● 本書の特色と構成 ●

1 本書は，数学Ⅱの全内容について，微分・積分の考えに重点を置き，基本事項の徹底理解から標準的な応用問題が解けるまでの実力養成を目的として編集されています。

2 全体は８講座から成り，各講座とも１～1.5時間が標準授業時間です。

3 各講座の構成は以下の通りです。

①基本の整理　…基本事項を，１つ１つの問題を解くことで確認します。

②演　　　習　…例題として取り上げた最も重要でかつ応用範囲の広い問題や，その類題を解くことによって解法を修得します。さらに，例題の関連問題や，やや発展的な問題についても練習して，さまざまなタイプの問題に対応できる応用力を養成します。

も　く　じ

第 1 講座　式と証明，方程式

基本の整理

〈恒等式〉 ▶すべての x の値に対して $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c' \Longleftrightarrow a=a',\ b=b',\ c=c'$

1　次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

(1)　$(a+2)x+b+1=bx+3$　　(2)　$x^3=(x-2)^3+a(x-2)^2+b(x-2)+c$

〈等式の証明〉 ▶条件つきの等式の証明では，条件式を使って文字を減らし，$A=B$ を示す。

2　次の等式を証明せよ。

(1)　$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$

(2)　$a+b+c=0$ のとき，$a^3+b^3+c^3=3abc$

〈不等式の証明〉 ▶ $A \geqq B$ の証明は，$A-B$ を因数分解したり，平方の和の形にして，$A-B \geqq 0$ を示す。

3　次の不等式を証明せよ。

(1)　$x^2+9y^2 \geqq 6xy$　　(2)　$a^2+2b^2+1 \geqq 2b(a+1)$

〈複素数の計算〉 ▶ i を含む計算では，i を文字として扱い，$i^2=-1$ とする。

4　次の計算をせよ。

(1)　$\dfrac{2}{3i}$　　(2)　$i^5-(-i)^{19}$　　(3)　$\dfrac{4+5i}{4-5i}$

〈解の判別〉 ▶判別式 $D=b^2-4ac$，$D>0$，$D=0$，$D<0$ により判別する。

5　次の 2 次方程式の解を判別せよ。

(1)　$3x^2-x-2=0$　　(2)　$2x^2-4x+3=0$

〈解と係数の関係〉 ▶ 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 解を α，β とすると，$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

6　2 次方程式 $3x^2-4x+6=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2+\beta^2$　　(2)　$(\alpha-\beta)^2$　　(3)　$(\alpha-1)(\beta-1)$

〈剰余の定理〉 ▶整式 $f(x)$ を 1 次式 $x-\alpha$ で割ったときの余りは，$f(\alpha)$

7　整式 $f(x)=x^3-2x+5$ を $x+2$ で割ったときの余りを求めよ。

〈因数定理〉 ▶整式 $f(x)$ が 1 次式 $x-\alpha$ で割り切れる $\Longleftrightarrow f(\alpha)=0$

8　整式 $f(x)=x^4+kx^3+7x-6$ が $x+2$ で割り切れるように，定数 k の値を定めよ。

SAMPLE

◇演　習◇

例題　条件つき不等式の証明

9　$a \geqq b > 0$ のとき，$a^3+2ab^2 \geqq b^3+2a^2b$ であることを証明せよ。

解法のポイント　(左辺)－(右辺) を因数分解し，それぞれの因数の符号を調べる。

10 **類題**　$a \geqq b$，$x \geqq y$ のとき，$(a+b)(x+y) \leqq 2(ax+by)$ を証明せよ。

11　次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c，d の値を定めよ。

$$x^3-5x^2+9x-3=ax(x-1)(x-2)+bx(x-1)+cx+d$$

12　次の等式が k のどんな値に対しても成り立つように，x，y の値を定めよ。

$$(k+8)x+(2k-5)y-k-8=0$$

13　次の等式を証明せよ。

(1)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，$\dfrac{a-c}{b-d}=\dfrac{ad+bc}{2bd}$

(2)　x，y は実数で，$x^2+y^2+\dfrac{1}{2}=x+y$ ならば，$x=y=\dfrac{1}{2}$

14　$x+y+z=1$，$x^3+y^3+z^3=1$ ならば，x，y，z のうち少なくとも１つは１に等しいことを証明せよ。

15　次の不等式を証明せよ。

(1)　$a>0$，$b>0$ のとき，$a^3-b^3 \geqq 3b^2(a-b)$

(2)　$x>0$，$y>0$ のとき，$\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq \sqrt{2(x+y)}$

(3)　$|a|-|b| \leqq |a+b| \leqq |a|+|b|$

16　次の不等式を証明せよ。(文字はすべて正の数)

(1)　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{1}{a}\right) \geqq 4$　　(2)　$x>1$ のとき，$x+\dfrac{4}{x-1} \geqq 5$

17 **発展**　$xyz=1$ のとき，$\dfrac{1+xy}{1+x+xy}+\dfrac{1+yz}{1+y+yz}+\dfrac{1+zx}{1+z+zx}=2$ が成り立つことを証明せよ。

ヒント　条件式を用いて，左辺を x と y だけで表す。

SAMPLE

例題　**剰余の定理**

18　整式 $f(x)$ を $x+2$ で割ったときの余りが 3，$(x-1)^2$ で割ったときの余りが $6x$ である。$f(x)$ を x^2+x-2 で割ったときの余りを求めよ。

解法のポイント　$f(x)$ を $(x+2)(x-1)$ で割ったときの余りは $ax+b$ とおける。剰余の定理より，$f(-2)=3$，$f(1)=6$ から a，b の値を求める。

19　**類題**　整式 $f(x)$ を $x+2$ で割ったときの余りが 6，$x+3$ で割ったときの余りが 5 である。$f(x)$ を $(x+2)(x+3)$ で割ったときの余りを求めよ。

20　次の等式を満足する実数 x，y の値を求めよ。

(1)　$(1+i)x+y-4i=i$　　(2)　$23-14i=(x+yi)(3-4i)$

21　次の 2 次方程式を解け。

(1)　$x^2+8=0$　　(2)　$3x^2-4x+8=0$　　(3)　$2\sqrt{2}x^2-3x+\sqrt{2}=0$

22　2 次方程式 $2x^2+2x-5=0$ の 2 つの解を α，β とする。このとき，$\alpha+1$，$\beta+1$ を解とする 2 次方程式をつくると，$x^2+px+q=0$ になったという。定数 p，q の値を求めよ。

23　次の方程式を解け。

(1)　$x^3+3x^2+4x+4=0$　　(2)　$2x^3-x^2+8x-4=0$

24　次の問いに答えよ。

(1)　整式 $f(x)=x^3+px+q$ を $x-1$ で割ったときの余りは 9，$x+3$ で割ったときの余りは 1 であるという。このとき，p，q の値を求めよ。

(2)　整式 $f(x)=x^4+4x^2+px+q$ が x^2-2x-3 で割り切れるとき，p，q の値を求めよ。

25　方程式 $x^3+ax^2+bx+26=0$ の解の 1 つが $3+2i$ であるとき，実数 a，b の値を求めよ。また，残りの解を求めよ。

26　方程式 $x^3=1$ の虚数解の 1 つを ω とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\omega^{10}+\omega^5+1$　　(2)　$(1-\omega)(1-\omega^2)$

27　**発展**　2 次方程式 $x^2-3ax+2a-3=0$ が 2 つの整数解をもつように，実数 a の値を定めよ。

ヒント　2 つの整数解を α，β とおいて，解と係数の関係を用いる。解と係数の関係から得られた 2 式から，まず a を消去して α，β の満たす式を導く。

SAMPLE

第2講座　図形と方程式

基本の整理

〈分点の座標〉　▶$\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ のとき，線分 AB を $m:n$ に分ける点は $\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}, \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$

1　2 点 $\mathrm{A}(-2, 5)$，$\mathrm{B}(8, 3)$ を結ぶ線分 AB を $3:2$ に内分する点，外分する点の座標をそれぞれ求めよ。

〈2 直線の平行・垂直〉　▶$y=m_1x+n_1$，$y=m_2x+n_2$ で，平行条件は $m_1=m_2$，垂直条件は $m_1m_2=-1$

2　点 $(1, 3)$ を通り，直線 $y=2x+5$ に平行な直線，および，垂直な直線の方程式を求めよ。

〈点と直線との距離〉　▶点 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ との距離は，$\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

3　次の点と直線との距離を求めよ。

(1)　原点と直線 $y=3x+7$　　(2)　点 $(-2, 3)$ と直線 $3x-4y+5=0$

〈円の方程式〉　▶点 (a, b) を中心とし，半径 r の円の方程式は $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

4　次の円の方程式を求めよ。

(1)　点 $(1, 3)$ を中心とし，半径 5 の円　　(2)　点 $(-4, 5)$ を中心とし，原点を通る円

〈円と直線〉　▶円と直線の方程式から 1 文字を消去した 2 次方程式の判別式 D の符号により調べる。

5　次の円と直線との位置関係を調べよ。共有点がある場合には，その座標を求めよ。

(1)　$x^2+y^2=5$，$x+y=1$　　(2)　$x^2+y^2-6x=0$，$2x-y+1=0$

〈円の接線〉　▶円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は $x_1x+y_1y=r^2$

6　次の円周上の与えられた点における接線の方程式を求めよ。

(1)　$x^2+y^2=4$　$(-1, \sqrt{3})$　　(2)　$(x+1)^2+(y-4)^2=25$　$(-4, 8)$

〈軌跡〉　▶2 点 A，B からの距離の比が $m:n(m\neq n)$ である点の軌跡はアポロニウスの円となる。

7　2 点 $\mathrm{A}(0, 0)$，$\mathrm{B}(4, 3)$ からの距離の比が $1:3$ であるような点の軌跡を求めよ。

〈不等式の表す領域〉　▶$y>f(x)$ は $y=f(x)$ の上側を表し，$x^2+y^2>r^2$ は円 $x^2+y^2=r^2$ の外部を表す。

8　次の不等式，連立不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$2x-y-3\geqq 0$　　(2)　$\begin{cases} x^2+y^2>1 \\ y<x \end{cases}$

SAMPLE

演　習

例題　領域と最大・最小

9　x，y が連立不等式 $x^2+y^2-2x-4y \leqq 0$，$y \geqq 2$ を満たすとき，$3x+y$ のとる最大値と最小値を求めよ。

解法のポイント　与えられた領域を図示し，直線 $3x+y=k$ がこの領域と共有点をもつときの k の値の範囲を求める。

10　**類題**　x，y が連立不等式 $y \geqq x^2$，$x+y \leqq 2$ を満たすとき，$y-x$ のとる最大値と最小値を求めよ。

11　2 直線$(k+2)x+(k+3)y=10$，$6x+(2k-1)y=5$ について，この 2 直線が平行になるときの k の値，および，垂直になるときの k の値をそれぞれ求めよ。

12　次の円の方程式を求めよ。

(1)　点 $(3,\ -4)$ を中心とし，直線 $4x-3y=49$ に接する円

(2)　2 点 $(2,\ 10)$，$(6,\ 8)$ を通り，直線 $y=x+2$ 上に中心をもつ円

(3)　2 つの円 $x^2+y^2-4x-5=0$，$x^2+y^2+2y-15=0$ の交点と，原点を通る円

13　次の円の接線の方程式を求めよ。

(1)　円 $x^2+y^2=25$ の周上の点 $(-5,\ 0)$ におけるこの円の接線

(2)　点 $(-5,\ 0)$ から円 $x^2+y^2=9$ にひいた接線

14　次の問いに答えよ。

(1)　2 点 $A(1,\ 2)$，$B(3,\ -2)$ から等距離にある点 P の軌跡を求めよ。

(2)　2 点 $A(2,\ 0)$，$B(-1,\ 0)$ に対して，$PA^2+2PB^2=9$ となる点 P の軌跡を求めよ。

(3)　放物線 $y=-x^2+tx$ について，t がすべての実数値をとりながら変化するとき，この放物線の頂点の軌跡を求めよ。

15　次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$|x|+|y|<1$　　　(2)　$(x-y+1)(x^2+y^2-2) \geqq 0$

16　**発展**　2 つの円 $x^2+y^2=4$，$x^2+y^2-2x-2y=0$ にひいた接線の長さが等しい点 P の軌跡を求めよ。

ヒント　接点，点 P，円の中心でできる直角三角形を考える。点 P の x 座標の値の範囲に注意する。

SAMPLE

解答　《selectⅢ 数学Ⅱ》

第1講座　式と証明，方程式

【p.2】

1 (1)　$a+2=b$，$b+1=3$ より，$\boldsymbol{a=0}$，$\boldsymbol{b=2}$

(2)　$x=2$ を代入して，$8=c$，$x=3$ を代入して，
$a+b=18$，$x=1$ を代入して，$a-b=-6$
これを解いて，$\boldsymbol{a=6}$，$\boldsymbol{b=12}$，また，$\boldsymbol{c=8}$

2 (1)　左辺$=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$
右辺$=a^2c^2-2abcd+b^2d^2+a^2d^2+2abcd+b^2c^2$
$\quad=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$
よって，左辺＝右辺

(2)　左辺$=a^3+b^3+(-a-b)^3$（$c=-a-b$ より）
$=a^3+b^3+(-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3)$
$=-3ab(a+b)=-3ab(-c)=3abc=$右辺

3 (1)　$x^2+9y^2-6xy=(x-3y)^2\geqq 0$ より，
$x^2+9y^2\geqq 6xy$　（等号は$x=3y$ のとき成立）

(2)　$a^2+2b^2+1-2b(a+1)$
$=(a-b)^2+(b-1)^2\geqq 0$より，
$a^2+2b^2+1\geqq 2b(a+1)$
（等号は，$a=b=1$ のとき成立）

4 (1)　$\dfrac{2}{3i}=\dfrac{2\cdot i}{3i\cdot i}=\boldsymbol{-\dfrac{2i}{3}}$

(2)　m を整数として，$i^{4m}=1$，$i^{4m+1}=i$，
$i^{4m+2}=-1$，$i^{4m+3}=-i$より，
$i^5-(-i)^{19}=i-i=0$

(3)　$\dfrac{4+5i}{4-5i}=\dfrac{(4+5i)^2}{(4-5i)(4+5i)}=\boldsymbol{-\dfrac{9}{41}+\dfrac{40}{41}i}$

5 (1)　異なる２つの実数解

(2)　異なる２つの虚数解

6 (1)　$-\dfrac{20}{9}$　　(2)　$-\dfrac{56}{9}$　　(3)　$\dfrac{5}{3}$

7　$f(-2)=(-2)^3-2\cdot(-2)+5=1$ より，余りは**1**

8　$f(-2)=-8k-4=0$ より，$\boldsymbol{k=-\dfrac{1}{2}}$

【p.3】

9　左辺－右辺$=a^3-b^3-2ab(a-b)$
$=(a-b)(a^2-ab+b^2)$
$=(a-b)\left\{\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2\right\}\geqq 0$
（等号は $a=b$ のとき成立）

10　右辺－左辺$=2(ax+by)-(a+b)(x+y)$
$=ax+by-ay-bx=(a-b)(x-y)\geqq 0$
（等号は $a=b$ または $x=y$ のとき成立）

11　$x=0$ のとき，$\boldsymbol{d=-3}$，$x=1$ のとき，
$c+d=2$　よって，$\boldsymbol{c=5}$，$x=2$ のとき，
$2b+2c+d=3$ より，$\boldsymbol{b=-2}$
$x=-1$ のとき，$-6a+2b-c+d=-18$ より，
$\boldsymbol{a=1}$

12　$(x+2y-1)k+8x-5y-8=0$
k についての恒等式だから，$x+2y-1=0$
$8x-5y-8=0$　これを解いて，$\boldsymbol{x=1}$，$\boldsymbol{y=0}$

13 (1)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと，$a=bk$，$c=dk$

左辺$=\dfrac{bk-dk}{b-d}=k$

右辺$=\dfrac{(bk)d+b(dk)}{2bd}=k$

よって，左辺＝右辺

(2)　$x^2+y^2+\dfrac{1}{2}-(x+y)$

$=\left(x^2-x+\dfrac{1}{4}\right)+\left(y^2-y+\dfrac{1}{4}\right)$

$=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=0$ より，$x=y=\dfrac{1}{2}$

14　$x^3+y^3+z^3-3xyz$
$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ より
$1-3xyz=1\cdot\{(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\}$
$\qquad=1-3(xy+yz+zx)$
よって，$xyz=xy+yz+zx$　これより，
$(x-1)(y-1)(z-1)$
$=xyz-(xy+yz+zx)+(x+y+z)-1=0$
ゆえに，$(x-1)(y-1)(z-1)=0$
したがって，x，y，z のうち少なくとも１つは１。

15 (1)　$a^3-b^3-3b^2(a-b)=(a-b)^2(a+2b)\geqq 0$
よって，$a^3-b^3\geqq 3b^2(a-b)$
（等号は $a=b$ のとき成立）

(2)　左辺>0，右辺>0 より，
$\{\sqrt{2(x+y)}\}^2-(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$
$=x+y-2\sqrt{x}\sqrt{y}=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geqq 0$
$\{\sqrt{2(x+y)}\}^2\geqq(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$
よって，$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqq\sqrt{2(x+y)}$
（等号は $x=y$ のとき成立）

(3)　$|a+b|^2-(|a|+|b|)^2$
$=a^2+2ab+b^2-(a^2+2|a||b|+b^2)$
$=2(ab-|ab|)$
$ab\geqq 0$ のとき，$ab-|ab|=0$
$ab<0$ のとき，$ab-|ab|=2ab<0$
よって，$|a+b|^2\leqq(|a|+|b|)^2$
ゆえに，$|a+b|\leqq|a|+|b|$……①
次に，①において，a を $a+b$，b を $-b$ とおきかえると，$|a+b-b|\leqq|a+b|+|-b|$
よって，$|a|\leqq|a+b|+|b|$
ゆえに，$|a|-|b|\leqq|a+b|$……②
（等号は，$(a+b)(-b)\geqq 0$ より，$0\leqq b\leqq -a$ または，$-a\leqq b\leqq 0$ のとき）
①，②より，$|a|-|b|\leqq|a+b|\leqq|a|+|b|$

SAMPLE

16 (1) $a+\dfrac{1}{b}\geqq 2\sqrt{a\cdot\dfrac{1}{b}}$，$b+\dfrac{1}{a}\geqq 2\sqrt{b\cdot\dfrac{1}{a}}$

辺々かけて，

$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{1}{a}\right)\geqq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}}\cdot 2\sqrt{\dfrac{b}{a}}=4$

(等号は，$ab=1$ のとき成立)

(2) $x-1>0$より，

$x-1+\dfrac{4}{x-1}\geqq 2\sqrt{(x-1)\cdot\dfrac{4}{x-1}}=4$

よって，$x+\dfrac{4}{x-1}\geqq 5$ (等号は$x=3$のとき成立)

17 $xyz=1$ より

$$\text{左辺}=\frac{1+xy}{1+x+xy}+\frac{1+\frac{1}{x}}{1+y+\frac{1}{x}}+\frac{1+\frac{1}{y}}{1+\frac{1}{xy}+\frac{1}{y}}$$

$$=\frac{1+xy}{1+x+xy}+\frac{x+1}{x+xy+1}+\frac{xy+x}{xy+1+x}$$

$$=\frac{2(1+x+xy)}{1+x+xy}=2=\text{右辺}$$

【p.4】

18 $f(x)=Q(x)\cdot(x+2)(x-1)+ax+b$ とおく。
剰余の定理から，$f(-2)=3$，$f(1)=6$ より
$-2a+b=3$，$a+b=6$ を解いて，
$a=1$，$b=5$　よって，求める余りは，$\boldsymbol{x+5}$

19 $x+8$

20 (1) $x=5$，$y=-5$　　(2) $x=5$，$y=2$

21 (1) $x=\pm 2\sqrt{2}\,i$　　(2) $x=\dfrac{2\pm 2\sqrt{5}\,i}{3}$

(3) 両辺に $\sqrt{2}$ をかけて，$4x^2-3\sqrt{2}\,x+2=0$

よって，$\boldsymbol{x=\dfrac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{14}i}{8}}$

22 $\alpha+\beta=-1$，$\alpha\beta=-\dfrac{5}{2}$ から

$(\alpha+1)+(\beta+1)=1$，$(\alpha+1)(\beta+1)=-\dfrac{5}{2}$

よって，$\boldsymbol{p=-1}$，$\boldsymbol{q=-\dfrac{5}{2}}$

23 (1) $x=-2$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{7}\,i}{2}$

(2) $x^2(2x-1)+4(2x-1)=0$ より

$(2x-1)(x^2+4)=0$　よって，$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{2}}$，$\boldsymbol{\pm 2i}$

24 (1) $p=-5$，$q=13$　　(2) $p=-28$，$q=-33$

25 $(3+2i)^3+a(3+2i)^2+b(3+2i)+26=0$
$(17+5a+3b)+(46+12a+2b)i=0$ より
a，b は実数であるから，$17+5a+3b=0$
$46+12a+2b=0$　よって，$\boldsymbol{a=-4}$，$\boldsymbol{b=1}$
残りの解は，$\boldsymbol{3-2i}$，$\boldsymbol{-2}$
$\boxed{\text{別解}}$ $3+2i$ が解のとき，$3-2i$ も解で方程式の左辺は，$x^2-6x+13=0$ を因数にもつ。
$x^3+ax^2+bx+26=(x+p)(x^2-6x+13)$
$=x^3+(p-6)x^2+(-6p+13)x+13p$
係数を比較して，$p=2$，$\boldsymbol{a=-4}$，$\boldsymbol{b=1}$
他の解は，$\boldsymbol{x=3-2i}$，$\boldsymbol{-2}$

26 (1) $\omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$ より
$\omega^{10}+\omega^5+1=(\omega^3)^3\cdot\omega+\omega^3\cdot\omega^2+1=\boldsymbol{0}$

(2) $(1-\omega)(1-\omega^2)=1-(\omega+\omega^2)+\omega^3$
$=1-(-1)+1=\boldsymbol{3}$

27 2つの整数解を，α，β とおくと，解と係数の関係より，$\alpha+\beta=3a$……①　$\alpha\beta=2a-3$……②
①，②から a を消去して整理すると，
$2\alpha+2\beta-3\alpha\beta=9$
左辺を因数分解するために両辺を3倍して
$6\alpha+6\beta-9\alpha\beta=27$
これより，$(2-3\alpha)(3\beta-2)=23$……③
③を満たす整数$(\alpha,\ \beta)$の組は，$(\alpha,\ \beta)=(1,\ -7)$
よって，このとき$\alpha+\beta=-6=3a$ より，$\boldsymbol{a=-2}$

第2講座 図形と方程式

【p.5】

1 内分点$\left(4,\ \dfrac{19}{5}\right)$，外分点$(28,\ -1)$

2 平行な直線 $y=2x+1$

垂直な直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}$

3 (1) $\dfrac{7\sqrt{10}}{10}$　　(2) $\dfrac{13}{5}$

4 (1) $(x-1)^2+(y-3)^2=25$
(2) $(x+4)^2+(y-5)^2=41$

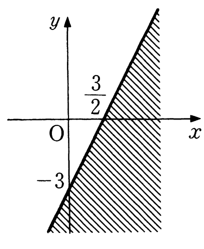
5 (1) 2点で交わる。$(-1,\ 2)$，$(2,\ -1)$
(2) 共有点をもたない。

6 (1) $x-\sqrt{3}\,y+4=0$
(2) 円$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点$(x_1,\ y_1)$における接線は
$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$
だから，$(-4+1)(x+1)+(8-4)(y-4)=25$
したがって，$\boldsymbol{3x-4y+44=0}$

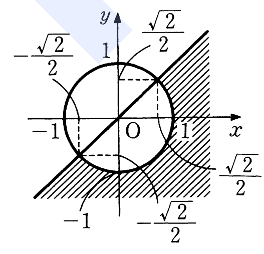
7 円 $x^2+y^2+x+\dfrac{3}{4}y-\dfrac{25}{8}=0$

8 (1) $y\leqq 2x-3$ より，求める領域は，図1の斜線部分(境界線を含む)。
(2) 求める領域は，図2の斜線部分(境界線を含まない)。

〔図1〕



〔図2〕



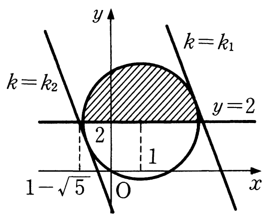
SAMPLE

【p.6】

9　$x^2+y^2-2x-4y\leqq 0$ から，

$(x-1)^2+(y-2)^2\leqq 5$ ……①

①と，$y\geqq 2$ を満たす領域を図示すると，右の図のようになる。



　$3x+y=k$ ……②

とすれば，求める $3x+y$ の最大値，最小値は，直線②が右図の斜線部の領域と共有点をもつときの k の最大値，最小値である。

k の最大値 k_1 は，直線②が円に第 1 象限で接する場合より，

$x^2+(k_1-3x)^2-2x-4(k_1-3x)=0$

$10x^2+2(5-3k_1)x+k_1{}^2-4k_1=0$

$D'=(5-3k_1)^2-10(k_1{}^2-4k_1)=0$

$k_1{}^2-10k_1-25=0$

$k_1>0$ より，$k_1=5+5\sqrt{2}$

k の最小値 k_2 は，図より $(1-\sqrt{5},\ 2)$ を通る場合だから，$k_2=3\times(1-\sqrt{5})+2=5-3\sqrt{5}$

よって，**最大値 $5+5\sqrt{2}$，最小値 $5-3\sqrt{5}$**

10　最大値 6，最小値 $-\dfrac{1}{4}$

11　2 直線が平行になるとき

$(k+2)(2k-1)-6(k+3)=0$ から，

$2k^2-3k-20=0$

$(2k+5)(k-4)=0$　よって，$\boldsymbol{k=-\dfrac{5}{2},\ 4}$

2 直線が垂直になるとき

$6(k+2)+(k+3)(2k-1)=0$ から

$2k^2+11k+9=0$

$(2k+9)(k+1)=0$　よって，$\boldsymbol{k=-\dfrac{9}{2},\ -1}$

12 (1)　中心から直線までの距離が半径となるから，

半径は，$\dfrac{|4\times3-3\times(-4)-49|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=5$

よって，$\boldsymbol{(x-3)^2+(y+4)^2=5^2}$

(2)　中心の座標を $(a,\ a+2)$ とおく。

$(x-a)^2+(y-a-2)^2=r^2$

$(2,\ 10)$，$(6,\ 8)$を通ることから

$\begin{cases}(2-a)^2+(10-a-2)^2=r^2 \cdots\cdots ①\\ (6-a)^2+(8-a-2)^2=r^2 \cdots\cdots ②\end{cases}$

①，②より，$a=1$，$r^2=50$

よって，求める円の方程式は，

$\boldsymbol{(x-1)^2+(y-3)^2=50}$

(3)　2 つの円の方程式は，それぞれ次のようになる。

$(x-2)^2+y^2=3^2$，$x^2+(y+1)^2=4^2$

それぞれの円の中心は $(2,\ 0)$，$(0,\ -1)$ で，半径は 3，4 である。2 つの円の中心間の距離は，$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ であり，$4-3<\sqrt{5}<4+3$ であるから，2 つの円は 2 点で交わる。

このとき，2 つの円の交点を通る図形は，

$x^2+y^2-4x-5+k(x^2+y^2+2y-15)=0$ ……①

①に $x=0$，$y=0$ を代入して，$k=-\dfrac{1}{3}$

これを①に代入して整理すると，

$\boldsymbol{x^2+y^2-6x-y=0}$

13 (1)　$-5x+0\cdot y=25$ より，$\boldsymbol{x=-5}$

(2)　接点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とすると

$x_1{}^2+y_1{}^2=9$ ……①

点Pにおける接線の方程式は

$x_1x+y_1y=9$ ……②

②が $(-5,\ 0)$ を通るから，$-5x_1=9$

よって，$x_1=-\dfrac{9}{5}$　これを①に代入して

$y_1{}^2=\dfrac{144}{25}$ より，$y_1=\pm\dfrac{12}{5}$

よって，$\mathrm{P}\left(-\dfrac{9}{5},\ \pm\dfrac{12}{5}\right)$（複号同順）

したがって，接線の方程式は，②に代入して整理すると，$\boldsymbol{3x-4y+15=0}$，$\boldsymbol{3x+4y+15=0}$

14 (1)　直線 $x-2y-2=0$

(2)　円 $x^2+y^2=1$

(3)　$y=-\left(x-\dfrac{t}{2}\right)^2+\dfrac{t^2}{4}$ より，頂点は $\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{t^2}{4}\right)$

頂点を $(x,\ y)$ とすれば，$x=\dfrac{t}{2}$，$y=\dfrac{t^2}{4}$

$t=2x$ を y の式に代入して，$y=x^2$

よって，**放物線 $\boldsymbol{y=x^2}$**

15 (1)　$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ のとき，$x+y<1$

$x\geqq 0$，$y<0$ のとき，$x-y<1$

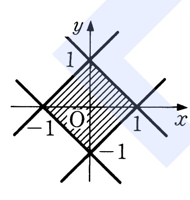
$x<0$，$y\geqq 0$ のとき，$-x+y<1$

$x<0$，$y<0$ のとき，$-x-y<1$

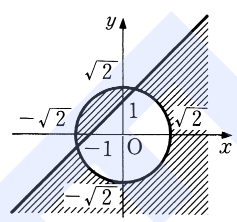
求める領域は図 1 の斜線部(境界線を含まない)。

(2)　図 2 の斜線部(境界線を含む)。

〔図 1〕



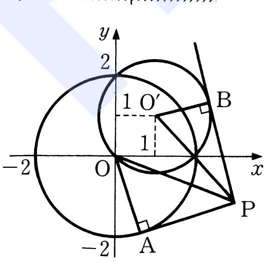
〔図 2〕



16　$x^2+y^2=4$ ……①

$(x-1)^2+(y-1)^2=2$

……②



$\mathrm{P}(x,\ y)$ とする。

②の中心を O′，P から円 O，円 O′ にひいた接線の接点を，それぞれ A，B とする。

△POA，△PO′B は直角三角形で，さらに PA＝PB であるから，三平方の定理より，

$(x^2+y^2)-4=(x-1)^2+(y-1)^2-2$
これを整理して，$x+y=2$
ただし，Pは円の外部の点であり，円O，円O′は点 $(2,\ 0)$，$(0,\ 2)$ で交わるので，$x<0$，$x>2$
すなわち，点Pは，**直線 $x+y=2$ 上を，$x<0$，$x>2$ の範囲で動く。**

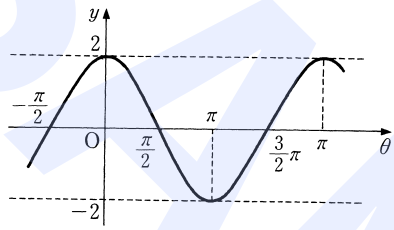
第3講座 三角関数

【p.7】

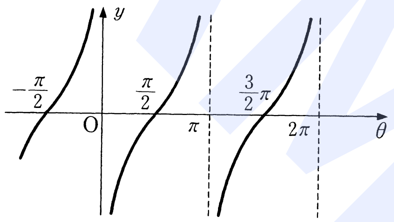
1 (1) $\dfrac{2}{3}\pi$ (2) $-\dfrac{5}{4}\pi$ (3) $150°$
(4) $-105°$

2 (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) $-\dfrac{1}{2}$ (3) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

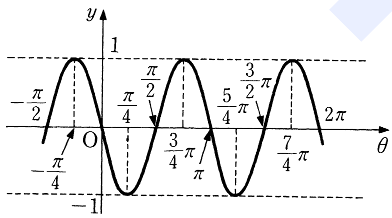
3 (1)



(2)



(3)



4 (1) $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2}{3}\pi$ (2) $\dfrac{5}{6}\pi<\theta<\dfrac{7}{6}\pi$

(3) $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{2}<\theta\leqq\dfrac{4}{3}\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

5 (1) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (2) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (3) $2+\sqrt{3}$

6 (1) $\dfrac{24}{25}$ (2) $\dfrac{7}{25}$ (3) $\dfrac{24}{7}$

7 (1) $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ (2) $2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$

【p.8】

8 $y=(1-\sin^2\theta)-\sin\theta=-\sin^2\theta-\sin\theta+1$
$\sin\theta=t$ とおくと，$-1\leqq t\leqq 1$ で，
$y=-t^2-t+1=-\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}$

$t=-\dfrac{1}{2}$ すなわち **$\theta=\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$ のとき最大値 $\dfrac{5}{4}$，**

$t=1$ すなわち **$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最小値 -1**

9 (1) $\theta=0$ のとき最大値 5，$\theta=\pi$ のとき最小値 -3

(2) 最大値なし，$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi$ のとき最小値 -3

10 (1) $(左辺)=\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}\right)^2=\left(\dfrac{\sin\theta+1}{\cos\theta}\right)^2$

$=\dfrac{(\sin\theta+1)^2}{\cos^2\theta}=\dfrac{(\sin\theta+1)^2}{1-\sin^2\theta}$

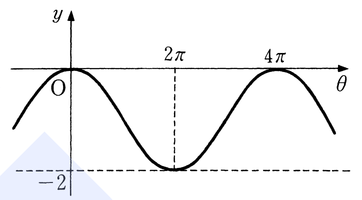
$=\dfrac{(\sin\theta+1)^2}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}=\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=(右辺)$

(2) $(右辺)=\dfrac{\left(1+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2}{\left(1-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2}=\dfrac{(\cos\theta+\sin\theta)^2}{(\cos\theta-\sin\theta)^2}$

$=\dfrac{\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta-2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta}$

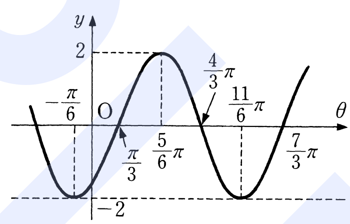
$=\dfrac{1+2\sin\theta\cos\theta}{1-2\sin\theta\cos\theta}=(左辺)$

11 (1)



$\begin{cases}最大値\quad 0(\theta=4\pi\times n\ のとき)\\ 最小値\ -2(\theta=2\pi+4\pi\times n\ のとき)\end{cases}$

(2)



$\begin{cases}最大値\quad 2\left(\theta=\dfrac{5}{6}\pi+2n\pi\ のとき\right)\\ 最小値\ -2\left(\theta=-\dfrac{\pi}{6}+2n\pi\ のとき\right)\end{cases}$

12 (1) $\sin\theta=\cos\theta-\dfrac{1}{2}$ より，

$\left(\cos\theta-\dfrac{1}{2}\right)^2+\cos^2\theta=1$

$8\cos^2\theta-4\cos\theta-3=0$，$\cos\theta=\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{4}$

$\boldsymbol{(\sin\theta,\ \cos\theta)=\left(\dfrac{-1+\sqrt{7}}{4},\ \dfrac{1+\sqrt{7}}{4}\right),}$

$\boldsymbol{\left(\dfrac{-1-\sqrt{7}}{4},\ \dfrac{1-\sqrt{7}}{4}\right)}$

(2) $\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$ より，

SAMPLE