◆本書の特色と構成◆

1 本書は，数学Ⅱの内容のうち，いろいろな式，図形と方程式について，基本事項の徹底理解から標準的な応用問題が解けるまでの実力養成を目的として編集されています。

2 全体は10講座から成り，各講座とも１～1.5時間が標準授業時間です。

3 各講座の構成は以下の通りです。

①基本の整理……基本事項を，１つ１つの問題を解くことで確認します。

②演　　　習……例題として取り上げた最も重要でかつ応用範囲の広い問題や，その類題を解くことによって解法を修得します。さらに，例題の関連問題や，やや発展的な問題についても練習して，さまざまなタイプの問題に対応できる応用力を養成します。

も く じ

第 1 講座　3 次式の展開と因数分解，二項定理

基本の整理

〈3 次式の展開〉▶ $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$　　$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$　（複号同順）

1　次の式を展開せよ。

(1)　$(x+2y)^3$　　(2)　$(3a-2b)^3$

(3)　$(x+3)(x^2-3x+9)$　　(4)　$(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$

〈3 次式の因数分解〉▶ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$　　$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

2　次の式を因数分解せよ。

(1)　x^3+64　　(2)　$8a^3-b^3$

(3)　$27x^3+8y^3$　　(4)　$16a^3b-2b^4$

〈二項定理①〉▶ $(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_nb^n$

3　次の式を展開せよ。

(1)　$(2x-1)^4$　　(2)　$(a-1)^5$

(3)　$(2x-y)^6$　　(4)　$\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^6$

〈二項定理②〉▶ $(a+b)^n$ の展開式で，${}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r$ を一般項，${}_n\mathrm{C}_r$ を二項係数という。

4　次の式の展開式で，〔　〕内に示した項の係数を求めよ。

(1)　$(3x-2)^5$　〔x^3〕　　(2)　$(2x+y)^7$　〔x^3y^4〕

(3)　$(x+2y)^8$　〔x^6y^2〕　　(4)　$\left(3x-\dfrac{1}{2}y\right)^5$　〔x^2y^3〕

〈$(a+b+c)^n$ の展開式〉▶ $(a+b+c)^n$ の展開式で，$a^pb^qc^r$ の係数は $\dfrac{n!}{p!q!r!}$

5　次の式の展開式で，〔　〕内に示した項の係数を求めよ。

(1)　$(x+y+z)^5$　〔x^2yz^2〕　　(2)　$(a+b+c)^8$　〔$a^2b^3c^3$〕

(3)　$(a+2b-c)^7$　〔a^4b^2c〕　　(4)　$(x+y-3z)^8$　〔x^5yz^2〕

演　習

例題　二項定理を利用する証明

6　等式 ${}_n\mathrm{C}_0+2{}_n\mathrm{C}_1+2^2{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+2^n{}_n\mathrm{C}_n=3^n$ を証明せよ。

解法のポイント　二項定理による $(1+x)^n$ の展開式を利用して証明する。

7 **類題** 次の等式を証明せよ。

(1)　${}_n\mathrm{C}_0-\dfrac{{}_n\mathrm{C}_1}{2}+\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2}{2^2}-\cdots\cdots+(-1)^n\cdot\dfrac{{}_n\mathrm{C}_n}{2^n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

(2)　${}_n\mathrm{C}_0-2{}_n\mathrm{C}_1+2^2{}_n\mathrm{C}_2-\cdots\cdots+(-2)^r{}_n\mathrm{C}_r+\cdots\cdots+(-2)^n{}_n\mathrm{C}_n=(-1)^n$

8　次の式を展開せよ。

(1)　$(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$　(2)　$(a+b)^3(a-b)^3$

(3)　$(1+x-x^2-x^3)(1-x-x^2+x^3)$　(4)　$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

9　次の式を因数分解せよ。

(1)　$x^3+y^3+xy(x+y)$　(2)　x^6-y^6

(3)　x^6+26x^3-27　(4)　$(2x+y)^3+(x-2y)^3$

(5)　x^3+3x^2+3x+1　(6)　$a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3$

10　次の式の展開式で，〔　〕内に示した項の係数を求めよ。

(1)　$(3x^2+1)^5$　〔x^6〕　(2)　$(x^2-2x)^7$　〔x^{10}〕

(3)　$\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^6$　〔x^3〕　(4)　$\left(x^3-\dfrac{1}{x^2}\right)^{10}$　〔定数項〕

11　次の式の展開式で，〔　〕内に示した項の係数を求めよ。

(1)　$(2x+3y-z)^7$　〔$x^2y^2z^3$〕　(2)　$\left(2x-\dfrac{1}{2}y+z\right)^4$　〔xy^2z〕

(3)　$\left(x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x}\right)^5$　〔x^3〕　(4)　$\left(x^2+x-\dfrac{2}{x}\right)^7$　〔定数項〕

12 **発展** 21^{21} を400で割ったときの余りを求めよ。

ヒント $(1+20)^{21}$ を二項定理により展開する。

第 2 講座　整式の除法，分数式の計算

基本の整理

〈整式の除法〉▶降べきの順に整理し，割られる式の次数の欠けている項はあけておく。

1　次の割り算の商と余りを求めよ。

(1)　$(3x^2+5x-2)\div(x+2)$　　(2)　$(3x^3-4x-2)\div(x+1)$

(3)　$(12x-3x^2+x^3+13)\div(5x-3+x^2)$　　(4)　$(x^3-1)\div(x+1)$

〈組立除法〉▶1 次式で割るとき，組立除法が利用できる。

2　組立除法により，次の割り算の商と余りを求めよ。

(1)　$(5x^2-x+3)\div(x-2)$　　(2)　$(x^3+2x^2-5x-6)\div(x+1)$

〈除法の法則〉▶整式 A を B で割った商を Q，余りを R とすると，$A=BQ+R$

3　次の問いに答えよ。

(1)　ある整式 A を整式 $B=x^2+x-1$ で割ると，商が $x-2$，余りが $3x-1$ である。整式 A を求めよ。

(2)　ある整式 A を整式 $B=2x^2+1$ で割ると，商が x^2+x-1，余りが $-x+3$ である。整式 A を求めよ。

〈分数式の乗法・除法〉▶分母，分子が因数分解できるとき，因数分解してから約分する。

4　次の計算をせよ。

(1)　$\dfrac{x+2}{x^2-9}\times\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$　　(2)　$\dfrac{x-2}{2x^2+x-6}\times\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-2x-8}$

(3)　$\dfrac{2x^2-x-1}{2x+6}\div\dfrac{2x+1}{x^2+2x-3}$　　(4)　$\dfrac{x^2-5xy}{x^2+2xy-15y^2}\div\dfrac{x^2-4xy-5y^2}{x^2-2xy-3y^2}$

〈分数式の加法・減法〉▶分母が異なるとき，通分してから分子の同類項をまとめる。

5　次の計算をせよ。

(1)　$\dfrac{x^2-6}{x+2}+\dfrac{2}{x+2}$　　(2)　$\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{2}{x+2}$

(3)　$\dfrac{x+4}{x^2-4}-\dfrac{x-8}{x^2-8x+12}$　　(4)　$\dfrac{2x-1}{3x^2+2x-1}+\dfrac{x-1}{3x^2-4x+1}$

演　習

例題　整式の除法

6　$x^4-3x^3+2x^2-1$ を x の整式 B で割ると，商が x^2+1，余りが $3x-2$ である。整式 B を求めよ。

解法のポイント　$A=BQ+R$ にそれぞれの式をあてはめる。

7　**類題**　次の問いに答えよ。

(1)　$2x^3+5x^2+6x+6$ を x の整式 B で割ると，商が $2x+3$，余りが $x+3$ である。整式 B を求めよ。

(2)　x^4-6x^2+x+7 を x の整式 B で割ると，商が B，余りが $x-2$ である。整式 B を求めよ。

8　x についての整式の除法と考えて，次の割り算の商と余りを求めよ。

(1)　$(x^3-xy^2-y^3+x^2y)\div(x-y)$　　(2)　$(6x^3-x^2y+5xy^2+2y^3)\div(3x+y)$

(3)　$(3x^2+7ax-a^2)\div(x+a)$　　(4)　$(x^2+3ax+2a^2+2a-3)\div(x+a+2)$

9　次の割り算の商と余りを求めよ。

(1)　$(3x^2-x+1)\div(3x+1)$　　(2)　$(2x^3-x^2+1)\div(2x-3)$

10　次の計算をせよ。

(1)　$\dfrac{8ab^2c}{3a^3b}\times\dfrac{9ac^2}{16b^2}$　　(2)　$\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}\div\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}$

(3)　$\dfrac{3}{x^2+x-2}-\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{1}{x^2+3x+2}$　　(4)　$\dfrac{x+2}{2x^2+5x+3}+\dfrac{x-1}{2x^2-x-6}-\dfrac{2x-3}{x^2-x-2}$

11　次の計算をせよ。

(1)　$\dfrac{x+2}{x-\dfrac{2}{x+1}}$　　(2)　$\dfrac{1+\dfrac{a-b}{a+b}}{1-\dfrac{a-b}{a+b}}$

12　**発展**　$(4x^3-2x^2+3)^3$ を x^2-x+1 で割ったときの余りを求めよ。

ヒント　まず $4x^3-2x^2+3$ を x^2-x+1 で割った余りを求める。

第3講座　恒等式

基本の整理

〈恒等式〉 ▶文字にどんな値を代入しても成り立つ等式を恒等式という。

1　次の等式のうち，恒等式はどれか。

① $x^2-3x-5=0$　　② $x^2-4x-5=(x-5)(x+1)$

③ $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$　　④ $x^4-x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

〈恒等式の係数決定①〉 ▶$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ が x についての恒等式

$$\iff a=a',\ b=b',\ c=c'$$

2　次の等式が x についての恒等式になるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

(1) $x^2+4x+1=a(x+1)^2+b(x+1)+c$

(2) $3x^2-4x+2=a(x-1)^2+b(x-1)+c$

(3) $x^2-3x+a=(x-2)(x-b)$

(4) $(a+b-6)x^2+(a-b)x+c=0$

〈恒等式の係数決定②〉 ▶異なる x の値を代入して係数の連立方程式を解いて求めてもよい。

3　次の等式が x についての恒等式になるように，定数 a，b，c，d の値を定めよ。

(1) $x^2-3x+2=ax(x-1)+b(x-1)(x-2)+cx(x-2)$

(2) $2x^2-5x-1=a(x-1)(x-2)+b(x-2)(x-3)+c(x-3)(x-1)$

(3) $x^3=a(x-1)(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-2)+c(x-1)+d$

〈恒等式の係数決定③〉 ▶$x+a=t$ とおき，t の恒等式として係数が容易に求められる場合もある。

4　次の等式が x についての恒等式になるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

(1) $x^3=(x+1)^3+a(x+1)^2+b(x+1)+c$

(2) $x^3+2x^2-4=(x+3)^3+a(x+3)^2+b(x+3)+c$

〈分数式の恒等式〉 ▶分数式の恒等式の両辺に，同じ整式を掛けてできた等式も恒等式である。

5　等式 $\dfrac{2x-7}{(x+1)(2x-1)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{2x-1}$ が x についての恒等式になるように，定数 a，b の値を定めよ。

演　習

例題 整式の除法と恒等式

6 x についての整式 $2x^3+ax^2+bx-1$ が x^2-3x+1 で割り切れるように，定数 a，b の値を定めよ。

解法のポイント 商を $cx+d$ とすると，$2x^3+ax^2+bx-1=(x^2-3x+1)(cx+d)$ が恒等式になる。

7 **類題** x についての整式 x^3+ax-6 が x^2+3x+b で割り切れるように，定数 a，b の値を定めよ。

8 次の等式が x についての恒等式になるように，定数 a，b，c，d の値を定めよ。

(1) $ax^3+bx^2+x+3=(x^2-x-1)(cx+d)$

(2) $(2x+1)^3=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$

(3) $\dfrac{4x+5}{(3x+1)(x-2)}=\dfrac{a}{3x+1}+\dfrac{b}{x-2}$

9 次の等式が k のどんな値に対しても成り立つように，x，y の値を定めよ。

(1) $(k-2)x+(k-1)y=4k-1$　　(2) $(1+2k)x+(2-k)y-5=0$

10 次の問いに答えよ。

(1) x についての 1 次式 $P(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$ において，$P(2x+3)=x$ が x の任意の値に対して成り立つとき，定数 a，b の値を求めよ。

(2) $P(x)$ は x についての整式で，$(x-1)(x^2+2)P(x)=x^4+ax^2+b$ が x についての恒等式である。定数 a，b の値を求めよ。

11 $P(x)$ は x についての整式で，$(x^2+x-6)P(x)=x^4+ax+b$ が x についての恒等式である。定数 a，b の値を求めよ。

12 **発展** $x+y=2$ を満たすどんな x，y の値に対しても，つねに等式 $ax^2+bx+cy^2=4$ が成り立つように，定数 a，b，c の値を定めよ。

ヒント 条件式より，$y=2-x$　　これを $ax^2+bx+cy^2=4$ に代入した式が x の恒等式になる。

解　答　《selectⅡ 数学Ⅱ》

第1講座　3次式の展開と因数分解，二項定理

【p.2】

1 (1) $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$

(2) $27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3$

(3) x^3+27　(4) $8a^3-b^3$

2 (1) $(x+4)(x^2-4x+16)$

(2) $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$

(3) $(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$

(4) $2b(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$

3 (1) $16x^4-32x^3+24x^2-8x+1$

(2) $a^5-5a^4+10a^3-10a^2+5a-1$

(3) $64x^6-192x^5y+240x^4y^2-160x^3y^3+60x^2y^4$
$-12xy^5+y^6$

(4) $x^6+2x^5+\dfrac{5}{3}x^4+\dfrac{20}{27}x^3+\dfrac{5}{27}x^2+\dfrac{2}{81}x+\dfrac{1}{729}$

4 (1) 一般項は，
${}_5\mathrm{C}_r(3x)^{5-r}\cdot(-2)^r=3^{5-r}\cdot(-2)^r{}_5\mathrm{C}_rx^{5-r}$
$5-r=3$ のとき，$r=2$
求める係数は，$3^3\cdot(-2)^2{}_5\mathrm{C}_2=\mathbf{1080}$

(2) 280　(3) 112　(4) $-\dfrac{45}{4}$

5 (1) $\dfrac{5!}{2!1!2!}=\mathbf{30}$　(2) $\dfrac{8!}{2!3!3!}=\mathbf{560}$

(3) a^4b^2c の項は，$\dfrac{7!}{4!2!1!}\cdot a^4\cdot(2b)^2\cdot(-c)$
求める係数は，$105\cdot2^2\cdot(-1)=\mathbf{-420}$

(4) x^5yz^2 の項は，$\dfrac{8!}{5!1!2!}\cdot x^5\cdot y\cdot(-3z)^2$
求める係数は，$168\cdot(-3)^2=\mathbf{1512}$

【p.3】

6 二項定理より，
$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$ ……①
$x=2$ を代入して，
$3^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\cdot2+{}_n\mathrm{C}_2\cdot2^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\cdot2^n$
よって，
${}_n\mathrm{C}_0+2{}_n\mathrm{C}_1+2^2{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+2^n{}_n\mathrm{C}_n=3^n$

7 (1) **6**の等式①に $x=-\dfrac{1}{2}$ を代入して，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+{}_n\mathrm{C}_2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots$$
$$+{}_n\mathrm{C}_n\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

よって，

$${}_n\mathrm{C}_0-\frac{{}_n\mathrm{C}_1}{2}+\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{2^2}-\cdots\cdots+(-1)^n\cdot\frac{{}_n\mathrm{C}_n}{2^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(2) **6**の等式①に $x=-2$ を代入して，
$(-1)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\cdot(-2)+{}_n\mathrm{C}_2\cdot(-2)^2+\cdots\cdots$
$+{}_n\mathrm{C}_n\cdot(-2)^n$
よって，
${}_n\mathrm{C}_0-2{}_n\mathrm{C}_1+2^2{}_n\mathrm{C}_2-\cdots\cdots+(-2)^n{}_n\mathrm{C}_n=(-1)^n$

8 (1) 与式$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$\times(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$
$=\boldsymbol{a^6-b^6}$

(2) 与式$=\{(a+b)(a-b)\}^3$
$=(a^2-b^2)^3$
$=\boldsymbol{a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6}$

(3) 与式$=\{(1-x^2)+x(1-x^2)\}$
$\times\{(1-x^2)-x(1-x^2)\}$
$=(1-x^2)^2-x^2(1-x^2)^2$
$=(1-x^2)^3$
$=\boldsymbol{1-3x^2+3x^4-x^6}$

(4) 与式$=\{a+(b+c)\}$
$\times\{a^2-(b+c)a+(b^2-bc+c^2)\}$
$=a^3+\{(b+c)-(b+c)\}a^2$
$+\{(b^2-bc+c^2)-(b+c)^2\}a$
$+(b+c)(b^2-bc+c^2)$
$=a^3-3bca+b^3+c^3$
$=\boldsymbol{a^3+b^3+c^3-3abc}$

9 (1) 与式$=(x+y)(x^2-xy+y^2)+xy(x+y)$
$=\boldsymbol{(x+y)(x^2+y^2)}$

(2) 与式$=(x^3)^2-(y^3)^2$
$=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$
$=\boldsymbol{(x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)}$

(3) 与式$=(x^3+27)(x^3-1)$
$=\boldsymbol{(x+3)(x-1)(x^2-3x+9)(x^2+x+1)}$

(4) 与式$=\{(2x+y)+(x-2y)\}$
$\times\{(2x+y)^2-(2x+y)(x-2y)+(x-2y)^2\}$
$=\boldsymbol{(3x-y)(3x^2+3xy+7y^2)}$

(5) 与式$=x^3+1+3x(x+1)$
$=(x+1)(x^2-x+1)+3x(x+1)$
$=(x+1)(x^2+2x+1)=\boldsymbol{(x+1)^3}$

(6) 与式$=a^3-8b^3-6ab(a-2b)$
$=(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)-6ab(a-2b)$
$=(a-2b)(a^2-4ab+4b^2)=\boldsymbol{(a-2b)^3}$

10 (1) 一般項は，${}_5\mathrm{C}_r(3x^2)^{5-r}\cdot1^r=3^{5-r}{}_5\mathrm{C}_rx^{10-2r}$
$10-2r=6$ のとき，$r=2$

求める係数は，$3^3{}_5C_2=$**270**

(2)　一般項は，

${}_7C_r(x^2)^{7-r}\cdot(-2x)^r=(-2)^r{}_7C_rx^{14-r}$

$14-r=10$ のとき，$r=4$

求める係数は，$(-2)^4{}_7C_4=$**560**

(3)　一般項は，

${}_6C_r(x^2)^{6-r}\cdot\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r=(-1)^r{}_6C_rx^{12-3r}$

$12-3r=3$ のとき，$r=3$

求める係数は，$(-1)^3{}_6C_3=$**−20**

(4)　一般項は，

${}_{10}C_r(x^3)^{10-r}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)^r=(-1)^r{}_{10}C_rx^{30-5r}$

$30-5r=0$ のとき，$r=6$

求める係数は，$(-1)^6{}_{10}C_6=$**210**

11　(1)　$x^2y^2z^3$ の項は，$\dfrac{7!}{2!2!3!}\cdot(2x)^2\cdot(3y)^2\cdot(-z)^3$

求める係数は，$\dfrac{7!}{2!2!3!}\cdot2^2\cdot3^2\cdot(-1)^3=$**−7560**

(2)　xy^2z の項は，$\dfrac{4!}{1!2!1!}\cdot(2x)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}y\right)^2\cdot z$

求める係数は，$\dfrac{4!}{1!2!1!}\cdot2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=$**6**

(3)　一般項は，$\dfrac{5!}{p!q!r!}\cdot x^p\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^q\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)^r$

$=\dfrac{5!}{p!q!r!}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^q\cdot x^{p-r}$

$p+q+r=5$，$p-r=3$ を満たす 0 以上の整数は，

$(p,\ q,\ r)=(3,\ 2,\ 0)$，$(4,\ 0,\ 1)$

求める係数は，

$\dfrac{5!}{3!2!0!}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5!}{4!0!1!}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^0=\boldsymbol{\dfrac{15}{2}}$

(4)　一般項は，$\dfrac{7!}{p!q!r!}\cdot(x^2)^p\cdot x^q\cdot\left(-\dfrac{2}{x}\right)^r$

$=\dfrac{7!}{p!q!r!}\cdot(-2)^r\cdot x^{2p+q-r}$

$p+q+r=7$，$2p+q-r=0$ を満たす 0 以上の整数は，$(p,\ q,\ r)=(1,\ 2,\ 4)$

定数項は，$\dfrac{7!}{1!2!4!}\cdot(-2)^4=$**1680**

12　二項定理より，

$21^{21}=(1+20)^{21}$

$=1+{}_{21}C_1\cdot20+{}_{21}C_2\cdot20^2+\cdots\cdots+{}_{21}C_{21}\cdot20^{21}$

$=1+21\cdot20+20^2$

$\times({}_{21}C_2+{}_{21}C_3\cdot20+\cdots\cdots+{}_{21}C_{21}\cdot20^{19})$

$=21+400(1+{}_{21}C_2+{}_{21}C_3\cdot20+\cdots\cdots+{}_{21}C_{21}20^{19})$

求める余りは**21**

第 2 講座　整式の除法，分数式の計算

【p.4】

1　(1)　商 $3x-1$，余り 0

(2)　商 $3x^2-3x-1$，余り -1

(3)　商 $x-8$，余り $55x-11$

(4)　商 x^2-x+1，余り -2

2　(1)　商 $5x+9$，余り 21

(2)　商 x^2+x-6，余り 0

3　(1)　$A=(x^2+x-1)(x-2)+(3x-1)$

$=\boldsymbol{x^3-x^2+1}$

(2)　$A=(2x^2+1)(x^2+x-1)+(-x+3)$

$=\boldsymbol{2x^4+2x^3-x^2+2}$

4　(1)　$\dfrac{1}{x-3}$　　(2)　$\dfrac{x-2}{(2x-3)(x-4)}$

(3)　$\dfrac{(x-1)^2}{2}$　　(4)　$\dfrac{x}{x+5y}$

5　(1)　$x-2$　　(2)　$-\dfrac{2}{(x+3)(x+2)}$

(3)　$\dfrac{4}{(x+2)(x-6)}$　　(4)　$\dfrac{3x}{(3x-1)(x+1)}$

【p.5】

6　$x^4-3x^3+2x^2-1=B(x^2+1)+(3x-2)$

$B=\{(x^4-3x^3+2x^2-1)-(3x-2)\}\div(x^2+1)$

$=(x^4-3x^3+2x^2-3x+1)\div(x^2+1)$

$=\boldsymbol{x^2-3x+1}$

7　(1)　$2x^3+5x^2+6x+6=B(2x+3)+(x+3)$

$B=\{2x^3+5x^2+6x+6-(x+3)\}\div(2x+3)$

$=\boldsymbol{x^2+x+1}$

(2)　$x^4-6x^2+x+7=B\times B+(x-2)$ より，

$B^2=x^4-6x^2+9=(x^2-3)^2$

よって，$B=\pm(x^2-3)$

ゆえに，$\boldsymbol{B=x^2-3}$ または $\boldsymbol{B=-x^2+3}$

8　(1)　x について降べきの順に整理する。

与式$=(x^3+x^2y-xy^2-y^3)\div(x-y)$

$=x^2+2xy+y^2$

よって，**商 $\boldsymbol{x^2+2xy+y^2}$，余り 0**

(2)　商 $2x^2-xy+2y^2$，余り 0

(3)　商 $3x+4a$，余り $-5a^2$

(4)　商 $x+2a-2$，余り 1

9　(1)　商 $x-\dfrac{2}{3}$，余り $\dfrac{5}{3}$

(2)　商 $x^2+x+\dfrac{3}{2}$，余り $\dfrac{11}{2}$

10　(1)　$\dfrac{3c^3}{2ab}$　　(2)　$\dfrac{x+2}{x+1}$

(3)　与式$=\dfrac{3}{(x+2)(x-1)}-\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}$

$$+\frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

$$=\frac{3(x+1)-2(x+2)+x-1}{(x+2)(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{2x-2}{(x+2)(x-1)(x+1)}$$

$$=\boldsymbol{\frac{2}{(x+2)(x+1)}}$$

(4)　与式$=\dfrac{x+2}{(2x+3)(x+1)}+\dfrac{x-1}{(2x+3)(x-2)}$

$$-\frac{2x-3}{(x-2)(x+1)}$$

$$=\frac{(x+2)(x-2)+(x-1)(x+1)-(2x-3)(2x+3)}{(2x+3)(x+1)(x-2)}$$

$$=\frac{x^2-4+x^2-1-4x^2+9}{(2x+3)(x+1)(x-2)}$$

$$=\boldsymbol{\frac{-2(x^2-2)}{(2x+3)(x+1)(x-2)}}$$

11　(1)　与式$=\dfrac{(x+2)(x+1)}{\left(x-\dfrac{2}{x+1}\right)(x+1)}$

$$=\frac{(x+2)(x+1)}{x(x+1)-2}$$

$$=\frac{(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-1)}$$

$$=\boldsymbol{\frac{x+1}{x-1}}$$

(2)　与式$=\dfrac{\left(1+\dfrac{a-b}{a+b}\right)(a+b)}{\left(1-\dfrac{a-b}{a+b}\right)(a+b)}$

$$=\frac{a+b+a-b}{a+b-(a-b)}$$

$$=\frac{2a}{2b}=\boldsymbol{\frac{a}{b}}$$

別解　与式$=\dfrac{\dfrac{a+b+a-b}{a+b}}{\dfrac{a+b-(a-b)}{a+b}}=\dfrac{2a}{2b}=\boldsymbol{\dfrac{a}{b}}$

12　$4x^3-2x^2+3=(x^2-x+1)(4x+2)-2x+1$

$x^2-x+1=B$，$4x+2=Q$，$-2x+1=R$ とおくと，

$(BQ+R)^3=B^3Q^3+3B^2Q^2R+3BQR^2+R^3$ より，

$(BQ+R)^3$ をBで割った余りは，R^3 をBで割った余りに等しい。

$R^3=(-2x+1)^3=-8x^3+12x^2-6x+1$

$(-8x^3+12x^2-6x+1)\div(x^2-x+1)$ の商は

$-8x+4$，余りは $\boldsymbol{6x-3}$

第3講座　恒等式

【p.6】

1　②，③

2　(1)　右辺を展開し，整理して係数を比較する。

右辺$=ax^2+(2a+b)x+a+b+c$

よって，$a=1$，$2a+b=4$，$a+b+c=1$

ゆえに，$\boldsymbol{a=1}$，$\boldsymbol{b=2}$，$\boldsymbol{c=-2}$

(2)　$a=3$，$b=2$，$c=1$

(3)　$a=2$，$b=1$

(4)　$a=3$，$b=3$，$c=0$

3　(1)　$x=0$ を代入して，$2=2b$ より，$\boldsymbol{b=1}$

$x=1$ を代入して，$0=-c$ より，$\boldsymbol{c=0}$

$x=2$ を代入して，$0=2a$ より，$\boldsymbol{a=0}$

(2)　$a=1$，$b=-2$，$c=3$

(3)　$a=1$，$b=6$，$c=7$，$d=1$

4　(1)　$x+1=t$ とおくと，

$(t-1)^3=t^3+at^2+bt+c$

$t^3-3t^2+3t-1=t^3+at^2+bt+c$

係数を比較して，$\boldsymbol{a=-3}$，$\boldsymbol{b=3}$，$\boldsymbol{c=-1}$

(2)　$x+3=t$ とおくと，

$(t-3)^3+2(t-3)^2-4=t^3+at^2+bt+c$

$t^3-7t^2+15t-13=t^3+at^2+bt+c$

係数を比較して，$\boldsymbol{a=-7}$，$\boldsymbol{b=15}$，$\boldsymbol{c=-13}$

5　等式の両辺に $(x+1)(2x-1)$ を掛けて，

$2x-7=a(2x-1)+b(x+1)$

$2x-7=(2a+b)x+(-a+b)$

これも x についての恒等式だから，

$2=2a+b$，$-7=-a+b$

これを解いて，$\boldsymbol{a=3}$，$\boldsymbol{b=-4}$

【p.7】

6　商は1次式で $cx+d$ と表される。

$2x^3+ax^2+bx-1=(x^2-3x+1)(cx+d)$

右辺を x について整理して，

$2x^3+ax^2+bx-1$

$=cx^3+(-3c+d)x^2+(c-3d)x+d$

x についての恒等式だから，

$2=c$，$a=-3c+d$，$b=c-3d$，$-1=d$

これを解いて，$\boldsymbol{a=-7}$，$\boldsymbol{b=5}$

7　商は1次式で $cx+d$ と表される。

$x^3+ax-6=(x^2+3x+b)(cx+d)$

右辺を x について整理して，

$x^3+ax-6=cx^3+(3c+d)x^2+(bc+3d)x+bd$

x についての恒等式だから，

$1=c$，$0=3c+d$，$a=bc+3d$，$-6=bd$

これを解いて，$\boldsymbol{a=-7}$，$\boldsymbol{b=2}$

8　(1)　$a=2$，$b=-5$，$c=2$，$d=-3$

(2)　$x+1=t$ とおくと，$x=t-1$

$2x+1=2(t-1)+1=2t-1$
$(2t-1)^3=at^3+bt^2+ct+d$
$8t^3-12t^2+6t-1=at^3+bt^2+ct+d$
係数を比較して，$\boldsymbol{a=8}$，$\boldsymbol{b=-12}$，$\boldsymbol{c=6}$，$\boldsymbol{d=-1}$

(3) 等式の両辺に $(3x+1)(x-2)$ を掛けて，
$4x+5=a(x-2)+b(3x+1)$
$4x+5=(a+3b)x+(-2a+b)$
これも x についての恒等式だから，
$4=a+3b$，$5=-2a+b$
これを解いて，$\boldsymbol{a=-\frac{11}{7}}$，$\boldsymbol{b=\frac{13}{7}}$

9 (1) 左辺を k について整理して，
$(x+y)k-2x-y=4k-1$
k についての恒等式だから，
$x+y=4$，$-2x-y=-1$
これを解いて，$\boldsymbol{x=-3}$，$\boldsymbol{y=7}$

(2) $x=1$，$y=2$

10 (1) $P(2x+3)=a(2x+3)+b=2ax+(3a+b)$
より，$2ax+(3a+b)=x$
x についての恒等式だから，
$2a=1$，$3a+b=0$
これを解いて，$\boldsymbol{a=\frac{1}{2}}$，$\boldsymbol{b=-\frac{3}{2}}$

(2) $P(x)=x+c$ と表される。
$(x-1)(x^2+2)(x+c)=x^4+ax^2+b$
左辺を展開して整理すると，
$x^4+(c-1)x^3+(2-c)x^2+(2c-2)x-2c$
$=x^4+ax^2+b$
係数を比較して，$c=1$
よって，$\boldsymbol{a=1}$，$\boldsymbol{b=-2}$

11 $(x^2+x-6)P(x)=x^4+ax+b$
$(x+3)(x-2)P(x)=x^4+ax+b$
両辺に $x=-3$，$x=2$ を代入して，
$0=81-3a+b$，$0=16+2a+b$
これを解いて，$\boldsymbol{a=13}$，$\boldsymbol{b=-42}$

12 $x+y=2$ より，$y=2-x$
これを $ax^2+bx+cy^2=4$ に代入して，
$ax^2+bx+c(2-x)^2=4$
展開して整理すると，
$(a+c)x^2+(b-4c)x+(4c-4)=0$
x についての恒等式だから，
$a+c=0$，$b-4c=0$，$4c-4=0$
これを解いて，$\boldsymbol{a=-1}$，$\boldsymbol{b=4}$，$\boldsymbol{c=1}$

第4講座 等式・不等式の証明

【p.8】

1 (1) 左辺$=(a^4+2a^2b^2+b^4)-(a^2-b^2)^2$
$=(a^4+2a^2b^2+b^4)-(a^4-2a^2b^2+b^4)$
$=4a^2b^2$
$=$右辺

(2) 左辺$=(a-b)\{a^2(a+b)+b^2(a+b)\}$
$=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$
$=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$
$=a^4-b^4$
$=$右辺

(3) 左辺$=a^2c^2-a^2d^2-b^2c^2+b^2d^2$
右辺$=(a^2c^2+2abcd+b^2d^2)$
$-(a^2d^2+2abcd+b^2c^2)$
$=a^2c^2+b^2d^2-a^2d^2-b^2c^2$
よって，左辺$=$右辺

2 $c=-(a+b)$ として代入する。

(1) 左辺
$=a^2+b^2+(a+b)^2+2ab-2b(a+b)-2a(a+b)$
$=(a+b)^2+(a+b)^2-2(a+b)^2$
$=0$
$=$右辺

(2) 右辺$=\{-(a+b)\}^2-(a+b)a$
$=a^2+2ab+b^2-a^2-ab$
$=b^2+ab$
$=$左辺

3 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ とおくと，$a=bk$，$c=dk$

(1) 左辺$=\frac{2bk-dk}{2b-d}=\frac{k(2b-d)}{2b-d}=k$
右辺$=\frac{3bk+dk}{3b+d}=\frac{k(3b+d)}{3b+d}=k$
よって，左辺$=$右辺

(2) 左辺$=\frac{bk \cdot b}{dk \cdot d}=\frac{b^2}{d^2}$
右辺$=\frac{(bk)^2-b^2}{(dk)^2-d^2}=\frac{b^2(k^2-1)}{d^2(k^2-1)}=\frac{b^2}{d^2}$
よって，左辺$=$右辺

4 (1) $x^2+4y^2-4xy=(x-2y)^2 \geqq 0$
よって，$x^2+4y^2 \geqq 4xy$
等号は $x=2y$ のとき成り立つ。

(2) $x^2+y^2-(2x+6y-10)=(x-1)^2+(y-3)^2 \geqq 0$
よって，$x^2+y^2 \geqq 2x+6y-10$
等号は $x=1$，$y=3$ のとき成り立つ。

(3) $a^2+3ab+3b^2=\left(a+\frac{3}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geqq 0$
等号は $a=b=0$ のとき成り立つ。