● 本書の特色と構成 ●

1 本書は，数学Ｃの内容のうち，平面上のベクトル，空間のベクトルついて，基本事項の徹底理解から標準的な応用問題が解けるまでの実力養成を目的として編集されています。

2 全体は 10 講座から成り，各講座とも 1〜1.5 時間が標準授業時間です。

3 各講座の構成は以下の通りです。

①基本の整理　…基本事項を，１つ１つの問題を解くことで確認します。

②演　　　習　…例題として取り上げた最も重要でかつ応用範囲の広い問題や，その類題を解くことによって解法を修得します。さらに，例題の関連問題や，やや発展的な問題についても練習して，さまざまなタイプの問題に対応できる応用力を養成します。

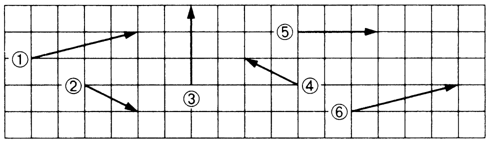
も　く　じ

第 1 講座　ベクトルの演算

基本の整理

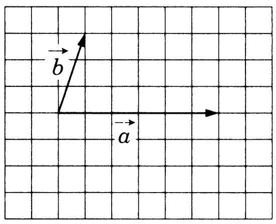
〈ベクトルの意味〉　▶$\vec{a}=\vec{b} \iff \vec{a}$ と $\vec{b}$ の向きが同じで，大きさが等しい。

1　右の図で，(1)等しいベクトル　(2)大きさの等しいベクトル　(3)互いに逆ベクトルのものを表す有向線分はそれぞれどれとどれか。番号で答えよ。



〈ベクトルの作図〉　▶和は平行四辺形の対角線とするか，終点と始点を重ねてつなぐ。

2　右の図のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ において，和 $\vec{a}+\vec{b}$，差 $\vec{a}-\vec{b}$ をそれぞれ作図せよ。



〈単位ベクトル〉　▶大きさが 1 のベクトルを単位ベクトルという。

3　$|\vec{a}|=2$ のとき，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよ。

〈ベクトルの演算〉　▶ベクトルを含む式の計算は，整式の場合と同じように行えばよい。

4　次の計算をせよ。

(1)　$2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{a}$　　　(2)　$4(\vec{a}-\vec{b})-3(2\vec{a}-3\vec{b})$

〈ベクトルの平行〉　▶$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}\parallel\vec{b} \iff \vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 $k(\neq 0)$ が存在する。

5　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=3\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{a}-3\vec{b}$，$\overrightarrow{OD}=5\vec{a}-\vec{b}$ とするとき，AB // CD となることを示せ。

〈直線 AB 上の点〉　▶点 P が直線 AB 上にある $\iff \overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k が存在する。

6　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OP}=3\vec{b}-2\vec{a}$ とするとき，点 P は直線 AB 上にあることを示せ。

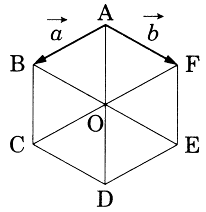
演　習

◆◆◆ **例題** **ベクトルと図形** ◆◆◆

7　右の図の正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BD}$をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2)　$\vec{a}$ を$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BD}$で表せ。



解法のポイント　$\vec{x}=m\vec{a}+n\vec{b}$，$\vec{y}=m'\vec{a}+n'\vec{b}$ の連立方程式を解くと，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を $\vec{x}$，$\vec{y}$で表すことができる。

8 **類題**　△ABC の辺 AB，BC の中点をそれぞれ M，N とし，$\overrightarrow{BA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MN}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2)　$\vec{a}$ を $\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MN}$ で表せ。

9　次の式を満たすベクトル $\vec{x}$，$\vec{y}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(1)　$3(\vec{a}-\vec{x})=2\vec{a}-3\vec{b}$

(2)　$2\vec{x}+\vec{a}=4(\vec{a}-3\vec{b})-\vec{x}$

(3)　$\begin{cases} \vec{x}-\vec{y}=\vec{b} \\ 2\vec{x}+\vec{y}=\vec{a} \end{cases}$

(4)　$\begin{cases} 2\vec{x}-\vec{y}=\vec{a}-2\vec{b} \\ \vec{x}-\vec{a}=8\vec{b}-3\vec{y} \end{cases}$

10　次の問いに答えよ。

(1)　AB＝4，AD＝3 の長方形 ABCD がある。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{BD}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2)　正八角形 ABCDEFGH がある。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ として，$\overrightarrow{HD}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

11　△ABC の辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ P，Q，R として，次の等式を証明せよ。

(1)　$\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{RB}=\overrightarrow{RQ}$

(2)　$\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CQ}=\vec{0}$

12 **発展**　点 P と四角形 ABCD とが同じ平面上にあって，$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{BC}$，$\vec{c}=\overrightarrow{CD}$とする。$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{AD}$ であるとき，$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

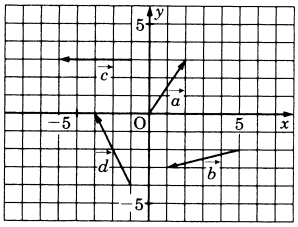
ヒント　$\overrightarrow{AP}=\vec{p}$ とすると，$\overrightarrow{PA}=-\vec{p}$，$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}=-\vec{p}+\vec{a}$ のように表される。

第 2 講座　ベクトルの成分

基本の整理

〈ベクトルの成分〉 ▶$\vec{e_1}=(1,\ 0)$，$\vec{e_2}=(0,\ 1)$とすると，$\vec{a}=(a_1,\ a_2) \iff \vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$

1　右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を成分で表せ。



〈和·差·実数倍の成分〉 ▶$(a_1,\ a_2)\pm(b_1,\ b_2)=(a_1\pm b_1,\ a_2\pm b_2)$（複号同順），$k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)$

2　$\vec{a}=(-2,\ 1)$，$\vec{b}=(2,\ -3)$ のとき，次のベクトルの成分を求めよ。

(1)　$\vec{a}+\vec{b}$　　　(2)　$-2\vec{a}+3\vec{b}$

〈ベクトルの大きさ〉 ▶$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき，ベクトルの大きさ$|\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$

3　$\vec{a}=(3,\ -1)$，$\vec{b}=(2,\ 1)$ のとき，次のベクトルの大きさを求めよ。

(1)　$3\vec{a}$　　　(2)　$\vec{a}-\vec{b}$

〈成分と座標〉 ▶$\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ について，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$

4　次の 2 点 A，B について，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分と大きさを求めよ。

(1)　A(3，1)，B(6，5)　　　(2)　A(5，−4)，B(−1，−2)

〈ベクトルの成分決定〉 ▶$(a_1,\ a_2)=(b_1,\ b_2) \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2$

5　$\vec{a}=(2,\ 5)$，$\vec{b}=(-1,\ 3)$のとき，次の式を満たす $\vec{x}$ の成分を求めよ。

(1)　$\vec{a}+\vec{x}=2\vec{b}$　　　(2)　$\vec{a}-\vec{x}=3\vec{b}-3\vec{x}$

〈ベクトルの分解〉 ▶$(x,\ y)=m(a_1,\ a_2)+n(b_1,\ b_2) \iff x=ma_1+nb_1,\ y=ma_2+nb_2$

6　$\vec{a}=(-1,\ 1)$，$\vec{b}=(2,\ 3)$のとき，$\vec{c}=(1,\ 9)$ を $m\vec{a}+n\vec{b}$（m，n は実数）の形に表せ。

演　習

例題　ベクトルの大きさの最小値

7　$\vec{a}=(3,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 2)$ のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値とそのときの実数 t の値を求めよ。

解法のポイント　$\vec{a}+t\vec{b}$ を成分で表し，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ を t についての 2 次式と考えて，その最小値を求める。

8 類題　$\vec{a}=(2,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ 1)$のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値とそのときの実数 t の値を求めよ。

9　次の問いに答えよ。

(1)　$\vec{a}=(3,\ -4)$と同じ向きの単位ベクトルの成分を求めよ。

(2)　$\vec{a}+\vec{b}=(1,\ 2)$，$\vec{a}-\vec{b}=(3,\ -4)$のとき，$|\vec{a}|$を求めよ。

(3)　$\vec{a}=(2,\ 3)$，$\vec{b}=(x,\ 1)$について，$\vec{a}+\vec{b}$ と $2\vec{a}-3\vec{b}$ が平行のとき，x の値を求めよ。

10　$\vec{a}=(2,\ 3)$，$\vec{b}=(-1,\ 1)$のとき，$\vec{x}-\vec{a}$ が $\vec{b}$ に平行で，かつ，$|\vec{x}-\vec{a}|=6$ となるような $\vec{x}$ を求めよ。

11　座標平面上に 3 点 A(1，3)，B(4，3)，C(6，x) がある。四角形 ABCD がひし形になるように x の値および点 D の座標を定めよ。

12　$\overrightarrow{OA}=(-5,\ 2)$，$\overrightarrow{OB}=(1,\ -3)$，$\overrightarrow{OC}=(x,\ y)$ とする。3 点 A，B，C が一直線上にあるとき，x と y の関係式を求めよ。

13 発展　3 つのベクトルを $\vec{a}=(-1,\ 2)$，$\vec{b}=(-3,\ -2)$，$\vec{c}=(3,\ 10)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$|3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}|$を求めよ。　　(2)　$\vec{c}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(3)　$\vec{d}=\vec{a}+x\vec{b}$ とする。$|\vec{d}|=\sqrt{5}$ のとき，x の値を求めよ。

(4)　$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値と，そのときの実数 t の値を求めよ。

ヒント　(2)　$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ とおき，成分で考える。　(4)　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ として考える。

第 3 講座　ベクトルの内積

基本の整理

〈内積の定義〉 ▶$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

1 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，次の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(1) $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\theta=60°$　　(2) $|\vec{a}|=\sqrt{6}$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，$\theta=150°$

〈内積と成分〉 ▶$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ の内積は，$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

2 次の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積を求めよ。

(1) $\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(-2,\ 3)$　　(2) $\vec{a}=(0,\ 2)$，$\vec{b}=(-3,\ 0)$

〈内積の基本的性質①〉 ▶$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$，$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$，$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

3 次の内積を $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ で表せ。

(1) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$　　(2) $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})$

〈内積の基本的性質②〉 ▶$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$ を利用する。

4 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}+\vec{b}|=5$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ と $|\vec{a}-\vec{b}|$ を求めよ。

〈ベクトルのなす角〉 ▶$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}}$　ただし，$0°\leqq\theta\leqq180°$

5 次の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を求めよ。

(1) $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$　　(2) $\vec{a}=(6,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ -1)$

〈ベクトルの垂直条件〉 ▶$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$ すなわち $\vec{a}\perp\vec{b} \iff a_1b_1+a_2b_2=0$

6 2 つのベクトル $\vec{a}=(2,\ k)$，$\vec{b}=(6,\ 3)$ が垂直になるように k の値を定めよ。

〈ベクトルの平行条件〉 ▶$\vec{a}/\!/\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$　すなわち $\vec{a}/\!/\vec{b} \iff a_1b_2-a_2b_1=0$

7 2 つのベクトル $\vec{a}=(p,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ p-1)$ が平行になるように p の値を定めよ。

演　習

例題　三角形の面積

8　△OAB において，$\overrightarrow{OA}=(2,\ 1)$，$\overrightarrow{OB}=(1,\ 3)$，$\angle AOB=\theta$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\cos\theta$ の値を求めよ。　　(2)　△OAB の面積を求めよ。

解法のポイント　内積$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta$ から $\cos\theta$ の値を求める。$0°<\theta<180°$ から $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$ より，$S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta$ が求められる。

9　類題　3 点 A(1,　0)，B(4,　1)，C(2,　3) を頂点とする△ABC において，次の問いに答えよ。

(1)　$\cos\angle BAC$ の値を求めよ。　　(2)　△ABC の面積を求めよ。

10　AB＝2，AC＝3，$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$の内積が 4 である△ABC の面積を求めよ。

11　1 辺の長さが 2 の正三角形 ABC について，辺 BC の中点を M として，次の内積を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$　　(2)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$

12　正六角形 ABCDEF において，1 辺の長さが a であるとき，次の内積を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$　　(2)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$

(3)　$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BF}$　　(4)　$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CF}$

13　次の問いに答えよ。

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=10$ であるとき，$|\vec{a}+\vec{b}|$ と $|\vec{a}-\vec{b}|$ の値をそれぞれ求めよ。

(2)　2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $|\vec{a}+\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-\vec{b}|=1$ を満たすとき，$|2\vec{a}-\vec{b}|^2+|\vec{a}-2\vec{b}|^2$ の値を求めよ。

14　発展　座標平面上の 2 点 A(8,　2)，B(2,　8) と直線 $y=kx$ 上の点 P$(x,\ y)$ がある。2 つのベクトル $\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{BP}$ の内積 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ が $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$ を満たすとき，k の値の範囲を求めよ。

ヒント　y を消去して，$D\geqq 0$ から k についての不等式を解く。

例題　2つのベクトルのなす角

15　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，$|\vec{a}|=|\vec{b}|$ で，また，$|2\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}+3\vec{b}|$ であるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

解法のポイント　$|2\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}+3\vec{b}|^2$ から，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$ で表す。さらに $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ を用いれば，$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ より，$\cos\theta$ の値が求められる。

16 **類題**　2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，$|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{a}-4\vec{b}|=4$ とする。$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

17　次の問いに答えよ。

(1)　$\vec{a}=(2,\ -1)$, $\vec{b}=(x,\ 2)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直となるように x の値を定めよ。

(2)　3 つのベクトル $\vec{a}=(3,\ 2)$, $\vec{b}=(-1,\ 1)$, $\vec{c}=(6,\ -1)$ について，$\vec{a}+x\vec{b}$ と $\vec{c}$ が平行になるように x の値を定めよ。

(3)　O を原点とし，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ -1)$ に垂直な単位ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を求めよ。

18　$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角の余弦を求めよ。

(2)　$2\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさを t で表せ。

19　$\vec{a}\perp\vec{b}$ で，$|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$ のとき，$\vec{a}+(t+2)\vec{b}$ と $-\vec{a}+t\vec{b}$ が垂直になるように t の値を定めよ。

20　3 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ について，$|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=7$, $|\vec{c}|=5$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ であるとき，$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ として $\cos\theta$ の値を求めよ。

21 **発展**　2 つのベクトル $\vec{a}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$, $\vec{b}=(\cos\beta,\ \sin\beta)$ $(0^\circ<\alpha<\beta<180^\circ)$ がある。

(1)　$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ は垂直であることを示せ。

(2)　すべての実数 t に対して，$|t\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-t\vec{b}|$ であるとき，$\beta-\alpha$ を求めよ。

ヒント　(2)　$|t\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}-t\vec{b}|^2$ として t の 2 次式で考える。

解　答　　《selectⅡ 数学C》

第1講座 ベクトルの演算

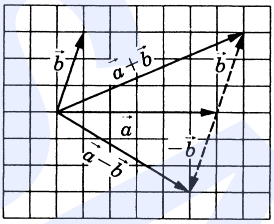
[p. 2]

1 (1) ①と⑥

(2) ①と⑥，②と④，③と⑤

(3) ②と④

2



3 $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{\boldsymbol{\vec{a}}}{\mathbf{2}}$

4 (1) $5\vec{a}-\vec{b}$　　(2) $-2\vec{a}+5\vec{b}$

5 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3\vec{a}+\vec{b})-\vec{a}=2\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=(5\vec{a}-\vec{b})-(\vec{a}-3\vec{b})$

$=4\vec{a}+2\vec{b}$

$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}$より，$AB /\!/ CD$

6 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(3\vec{b}-2\vec{a})-\vec{a}=3(\vec{b}-\vec{a})$

$\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{AB}$より，点 P は直線 AB 上にある。

[p. 3]

7 (1) $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$　$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}$

$=\vec{a}+\vec{b}$　よって，$\boldsymbol{\overrightarrow{AD}=2(\vec{a}+\vec{b})}$

$\boldsymbol{\overrightarrow{BD}}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=2(\vec{a}+\vec{b})-\vec{a}=\boldsymbol{\vec{a}+2\vec{b}}$

(2) (1)より，$\overrightarrow{AD}=2\vec{a}+2\vec{b}$……①

$\overrightarrow{BD}=\vec{a}+2\vec{b}$……②

①－②から，$\boldsymbol{\vec{a}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}}$

8 (1) $\overrightarrow{MC}=\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$

(2) $\vec{a}=2\overrightarrow{MC}-4\overrightarrow{MN}$

9 (1) $\vec{x}=\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}$　　(2) $\vec{x}=\vec{a}-4\vec{b}$

(3) $\vec{x}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$，$\vec{y}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$

(4) $\vec{x}=\frac{4}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}$，$\vec{y}=\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{18}{7}\vec{b}$

10 (1) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$

$|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$ より

求める単位ベクトルは$\dfrac{\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BD}|}=\boldsymbol{\dfrac{1}{5}(\vec{b}-\vec{a})}$

(2) $\overrightarrow{HD}=\sqrt{2}\,(\vec{a}+\vec{b})$

11 (1) $\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{RB}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{RQ}$

(2) $\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\vec{0}$

12 $\overrightarrow{AP}=\vec{p}$とすると，$\overrightarrow{PA}=-\vec{p}$

$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}=-\vec{p}+\vec{a}$

$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\vec{p}+\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AD}=-\vec{p}+\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{AD}$ であるとき

$-\vec{p}+(-\vec{p}+\vec{a})+(-\vec{p}+\vec{a}+\vec{b})-\vec{p}=\vec{0}$ より

$-4\vec{p}+2\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$

よって，$\boldsymbol{\overrightarrow{AP}}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{4}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}}$

第2講座 ベクトルの成分

[p. 4]

1 $\vec{a}=(2,\ 3)$，$\vec{b}=(-4,\ -1)$，$\vec{c}=(-4,\ 0)$

$\vec{d}=(-2,\ 4)$

2 (1) $\vec{a}+\vec{b}=(-2,\ 1)+(2,\ -3)=\boldsymbol{(0,\ -2)}$

(2) $-2\vec{a}+3\vec{b}=-2(-2,\ 1)+3(2,\ -3)$

$=\boldsymbol{(10,\ -11)}$

3 (1) $3\vec{a}=(9,\ -3)$ より，$|3\vec{a}|=\boldsymbol{3\sqrt{10}}$

(2) $\vec{a}-\vec{b}=(1,\ -2)$ より，$|\vec{a}-\vec{b}|=\boldsymbol{\sqrt{5}}$

4 (1) $\overrightarrow{AB}=(6-3,\ 5-1)=\boldsymbol{(3,\ 4)}$，

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+4^2}=\mathbf{5}$

(2) $\overrightarrow{AB}=(-1-5,\ -2+4)=\boldsymbol{(-6,\ 2)}$，

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-6)^2+2^2}=\boldsymbol{2\sqrt{10}}$

5 (1) $\vec{x}=2\vec{b}-\vec{a}=2(-1,\ 3)-(2,\ 5)$

$=\boldsymbol{(-4,\ 1)}$

(2) $\vec{x}=\frac{3}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{3}{2}(-1,\ 3)-\frac{1}{2}(2,\ 5)$

$=\boldsymbol{\left(-\frac{5}{2},\ 2\right)}$

6 $(1,\ 9)=m(-1,\ 1)+n(2,\ 3)$

$=(-m+2n,\ m+3n)$

$-m+2n=1$……①，$m+3n=9$……②

①，②から，$m=3$，$n=2$

よって，$\boldsymbol{\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}}$

[p. 5]

7 $\vec{a}+t\vec{b}=(3,\ 1)+t(1,\ 2)=(3+t,\ 1+2t)$

$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(3+t)^2+(1+2t)^2$

$=5t^2+10t+10=5(t+1)^2+5$

よって，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は，$\boldsymbol{t=-1}$ のとき，最小値 5

$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq 0$ より，$|\vec{a}+t\vec{b}|$もこのとき最小値をとり，

最小値$\boldsymbol{\sqrt{5}}$

8 $t=-\dfrac{5}{2}$ のとき，最小値$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

9 (1) $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$ より

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{5}(3,\ -4)=\left(\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$$

(2) $\vec{a}=(2,\ -1)$ より，$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

(3) $\vec{a}+\vec{b}=(2+x,\ 4)$

$2\vec{a}-3\vec{b}=(4-3x,\ 3)$

2 つのベクトルが平行であることから

$2\vec{a}-3\vec{b}=k(\vec{a}+\vec{b})$ とおける。

よって，$(4-3x,\ 3)=(2k+kx,\ 4k)$

$4-3x=2k+kx,\ \ 3=4k$ から，$k=\dfrac{3}{4}$

このとき，$\boldsymbol{x=\dfrac{2}{3}}$

10 $\vec{x}-\vec{a}=k\vec{b}$とおけるから

$\vec{x}-\vec{a}=k(-1,\ 1)=(-k,\ k)$

$|\vec{x}-\vec{a}|=6$ より，$|\vec{x}-\vec{a}|^2=36$

よって，$(-k)^2+k^2=36$ から，$k=\pm3\sqrt{2}$

ゆえに，$\vec{x}=(2,\ 3)+(\mp3\sqrt{2},\ \pm3\sqrt{2})$

$=\boldsymbol{(2\mp3\sqrt{2},\ 3\pm3\sqrt{2})}$ **（複号同順）**

11 D$(a,\ b)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,\ 0)$

$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=(6-a,\ x-b)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$より，$6-a=3,\ x-b=0$

よって，$a=3,\ b=x$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(2,\ b-3)$ で，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$より，

$3^2+0^2=2^2+(b-3)^2$ から，$b=3\pm\sqrt{5}$

このとき，$\boldsymbol{x=b=3\pm\sqrt{5}}$，$\boldsymbol{\mathrm{D}(3,\ 3\pm\sqrt{5})}$

（複号同順）

12 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(-6,\ 5)$

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(x-1,\ y+3)$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=k\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ より

$(x-1,\ y+3)=k(-6,\ 5)$

よって，$x-1=-6k,\ \ y+3=5k$

2 式から k を消去すると，$\boldsymbol{5x+6y+13=0}$

13 (1) $3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}=(6,\ 20)$ より

$|3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{6^2+20^2}=\boldsymbol{2\sqrt{109}}$

(2) $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ とおくと

$(3,\ 10)=m(-1,\ 2)+n(-3,\ -2)$ より

$3=-m-3n,\ \ 10=2m-2n$

これを解いて，$m=3,\ n=-2$

よって，$\boldsymbol{\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}}$

(3) $\vec{a}+x\vec{b}=(-1-3x,\ 2-2x)$ より

$|\vec{d}|^2=(-1-3x)^2+(2-2x)^2=5$

$13x^2-2x=0$ から，$\boldsymbol{x=0,\ \dfrac{2}{13}}$

(4) $\vec{a}+t\vec{b}=(-1-3t,\ 2-2t)$

$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(-1-3t)^2+(2-2t)^2$

$=13t^2-2t+5=13\left(t-\dfrac{1}{13}\right)^2+\dfrac{64}{13}$

よって，$\boldsymbol{t=\dfrac{1}{13}}$ **のとき，最小値$\boldsymbol{\dfrac{8\sqrt{13}}{13}}$**

第 3 講座 ベクトルの内積

[p. 6]

1 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot3\cdot\cos60^\circ=\boldsymbol{3}$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos150^\circ=\boldsymbol{-3}$

2 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot(-2)+1\cdot3=\boldsymbol{-1}$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\cdot(-3)+2\cdot0=\boldsymbol{0}$

3 (1) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=\boldsymbol{|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}$

(2) $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})$

$=2\vec{a}\cdot2\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot2\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=\boldsymbol{4|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2}$

4 $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$ より

$25=9+2\vec{a}\cdot\vec{b}+4$　よって，$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=6}$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=9-12+4=1$

よって，$\boldsymbol{|\vec{a}-\vec{b}|=1}$

5 (1) $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{3}{2\cdot3}=\dfrac{1}{2}$ より

$\boldsymbol{\theta=60^\circ}$

(2) $\cos\theta=\dfrac{6\cdot2+2\cdot(-1)}{\sqrt{36+4}\ \sqrt{4+1}}=\dfrac{10}{10\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

より，$\boldsymbol{\theta=45^\circ}$

6 $2\cdot6+k\cdot3=0$ より，$\boldsymbol{k=-4}$

7 $\vec{a}/\!/\vec{b}$より，$\vec{b}=k\vec{a}$ とおける。

$(3,\ p-1)=k(p,\ 2)=(pk,\ 2k)$

よって，$3=pk,\ \ p-1=2k$

k を消去すると，$p^2-p-6=0$

$(p-3)(p+2)=0$ より，$\boldsymbol{p=3,\ -2}$

別解　$p\cdot(p-1)-2\cdot3=0$

から，p を求めてもよい。

(注) $p=3$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一致する。

[p. 7]

8 (1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\cdot1+1\cdot3=5$

よって，$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}=\dfrac{5}{\sqrt{5}\ \sqrt{10}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

(2) $0^\circ<\theta<180^\circ$ より，$\theta=45^\circ$

よって，$\sin\theta=\sin45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より

$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin\theta$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$

9 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,\ 3)$ より

$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\dfrac{3\cdot1+1\cdot3}{\sqrt{3^2+1^2}\ \sqrt{1^2+3^2}}$

$=\dfrac{6}{\sqrt{10}\ \sqrt{10}}=\boldsymbol{\dfrac{3}{5}}$

(2) $\sin\angle \mathrm{BAC}=\frac{4}{5}$ から

$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\angle \mathrm{BAC}$

$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{4}{5}=\mathbf{4}$

10 $\cos\angle \mathrm{BAC}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\frac{4}{2\cdot3}=\frac{2}{3}$

$\sin\angle \mathrm{BAC}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin\angle \mathrm{BAC}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}$

$=\boldsymbol{\sqrt{5}}$

11 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos 60^\circ$

$=2\cdot2\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{2}$

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|=\sqrt{3}$ より，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AM}}|\cos 30^\circ=2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\mathbf{3}$

12 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AF}}|\cos 120^\circ$

$=a\cdot a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{-\frac{1}{2}a^2}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$は直交するから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\mathbf{0}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$と$\overrightarrow{\mathrm{BF}}$は直交するから，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\mathbf{0}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}||\overrightarrow{\mathrm{CF}}|\cos 120^\circ=\boldsymbol{-2a^2}$

13 (1) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=10+2\cdot3=16$ より，$|\vec{a}+\vec{b}|=\mathbf{4}$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=10-2\cdot3=4$ より，$|\vec{a}-\vec{b}|=\mathbf{2}$

(2) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4$……①

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$……②

①－②から，$4\vec{a}\cdot\vec{b}=3$ より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{3}{4}$

①＋②から，$2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)=5$ より

$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=\frac{5}{2}$

よって，$|2\vec{a}-\vec{b}|^2+|\vec{a}-2\vec{b}|^2$

$=5(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)-8\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=5\cdot\frac{5}{2}-8\cdot\frac{3}{4}=\boldsymbol{\frac{13}{2}}$

14 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-8,\ kx-2)$

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x-2,\ kx-8)$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ から

$(x-8)(x-2)+(kx-2)(kx-8)=0$

$(k^2+1)x^2-10(1+k)x+32=0$

x が実数であるから，$\frac{D}{4}\geqq0$ より

$25(1+k)^2-32(k^2+1)\geqq0$

$7k^2-50k+7\leqq0$ から，$(7k-1)(k-7)\leqq0$

よって，求める k の値の範囲は，$\boldsymbol{\frac{1}{7}\leqq k\leqq7}$

[p. 8]

15 $|2\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}+3\vec{b}|^2$より

$4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2$

$3|\vec{a}|^2-10\vec{a}\cdot\vec{b}-8|\vec{b}|^2=0$，$|\vec{a}|=|\vec{b}|$から

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{3|\vec{a}|^2-8|\vec{b}|^2}{10}=\frac{-5|\vec{a}|^2}{10}=-\frac{|\vec{a}|^2}{2}$

$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\frac{|\vec{a}|^2}{2|\vec{a}|^2}=-\frac{1}{2}$

よって，$\boldsymbol{\theta=120^\circ}$

16 $|\vec{a}-4\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-8\vec{a}\cdot\vec{b}+16|\vec{b}|^2$

$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=2$ より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{73}{8}$

よって，$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\boldsymbol{\frac{73}{80}}$

17 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ より，$2x+(-1)\cdot2=0$

よって，$\boldsymbol{x=1}$

(2) $\vec{a}+x\vec{b}=(3-x,\ 2+x)$

$\vec{a}+x\vec{b}\,/\!/\,\vec{c}$ より，$\vec{a}+x\vec{b}=k\vec{c}$ とおける。

$3-x=6k$，$2+x=-k$

これを解いて，$k=1$　このとき，$\boldsymbol{x=-3}$

(3) $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，$x^2+y^2=1$……①

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ より，$x-y=0$……②

①，②より，$\overrightarrow{\mathbf{OP}}=\boldsymbol{\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ **(複号同順)**

18 (1) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=3$ より，$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=3$

よって，$\vec{a}\cdot\vec{b}=5$

$\vec{a}$，$\vec{b}$のなす角をθとすると

$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{5}{3\cdot2}=\boldsymbol{\frac{5}{6}}$

(2) $|2\vec{a}+t\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+4t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$

$=4(t^2+5t+9)$

よって，$|2\vec{a}+t\vec{b}|=\boldsymbol{2\sqrt{t^2+5t+9}}$

19 $\{\vec{a}+(t+2)\vec{b}\}\cdot(-\vec{a}+t\vec{b})=0$ より

$-|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+t(t+2)|\vec{b}|^2=0$

また，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ より，$t^2+2t-3=0$

$(t+3)(t-1)=0$　よって，$\boldsymbol{t=-3,\ 1}$

20 $\vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}$ から，$|-\vec{a}-\vec{b}|^2=25$

$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=25$，$|\vec{a}|^2=36$，$|\vec{b}|^2=49$

より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-30$

よって，$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-30}{6\cdot7}=\boldsymbol{-\frac{5}{7}}$

21 (1) $\vec{a}+\vec{b}=(\cos\alpha+\cos\beta,\ \sin\alpha+\sin\beta)$

$\vec{a}-\vec{b}=(\cos\alpha-\cos\beta,\ \sin\alpha-\sin\beta)$

であるから

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$=(\cos\alpha+\cos\beta)(\cos\alpha-\cos\beta)$

$\quad+(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta)$

$=\cos^2\alpha-\cos^2\beta+\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

$=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)-(\cos^2\beta+\sin^2\beta)$

$=1-1=0$

よって，$\vec{a}+\vec{b}\perp\vec{a}-\vec{b}$

(2)　$|t\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}-t\vec{b}|^2$ から

$(t\vec{a}+\vec{b})\cdot(t\vec{a}+\vec{b})=(\vec{a}-t\vec{b})\cdot(\vec{a}-t\vec{b})$

$|\vec{a}|^2t^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$

$(|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2)t^2+4t\vec{a}\cdot\vec{b}-(|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2)=0$

これがすべての t について成り立つのは

$|\vec{a}|^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

$|\vec{b}|^2=\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$ より

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ のときで

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\quad=\cos(\beta-\alpha)=0$

$0^\circ<\alpha<\beta<180^\circ$ より，$\boldsymbol{\beta-\alpha=90^\circ}$

第4講座　位置ベクトル

【p. 9】

1　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$

2　(1)　$\vec{p}=\dfrac{1\cdot\vec{a}+2\cdot\vec{b}}{2+1}=\boldsymbol{\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}}$

(2)　$\vec{p}=\dfrac{(-2)\vec{a}+3\vec{b}}{3+(-2)}=\boldsymbol{-2\vec{a}+3\vec{b}}$

3　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3+2}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$=\dfrac{2}{5}(1,\ 2)+\dfrac{3}{5}(6,\ -3)=\boldsymbol{(4,\ -1)}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(-2)\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{(-2)+3}=3(1,\ 2)-2(6,\ -3)$

$=\boldsymbol{(-9,\ 12)}$

4　点 P の座標を $(a,\ b)$ とおく。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(a+1,\ b-2)$ より，

$3(2,\ 2)+(a+1,\ b-2)=(0,\ 0)$

$(a+7,\ b+4)=(0,\ 0)$

よって，$a=-7$，$b=-4$ から，$\mathbf{P(-7,\ -4)}$

5　AB の中点を M とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

O，G，M は一直線上にあるから，

OG：GM＝2：1 より

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)=\boldsymbol{\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{3}}$

6　(1)　この等式が成り立つとき

$x+2=0$ かつ $2-y=0$

よって，$\boldsymbol{x=-2,\ y=2}$

(2)　等式が成り立つとき

$1-x=3y,\ 2x=y-5$

$\boldsymbol{x=-2,\ y=1}$

【p. 10】

7　BF：FD＝s：$(1-s)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=s\overrightarrow{\mathrm{AD}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\quad=s\vec{b}+(1-s)\vec{a}$……①

CF：FE＝t：$(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=t\overrightarrow{\mathrm{AE}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\quad=\dfrac{2}{3}t\vec{b}+(1-t)(\vec{a}+\vec{b})$

$\quad=\left(1-\dfrac{1}{3}t\right)\vec{b}+(1-t)\vec{a}$……②

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は平行でないから，①，②より

$s=1-\dfrac{1}{3}t,\ \ 1-s=1-t$

これを解いて，$s=t=\dfrac{3}{4}$

$s=\dfrac{3}{4}$ を①に代入して，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{b}}$

8　O，P，R は一直線上にあるから，

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$……①　とおける。

AP：BP＝1：2 より

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+1\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{1+2}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

①に代入して，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=k\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

$\quad=\dfrac{2}{3}k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{3}k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$……②

また，B，R，Q も一直線上にあるから

BR：RQ＝t：$(1-t)$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{2}{5}t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は平行でないから

$\dfrac{2}{3}k=\dfrac{2}{5}t,\ \ \dfrac{1}{3}k=1-t$

よって，$k=\dfrac{1}{2}$，$t=\dfrac{5}{6}$

$k=\dfrac{1}{2}$ を②に代入して，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$

9　(1)　$\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$，$\mathrm{P}(\vec{p})$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}+3\overrightarrow{\mathrm{PC}}=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ から

$\vec{a}-\vec{p}+2(\vec{b}-\vec{p})+3(\vec{c}-\vec{p})=2(\vec{b}-\vec{a})$

よって，$\vec{p}=\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$ より，**P は辺 AC の中点**

(2)　(1)と同様に

$\vec{a}-\vec{p}+\vec{b}-\vec{p}+3(\vec{c}-\vec{p})=\vec{b}-\vec{a}$

よって，$\vec{p}=\dfrac{2\vec{a}+3\vec{c}}{5}$ より

P は辺 AC を 3：2 に内分する点

10　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\quad=a\overrightarrow{\mathrm{AB}}+b\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は平行でないから，$\boldsymbol{a=\dfrac{3}{5},\ b=\dfrac{2}{5}}$

(2)　OP は∠AOB の二等分線より

AP：PB＝OA：OB＝4：5