最大・最小③]**　放物線 $y=x^2$ 上に2点 A$(-2,\ 4)$，B$(6,\ 36)$ がある。弧 AB 上の動点 P に対し，△ABP の面積を S とおく。

(1)　S を，P の x 座標 x を用いて表せ。

(2)　S を最大にする x の値と，S の最大値を求めよ。

5　**［2次不等式］**　次の問いに答えよ。

(1)　$x^2-3|x-1|-13<0$，$x^2-x-6>0$ を同時に満たす x の値の範囲を求めよ。

(2)　不等式 $x^2-(a+2)x+2a<0$ を満たす x の整数値がただ1つ存在するような整数 a の値を求めよ。

(3)　不等式 $x^2-2x \geqq kx-4$ の解がすべての実数であるような定数 k の値の範囲を求めよ。

6　**［2次関数と2次不等式］**　$k \geqq 0$ とする。関数 $f(x)=x^2-2kx+\frac{1}{2}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　定義域が $0 \leqq x \leqq 1$ である2次関数 $y=f(x)$ の最小値を m とするとき，m を k を用いて表せ。

(2)　$0 \leqq x \leqq 1$ であるすべての x について $0 \leqq f(x) \leqq 1$ が成り立つような k の値の範囲を求めよ。

7　**［解の配置］**　次の問いに答えよ。

(1)　2次方程式 $x^2-x+p=0$ が，絶対値が1より小さい異なる2つの実数解をもつとき，定数 p の値の範囲を定めよ。

(2)　2次方程式 $3x^2-2(a-1)x+3(a-2)=0$ は相異なる2つの解 α，β をもつ。そのとき，α，β が $0<\alpha<1$，$0<\beta<1$ となるように定数 a の値の範囲を定めよ。

発展問題

8　連立方程式 $x+y+z=3$……①，$x^2+y^2+z^2=27$……②を満たす x，y，z を考える。

(1)　連立方程式①，②から，$xy+yz+zx$ の値を求めよ。

(2)　(1)の結果を利用して，連立方程式①，②において，x，y が実数となる実数 z の値の範囲を求めよ。

ヒント　(2)　$x+y$，xy をそれぞれ z の式で表し，実数解をもつ条件を考える。

9　次の2条件(イ)，(ロ)を同時に満たす整数 a，b の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

(イ)　2次方程式 $X^2+aX+b=0$ の2つの解が共に2以上の整数である。

(ロ)　不等式 $3a+2b \leqq 0$ が成り立つ。

ヒント　解と係数の関係から，2つの解 α，β についての条件を考える。

第5講座　数　列

標準問題

1　**[等差数列]**　次の問いに答えよ。

(1)　第5項が5，第10項が20であるような等差数列の初項と公差を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ について，第 n 項までの和 S_n が $S_n=2n^2-25n\ (n\geqq 1)$ で表されるとき，一般項 a_n を求めよ。また，数列 $\{a_n\}$ のすべての負の項の和を求めよ。

2　**[等比数列]**　等比数列 $\{a_n\}$ が，$a_1+a_2=\dfrac{3}{2}$，$a_4+a_5=12$ を満たしているとする。次の問いに答えよ。

(1)　初項 a と公比 r を求めよ。

(2)　初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(3)　$S_{100}-S_{50}$ は何桁の数か。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

3　**[等差数列と等比数列]**　3つの実数 a，b，c が a，b，c の順序で等差数列になっていて，b，c，a の順序で等比数列になっているとする。

(1)　a，b，c の和が18であるとき，a，b，c の値を求めよ。

(2)　a，b，c の積が125であるとき，a，b，c の値を求めよ。

4　**[いろいろな数列]**　自然数 n が n 個連続してあらわれる数列

1，2，2，3，3，3，4，4，4，4，……

について，次の問いに答えよ。

(1)　この数列の第100項目を求めよ。

(2)　この数列の第100項までの和を求めよ。

5　**[漸化式①]**　$a_1=1,\ a_2=2,\ 3a_{n+2}-4a_{n+1}+a_n=0$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくとき，b_{n+1} と b_n の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2)　a_n を n を用いて表せ。

6　**[漸化式②]**　各項が正の数である数列 $\{a_n\}$ が $a_1=2$ と関係式

$$a_{n+1}{}^2\cdot a_n=a_{n+1}+\frac{2(n+2)}{n(n+1)}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1)　a_2，a_3 を求めよ。

(2)　a_n を n の式で表せ。

7　**[数学的帰納法]**　n が4以上の自然数であるとき，不等式 $3^n>n^3$ が成り立つことを証明せよ。

発展問題

8　(1)　数列 1，2，3，……，n において，隣接する2数の積の総和を求めよ。

(2)　数列 1，2，3，……，n において，互いに相異なり，かつ隣接しない2数の積の総和を求めよ。

ヒント　(2)　$(1+2+\cdots\cdots+n)(1+2+\cdots\cdots+n)$ の展開式と(1)を利用する。

9　3×3のます目とは図1のようなものをいう。

81×81のます目に数字を書き入れる。中央のます目に1を入れ，2，3，4，……，6561 (=81×81) を図2のような順序で書き入れていき，すべてのます目を埋めたものとする。

このとき，右上の角と左下の角を結ぶ対角線にならぶ数字の和を求めよ。

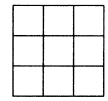

図1

・	・	・	・	・	・	・
・	17	16	15	14	13	・
・	18	5	4	3	12	・
・	19	6	1	2	11	・
・	20	7	8	9	10	・
・	21	22	23	24	25	・
・	・	・	・	・	・	・

図2

ヒント　中央のます目から右下の角まで，順に 1^2，3^2，……，81^2 が並んでいる。

解答　《select Ⅲ 数学総合》

第1講座　数と式

【p.2】

1 (1) 与式$=(t^2-t)^2-32(t^2-t)+60$
$=(t^2-t-2)(t^2-t-30)$
$=\boldsymbol{(t+1)(t-2)(t+5)(t-6)}$

(2) 与式$=2x^2+(3y+7)x-(2y+3)(y-1)$
$=\boldsymbol{(x+2y+3)(2x-y+1)}$

(3) 与式$=(x^2+3x)^2+7(x^2+3x)+12$
$=\boldsymbol{(x^2+3x+3)(x^2+3x+4)}$

(4) 与式$=x^3+y^3+1^3-3\cdot x\cdot y\cdot 1$
$=\boldsymbol{(x+y+1)(x^2-xy+y^2-x-y+1)}$

2 (1) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{10})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{10})^2}{(\sqrt{2}+\sqrt{10})(\sqrt{2}-\sqrt{10})}=\boldsymbol{-3}$

(2) $x+\dfrac{1}{x}=t$ とおくと，$t^3-3t-18=0$
$(t-3)(t^2+3t+6)=0$　t は実数だから，$t=3$
よって，$x+\dfrac{1}{x}=\boldsymbol{3}$
また，$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=\boldsymbol{7}$

3 (1) $\dfrac{y+z}{1}=\dfrac{z+x}{2}=\dfrac{x+y}{3}=k\,(\neq 0)$ とおく。
$y+z=k$，$z+x=2k$，$x+y=3k$
これを解いて，$x=2k$，$y=k$，$z=0$
よって，$\dfrac{x^2+y^2}{y^2+z^2}=\dfrac{4k^2+k^2}{k^2}=\boldsymbol{5}$

(2) 条件式$=k$ とおく。
$-a+b+c=ka$，$a-b+c=kb$，$a+b-c=kc$
辺々加えて，$a+b+c=k(a+b+c)$
(i) $a+b+c\neq 0$ のとき，$k=1$
与式$=\dfrac{2c\cdot 2b}{bc}+\dfrac{2a\cdot 2c}{ac}+\dfrac{2b\cdot 2a}{ab}=12$
(ii) $a+b+c=0$ のとき，$k=-2$
与式$=\dfrac{(-c)\cdot(-b)}{bc}+\dfrac{(-a)\cdot(-c)}{ac}+\dfrac{(-b)\cdot(-a)}{ab}=3$
(i)，(ii)より，$\boldsymbol{a+b+c\neq 0}$ **のとき 12**
$\boldsymbol{a+b+c=0}$ **のとき 3**

4 (1) 与式より，
$\{p^2q-4(p^2+q)+16\}+\sqrt{10}(p^2+q-8)=0$
よって，$p^2q-4(p^2+q)+16=0$，$p^2+q-8=0$
これを解いて，$(p,\ q)=(\pm 2,\ 4)$
$p>0$，$q>0$ だから，$\boldsymbol{p=2}$，$\boldsymbol{q=4}$

(2) $\alpha=\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{4})^2}=2+\sqrt{3}$
$\alpha=2+\sqrt{3}$ より，$\alpha-2=\sqrt{3}$
両辺を2乗して整理すると，$\alpha^2-4\alpha+1=0$
よって，与式$=(\alpha^2-4\alpha+1)(\alpha^3+\alpha)-2=-2$

【p.3】

5 (1) $|x|^2-4|x|+3=0$ より，$|x|=1,\ 3$
よって，$\boldsymbol{x=\pm 1,\ \pm 3}$

(2) 異なる2つの解を α，β とすると，
$\dfrac{D}{4}=(a+1)^2-(a+7)>0$
$\alpha+\beta=-2(a+1)>0$，$\alpha\beta=a+7>0$
これを解いて，$\boldsymbol{-7<a<-3}$

(3) 共通解を α とすると，
$\alpha^2+\alpha+a=0$ ……①　$\alpha^2-\alpha+a+4=0$ ……②
①−②から，$\alpha=2$　　$\therefore$　$a=-6$
よって，$\boldsymbol{a=-6}$ **のとき共通解 2**

6 (1) $\alpha^2-\alpha+1=0$ より，
$\alpha^3+1=(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0$
$\therefore$　$\alpha^3=-1$　　同様に，$\beta^3=-1$
よって，$\alpha^3+\beta^3=-1-1=-2$
$\alpha^{10}+\beta^{10}=(\alpha^3)^3\alpha+(\beta^3)^3\beta=(-1)^3\alpha+(-1)^3\beta$
$=-(\alpha+\beta)$
$\alpha+\beta=1$ より，$\boldsymbol{\alpha^{10}+\beta^{10}=-1}$

(2) $\alpha+\beta=-5$，$\alpha\beta=3$ より，
$(\alpha^2+4\alpha+\beta)+(\beta^2+4\beta+\alpha)$
$=(\alpha^2+\beta^2)+5(\alpha+\beta)$
$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+5(\alpha+\beta)$
$=(-5)^2-2\cdot 3+5\cdot(-5)=-6$ ……①
また，$\alpha^2+5\alpha+3=0$，$\beta^2+5\beta+3=0$ より，
$\alpha^2+4\alpha=-\alpha-3$，$\beta^2+4\beta=-\beta-3$ だから，
$(\alpha^2+4\alpha+\beta)(\beta^2+4\beta+\alpha)$
$=(-\alpha-3+\beta)(-\beta-3+\alpha)=-(\alpha-\beta)^2+9$
$=-\{(\alpha-\beta)^2-4\alpha\beta\}+9$
$=-\{(-5)^2-4\cdot 3\}+9=-4$ ……②
①，②より，求める2次方程式は，
$\boldsymbol{x^2+6x-4=0}$

7 (1) $4x^2+10x-y^2-y+6$
$=4x^2+10x-(y-2)(y+3)$
$=\boldsymbol{(2x-y+2)(2x+y+3)}$

(2) $4x^2+10x-y^2-y=0$ より，
$4x^2+10x-y^2-y+6=6$
(1)より，$(2x-y+2)(2x+y+3)=6$
$(2x-y+2,\ 2x+y+3)$
$=(\pm 1,\ \pm 6),\ (\pm 2,\ \pm 3),$
$(\pm 3,\ \pm 2),\ (\pm 6,\ \pm 1)$ (複号同順)
このうち，x，y が整数となる組は，
$\boldsymbol{(x,\ y)=(0,\ -1),\ (0,\ 0),}$
$\boldsymbol{(-3,\ 2),\ (-3,\ -3)}$