1　ベクトルと演算

1　ベクトルと演算	氏名		得点	/100

1 正六角形ABCDEFにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{FB}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

（各12点×2）

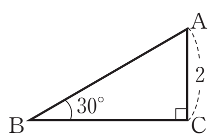
2 次の問いに答えよ。（各12点×2）

(1) $\vec{a}=(3,\ -2)$，$\vec{b}=(2,\ -1)$ のとき，$\vec{a}-3\vec{b}$ の大きさを求めよ。

(2) $\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ -1)$ のとき，$\vec{c}=(4,\ 5)$ を $m\vec{a}+n\vec{b}$ (m，n は実数) の形で表せ。

3 次の問いに答えよ。（各12点×2）

(1) 右の図の直角三角形ABCにおいて，内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ。



(2) $\vec{a}=(1,\ 7)$，$\vec{b}=(4,\ 3)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

4 △OABにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-\vec{b}|=1$ のとき，次の問いに答えよ。

（各14点×2）

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2) △OABの面積を求めよ。

# 2　ベクトルの応用	氏名		得点	/100

1 定点Oに関する点A，Bの位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ とする。次の点P，Qの位置ベクトル $\vec{p}$，$\vec{q}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。（各14点×2）

(1) 線分ABを3：1に内分する点P

(2) 線分ABを5：2に外分する点Q

2 △ABCの内部の点Pが $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を満たしている。直線APと辺BCの交点をDとするとき，BD：DC，AP：PDを求めよ。（各14点×2）

3 次の問いに答えよ。（各14点×2）

(1) 点(3，2)を通り，方向ベクトルが $\vec{d}=(-2,\ 1)$ である直線の方程式を，媒介変数 t を用いて表せ。

(2) 異なる2点O，Aに対し，点Pが等式 $(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA})=0$ を満たすとき，点Pはどのような図形をえがくか。

4 △OABにおいて，辺OAを2：1に内分する点をM，OBの中点をNとし，ANとBMの交点をPとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。（16点）

3　空間ベクトル

氏名		得点	/100

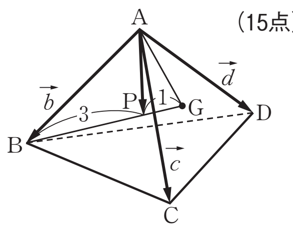
1 空間に２点A(1，2，-4)，B(3，0，2)がある。次の点の座標を求めよ。　(各14点×2)

(1)　点Aの xy 平面に関する対称点A_1

(2)　２点A，Bから等距離にある y 軸上の点P

2 $\vec{a}=(s,\ t,\ -3)$，$\vec{b}=(t,\ 4,\ 2)$ とする。$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行になるような s，t の値を求めよ。　(15点)

3 四面体ABCDにおいて，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とし，△ACDの重心をG，線分BGを３：１に内分する点をPとする。$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表し，$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{DP}=\vec{0}$ であることを証明せよ。　(15点)



4 次の問いに答えよ。　(各14点×3)

(1)　１辺の長さが２の正四面体ABCDにおいて，内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ を求めよ。

(2)　$\vec{a}=(1,\ -2,\ 5)$，$\vec{b}=(4,\ 1,\ 1)$ のとき，次の問いに答えよ。

①　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

②　$\vec{a}$ と $\vec{a}+t\vec{b}$ が垂直になるような t の値を求めよ。

4　空間ベクトルの応用

氏名		得点	/100

1 次の問いに答えよ。（各16点×3）

(1) 2点A(3, −2, −1)，B(1, −3, 6)を通る直線の方程式を，媒介変数 t を用いて表せ。

(2) 2点A(3, 0, −2)，B(−1, 4, 2)を直径の両端とする球面の方程式を求めよ。

(3) 球面 $x^2+y^2+2y+z^2-4z+2=0$ が yz 平面と交わってできる円の中心と半径を求めよ。

2 次の問いに答えよ。（各16点×2）

(1) 4点A(2, 1, −2)，B(4, 5, −3)，C(3, −1, 0)，D(x, −1, 3)が同一平面上にあるように，x の値を求めよ。

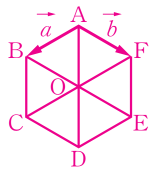
(2) 四面体OABCにおいて，△OABの重心をG，CGの中点をMとし，直線OMと平面ABCとの交点をPとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

3 原点Oから3点A(2, 0, −1)，B(1, 2, −1)，C(2, −1, 0)を通る平面に垂線OHを下ろすとき，点Hの座標を求めよ。（20点）

1　ベクトルと演算

氏名		得点	/100

1　正六角形ABCDEFにおいて，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{FB}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



（各12点×2）

対角線の交点をOとすると，

$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}=2(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}+2\vec{b}$

$\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}=\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{AD}=2\vec{a}+2\vec{b}$　　$\overrightarrow{FB}=\vec{a}-\vec{b}$

2　次の問いに答えよ。　（各12点×2）

(1)　$\vec{a}=(3,\ -2)$，$\vec{b}=(2,\ -1)$ のとき，$\vec{a}-3\vec{b}$ の大きさを求めよ。

$\vec{a}-3\vec{b}=(3,\ -2)-3(2,\ -1)=(3-6,\ -2+3)=(-3,\ 1)$

よって，$|\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$

$\sqrt{10}$

(2)　$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ -1)$ のとき，$\vec{c}=(4,\ 5)$ を $m\vec{a}+n\vec{b}$（m，n は実数）の形で表せ。

$(4,\ 5)=m(2,\ 1)+n(1,\ -1)=(2m+n,\ m-n)$ より，

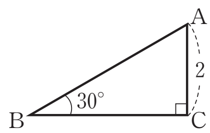
$4=2m+n$，$5=m-n$　これを解いて，$m=3$，$n=-2$

よって，$\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}$

$\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}$

3　次の問いに答えよ。　（各12点×2）

(1)　右の図の直角三角形ABCにおいて，内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。



$|\overrightarrow{AB}|=4$，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角は60°より，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60°=4\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2}=4$

4

(2)　$\vec{a}=(1,\ 7)$，$\vec{b}=(4,\ 3)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{1\cdot 4+7\cdot 3}{\sqrt{1^2+7^2}\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　よって，$\theta=45°$

$\theta=45°$

4　△OABにおいて，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-\vec{b}|=1$ のとき，次の問いに答えよ。　（各14点×2）

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$ より，$(\sqrt{3})^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2^2=1^2$

よって，$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

3

(2)　△OABの面積を求めよ。　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。

(1)より，$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{3}{\sqrt{3}\cdot 2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$\theta=30°$

よって，$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 2\sin 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2　ベクトルの応用

2　ベクトルの応用	氏名		得点	/100

1 定点Oに関する点A，Bの位置ベクトルを$\vec{a}$，$\vec{b}$とする。次の点P，Qの位置ベクトル$\vec{p}$，$\vec{q}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$で表せ。（各14点×2）

(1)　線分ABを3：1に内分する点P

$$\vec{p}=\frac{\vec{a}+3\vec{b}}{3+1}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$$

$\vec{p}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$

(2)　線分ABを5：2に外分する点Q

$$\vec{q}=\frac{-2\vec{a}+5\vec{b}}{5-2}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{5}{3}\vec{b}$$

$\vec{q}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{5}{3}\vec{b}$

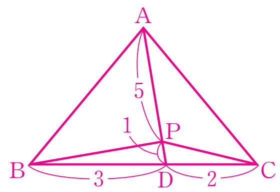
2 △ABCの内部の点Pが$\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$を満たしている。直線APと辺BCの交点をDとするとき，BD：DC，AP：PDを求めよ。（各14点×2）

$-\overrightarrow{AP}+2(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+3(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$ より，

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{6}=\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{5}$ ……①

①より，点DはBCを3：2に内分する点で，

点PはADを5：1に内分する点である。



BD：DC＝3：2　　**AP：PD＝5：1**

3 次の問いに答えよ。（各14点×2）

(1)　点(3，2)を通り，方向ベクトルが$\vec{d}=(-2,\ 1)$である直線の方程式を，媒介変数tを用いて表せ。

直線上の点をP$(x,\ y)$とすると，

$(x,\ y)=(3,\ 2)+t(-2,\ 1)=(3-2t,\ 2+t)$ より，

$x=3-2t,\ y=2+t$

$$\begin{cases} x=3-2t \\ y=2+t \end{cases}$$

(2)　異なる2点O，Aに対し，点Pが等式$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA})=0$を満たすとき，点Pはどのような図形をえがくか。

$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA})=|\overrightarrow{OP}|^2-|\overrightarrow{OA}|^2=0$ より，$|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OA}|$

点Pと点Oの距離が一定で$|\overrightarrow{OA}|$に等しいから，点Pは

点Oを中心とする半径OAの円をえがく。

点Oを中心とする半径OAの円

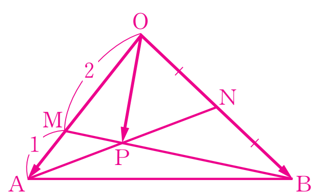
4 △OABにおいて，辺OAを2：1に内分する点をM，OBの中点をNとし，ANとBMの交点をPとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とするとき，$\overrightarrow{OP}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$で表せ。（16点）

AP：PN＝s：$(1-s)$，BP：PM＝t：$(1-t)$ とおくと，

$\overrightarrow{OP}=(1-s)\vec{a}+\frac{1}{2}s\vec{b}$，$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\nparallel\vec{b}$ だから，$1-s=\frac{2}{3}t$，$\frac{1}{2}s=1-t$

これを解いて，$s=\frac{1}{2}$，$t=\frac{3}{4}$ より，$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$



$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$

3　空間ベクトル

氏名		得点	/100

1 空間に2点A(1, 2, −4), B(3, 0, 2)がある。次の点の座標を求めよ。　(各14点×2)

(1) 点Aの xy 平面に関する対称点 A_1

$A_1(1,\ 2,\ 4)$

(2) 2点A, Bから等距離にある y 軸上の点P

P(0, t, 0)とおくと，PA=PB より，

$\sqrt{1^2+(2-t)^2+(-4)^2}=\sqrt{3^2+(-t)^2+2^2}$

これを解いて，$t=2$

よって，P(0, 2, 0)

P(0, 2, 0)

2 $\vec{a}=(s,\ t,\ -3)$, $\vec{b}=(t,\ 4,\ 2)$ とする。$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行になるような s, t の値を求めよ。　(15点)

$\vec{a}=k\vec{b}$ とおける。$(s,\ t,\ -3)=k(t,\ 4,\ 2)$ より，

$s=kt$, $t=4k$, $-3=2k$

これを解いて，$k=-\dfrac{3}{2}$, $t=-6$, $s=9$

$s=9$, $t=-6$

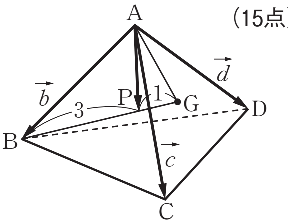
3 四面体ABCDにおいて，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とし，△ACDの重心をG，線分BGを3：1に内分する点をPとする。$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ で表し，$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{DP}=\vec{0}$ であることを証明せよ。　(15点)

［証明］ $\overrightarrow{AP}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AG}}{3+1}=\dfrac{1}{4}\left(\vec{b}+3\cdot\dfrac{\vec{c}+\vec{d}}{3}\right)=\dfrac{1}{4}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$ より，

$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{AP}+(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AD})$

$=4\overrightarrow{AP}-(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$

$=4\cdot\dfrac{1}{4}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})-(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})=\vec{0}$



4 次の問いに答えよ。　(各14点×3)

(1) 1辺の長さが2の正四面体ABCDにおいて，内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ を求めよ。

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{BC}$ のなす角は120°だから，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos 120°=2\cdot 2\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-2$

-2

(2) $\vec{a}=(1,\ -2,\ 5)$, $\vec{b}=(4,\ 1,\ 1)$ のとき，次の問いに答えよ。

① 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 4+(-2)\cdot 1+5\cdot 1=7$

7

② $\vec{a}$ と $\vec{a}+t\vec{b}$ が垂直になるような t の値を求めよ。

$\vec{a}\cdot(\vec{a}+t\vec{b})=|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　$|\vec{a}|^2=1^2+(-2)^2+5^2=30$ より，

$30+7t=0$　$t=-\dfrac{30}{7}$

$t=-\dfrac{30}{7}$

4　空間ベクトルの応用

氏名		得点	/100

1 次の問いに答えよ。　（各16点×3）

(1) 2点A(3, −2, −1), B(1, −3, 6)を通る直線の方程式を，媒介変数 t を用いて表せ。

$(x,\ y,\ z)=(1-t)(3,\ -2,\ -1)+t(1,\ -3,\ 6)$ から，

$x=3-2t,\ y=-2-t,\ z=-1+7t$

$$\begin{cases} x=3-2t \\ y=-2-t \\ z=-1+7t \end{cases}$$

(2) 2点A(3, 0, −2), B(−1, 4, 2)を直径の両端とする球面の方程式を求めよ。

中心Cは ABの中点で，C(1, 2, 0)　半径は $CA=\sqrt{(3-1)^2+2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$

よって，$(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=8$

$(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=8$

(3) 球面 $x^2+y^2+2y+z^2-4z+2=0$ が yz 平面と交わってできる円の中心と半径を求めよ。

球面の方程式に $x=0$ を代入して整理すると，円の方程式は，

$(y+1)^2+(z-2)^2=3,\ x=0$ より，

中心(0, −1, 2)，半径 $\sqrt{3}$

中心(0, −1, 2)，半径 $\sqrt{3}$

2 次の問いに答えよ。　（各16点×2）

(1) 4点A(2, 1, −2), B(4, 5, −3), C(3, −1, 0), D(x, −1, 3)が同一平面上にあるように，x の値を求めよ。　$\overrightarrow{AD}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$ となる実数 $m,\ n$ が存在する。これを成分で表すと，

$(x-2,\ -2,\ 5)=m(2,\ 4,\ -1)+n(1,\ -2,\ 2)=(2m+n,\ 4m-2n,\ -m+2n)$

$x-2=2m+n,\ -2=4m-2n,\ 5=-m+2n$ を解いて，

$m=1,\ n=3,\ x=7$

$x=7$

(2) 四面体OABCにおいて，△OABの重心をG，CGの中点をMとし，直線OMと平面ABCとの交点をPとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=\vec{c}$ として，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ を用いて表せ。

$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OM}=k\cdot\dfrac{\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OC}}{2}=\dfrac{k}{2}\left(\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{3}+\vec{c}\right)=\dfrac{k}{6}\vec{a}+\dfrac{k}{6}\vec{b}+\dfrac{k}{2}\vec{c}$ とおける。

Pは平面ABC上の点だから，$\dfrac{k}{6}+\dfrac{k}{6}+\dfrac{k}{2}=1$ より，$k=\dfrac{6}{5}$

よって，$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}$

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}$

3 原点Oから3点A(2, 0, −1), B(1, 2, −1), C(2, −1, 0)を通る平面に垂線OHを下ろすとき，点Hの座標を求めよ。　$\overrightarrow{AB}=(-1,\ 2,\ 0),\ \overrightarrow{AC}=(0,\ -1,\ 1)$　（20点）

$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}=(2s+t+2u,\ 2t-u,\ -s-t)$　$s+t+u=1$ ……① とおける。

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OH}=0$ より，$-2s+3t-4u=0$ ……②

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{OH}=0$ より，$-s-3t+u=0$ ……③　①，②，③を解いて，$s=-\dfrac{3}{2},\ t=1,\ u=\dfrac{3}{2}$

よって，$\overrightarrow{OH}=\left(1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

$H\left(1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$