## ● 本書の特色と構成 ●

$\boxed{1}$本書は，数学Ｃの内容のうち，ベクトル，平面上の曲線と複素数平面について，基本事項の徹底理解から標準的な応用問題が解けるまでの実力養成を目的として編集されています。

$\boxed{2}$全体は９講座から成り，各講座とも１～1.5時間が標準授業時間です。

$\boxed{3}$各講座の構成は以下の通りです。

①基本の整理　…基本事項を，１つ１つの問題を解くことで確認します。

②演　　　習　…例題として取り上げた最も重要でかつ応用範囲の広い問題や，その類題を解くことによって解法を修得します。さらに，例題の関連問題や，やや発展的な問題についても練習して，さまざまなタイプの問題に対応できる応用力を養成します。

## もくじ

# 第1講座　ベクトルと演算

## 基本の整理

**〈ベクトルの演算〉** ▶ベクトルを含む式の計算は，整式の場合と同じように行う。

**1**　$2\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}$，$\vec{x}-3\vec{y}=\vec{b}$ を同時に満たす $\vec{x}$，$\vec{y}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

**〈ベクトルの和，差〉** ▶$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

**2**　等式 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ が成り立つことを示せ。

**〈ベクトルの分解〉** ▶$\vec{a}$，$\vec{b}$ が平行でないとき，任意のベクトル $\vec{c}$ は，$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ と表せる。

**3**　$\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ -1)$，$\vec{c}=(8,\ 1)$ のとき，$\vec{c}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

**〈ベクトルの大きさ〉** ▶$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき，$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$

**4**　$\vec{a}-\vec{b}=(-4,\ 1)$，$3\vec{a}+2\vec{b}=(3,\ 8)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の大きさをそれぞれ求めよ。

**〈ベクトルの内積〉** ▶$\vec{a}$，$\vec{b}$のなす角を $\theta$ とするとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ $(0°\leqq\theta\leqq180°)$

**5**　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を $\theta$ とするとき，次の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(1)　$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\theta=120°$　　　(2)　$|\vec{a}|=2\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{6}$，$\theta=30°$

**〈ベクトルのなす角〉** ▶$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}}$　ただし，$0°\leqq\theta\leqq180°$

**6**　$\vec{a}=(1,\ -3)$，$\vec{b}=(-2,\ 1)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 $\theta$ を求めよ。

**〈ベクトルの垂直条件〉** ▶$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ について，$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

**7**　$\vec{a}=(-4,\ 3)$ と垂直な単位ベクトルを求めよ。

**〈内積の性質〉** ▶$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$，$|s\vec{a}+t\vec{b}|$は2乗して，$\vec{a}\cdot\vec{b}$と$|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$で表す。

**8**　$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}+2\vec{b}|=3$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$，$|\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

## 演　習

**例題**　ベクトルの大きさの最小値

**9**　$\vec{a}=(-1,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ 2)$ がある。$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$ として，実数 $t$ を変化させるとき，$\vec{p}$ の大きさの最小値を求めよ。

**解法のポイント**　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ を $t$ の 2 次式と考えて，その最小値を求める。

**10** **類題**　$\vec{a}=(-2,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ -1)$，$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$ であるとき，次の問いに答えよ。

(1)　$|\vec{p}|$ が最小となるベクトル $\vec{p_0}$ を求めよ。

(2)　(1)で求めた $\vec{p_0}$ は，$\vec{b}$ と垂直であることを示せ。

**11**　平行四辺形 ABCD の対角線の交点を O とし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{OC}$　　(2)　$\overrightarrow{AD}$

**12**　正六角形 ABCDEF において，ベクトル $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{AC}$　　(2)　$\overrightarrow{BD}$　　(3)　$\overrightarrow{EC}$

**13**　次の問いに答えよ。

(1)　平面上の 3 つのベクトルを $\overrightarrow{OA}=(4,\ x)$，$\overrightarrow{OB}=(1,\ 2)$，$\overrightarrow{OC}=(x,\ 6)$ とする。3 点 A，B，C が一直線上にあるように $x$ の値を定めよ。

(2)　4 点 A$(-2,\ 1)$，B$(x,\ 4)$，C$(4,\ y)$，D$(-1,\ 3)$ を頂点とする四角形 ABCD が平行四辺形であるように，$x$，$y$ の値を定めよ。

(3)　2 つのベクトル $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(k,\ 4)$ に対して，$\vec{a}-\vec{b}$ と $2\vec{b}-\vec{a}$ が平行であるときの $k$ の値を求めよ。また，$3\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{a}+\vec{b}$ が直交するときの $k$ の値を求めよ。

**14** **発展**　2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$|\vec{a}+\vec{b}|=4$，$|\vec{a}-\vec{b}|=2$ であるとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。　　(2)　$|2\vec{a}-3\vec{b}|^2+|3\vec{a}-2\vec{b}|^2$ を求めよ。

**ヒント**　$|\vec{a}+\vec{b}|$，$|\vec{a}-\vec{b}|$ のそれぞれ 2 乗したものから，$\vec{a}\cdot\vec{b}$，$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$ の値を求める。

**例題**　**三角形の面積**

**15**　△ABC において，$\overrightarrow{AB}=(3,\ 2)$，$\overrightarrow{AC}=(2,\ 1)$，$\angle BAC=\theta$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\cos\theta$ の値を求めよ。　　(2)　△ABC の面積を求めよ。

**解法のポイント**　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}$ より求める。また，面積は，$S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta$ から求められる。

**16**　**類題**　△OAB において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=6$，$|\vec{a}-\vec{b}|=7$，$\angle AOB=\theta$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\cos\theta$ の値を求めよ。　　(2)　△OAB の面積を求めよ。

**17**　上底 AD=4，下底 BC=6，辺 AB=2，$\angle B=60^\circ$ の台形 ABCD がある。$\overrightarrow{BC}$ の向きの単位ベクトルを $\vec{u}$，$\overrightarrow{BA}$ の向きの単位ベクトルを $\vec{v}$ とする。このとき，次のベクトルを $\vec{u}$，$\vec{v}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{AC}$　　(2)　$\overrightarrow{AD}$　　(3)　$\overrightarrow{BD}$　　(4)　$\overrightarrow{CD}$

**18**　ベクトル $\vec{a}$ を直線 $l$ に正射影してできるベクトルを $\vec{a}'$ とする。$l$ に平行なベクトルを $\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\vec{a}'=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$ であることを示せ。

(2)　$\vec{a}=(5,\ -10)$，$\vec{b}=(4,\ -3)$ のとき，$\vec{a}'$ を求めよ。

**19**　ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=-1$ を満たすとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を求めよ。

**20**　**発展**　正三角形 ABC の辺 AB，BC 上に点 P，Q を AP：PB=1：1，BQ：QC=2：1 となるようにとる。点 A から直線 PQ に垂線 AH を引く。$\overrightarrow{CA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{AH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

**ヒント**　$\overrightarrow{PA}$ の直線 PQ への正射影ベクトルを考える。

# 第 2 講座　ベクトルの応用

## 基本の整理

〈位置ベクトル〉　▶始点 O を定めると，任意の点 P の位置ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ で表される。

**1**　線分 AC の中点を B，線分 AB の中点を P，線分 BC の中点を Q とする。点 A，B の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ として，点 P，Q の位置ベクトル $\vec{p}$，$\vec{q}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

〈分点の位置ベクトル〉　▶線分 AB を $m:n$ の比に分ける点 P の位置ベクトルは，$\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

**2**　2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$, $\mathrm{B}(\vec{b})$ に対して，線分 AB を 3:5 の比に外分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ を求めよ。

〈図形への応用〉　▶$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$

**3**　△ABC と点 P がある。点 P が等式 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たすとき，P はどんな位置にあるか。

〈ベクトル方程式〉　▶点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，ベクトル $\vec{d}$ に平行な直線のベクトル方程式は，$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$

**4**　点 $(1,\ -5)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{d}=(2,\ 3)$ である直線の方程式を，媒介変数 $t$ を用いて表せ。

〈法線ベクトル〉　▶$\vec{n}=(a,\ b)$ は，直線 $ax+by+c=0$ の法線ベクトルである。

**5**　直線 $3x+4y+1=0$ に垂直な単位ベクトルを求めよ。

〈点と直線との距離〉　▶点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ との距離は，$\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

**6**　点 $\mathrm{A}(5,\ 1)$ を中心として，直線 $4x-3y=7$ に接する円の方程式を求めよ。

〈円のベクトル方程式〉　▶中心 $\mathrm{C}(\vec{c})$，半径 $r$ の円のベクトル方程式は，$|\vec{p}-\vec{c}|=r$

**7**　2 定点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を直径の両端とする円 $C$ のベクトル方程式を求めよ。

# 演　習

**例題**　**共線条件**

**8**　平行四辺形 ABCD において辺 AB を $3:1$ の比に内分する点を P とし，対角線 BD を $1:4$ の比に内分する点を Q とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{PQ}$ および $\overrightarrow{PC}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2)　3 点 P，Q，C が一直線上にあることを示せ。

**解法のポイント**　(2)　$\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{PC}$ となる実数 $k$ が存在することを示せばよい。

**9** **類題**　△ABC の重心を G，辺 AB を $4:3$ の比に内分する点を P とし，辺 AC を $4:1$ の比に内分する点を Q とするとき，3 点 P，G，Q は一直線上にあることを示せ。

**10**　△ABC の内部の点 P が $5\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を満たしているとき，次の問いに答えよ。

(1)　直線 AP と辺 BC の交点を E とするとき，BE : EC を求めよ。

(2)　△BCP，△CAP，△ABP の面積をそれぞれ $S_1$，$S_2$，$S_3$ とするとき，$S_1:S_2:S_3$ を求めよ。

**11**　次の 2 直線 $l$，$m$ のなす角 $\theta$ $(0°\leqq\theta\leqq 90°)$ を求めよ。

(1)　$l:\sqrt{3}x+y+1=0$，$m:x+\sqrt{3}y+1=0$

(2)　$l:x+2y-1=0$，$m:x-3y+4=0$

**12**　△OAB がある。実数 $s$，$t$ が次の条件を満たしながら変化するとき，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ の終点 P の存在する範囲を求めよ。

(1)　$s+t=2$　　　(2)　$2s+3t=6$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

**13** **発展**　$xy$ 平面上に 3 点 O(0, 0)，A(1, 3)，B(3, $-1$) がある。次の各式を満たす点 P，Q の存在範囲をそれぞれ図示せよ。

(1)　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}\cos\alpha+\overrightarrow{OB}\sin\beta$，$0°\leqq\alpha\leqq 180°$，$0°\leqq\beta\leqq 180°$

(2)　$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}\cos\alpha+\overrightarrow{OB}\sin\alpha$，$0°\leqq\alpha\leqq 180°$

**ヒント**　(1)　$-1\leqq\cos\alpha\leqq 1$，$0\leqq\sin\beta\leqq 1$　　(2)　$-1\leqq\cos\alpha\leqq 1$，$0\leqq\sin\alpha\leqq 1$　に注意して領域を考える。

**例題** **交点の位置ベクトル**

**14**　△OAB で辺 OA を 1:3 の比に内分する点を M，辺 OB を 5:2 の比に内分する点を N とし，AN と BM の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　AP:PN$=s:(1-s)$ とおき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$s$ で表せ。

(2)　BP:PM$=t:(1-t)$ とおき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$t$ で表せ。

(3)　$s$，$t$ の値を求め，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

**解法のポイント**　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が平行でないとする。このとき，任意のベクトル $\vec{p}$ は $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いてただ 1 通りに表される。このことを利用して，交点の位置ベクトルを 2 通りに表し，係数を比較する。

**15** **類題**　△OAB において，OA を 1:2 の比に内分する点を M，OB を 3:2 の比に内分する点を N とし，AN と BM の交点を P とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ で表せ。

**16**　平面上に一直線上にない点 O，A，B がある。線分 AB を 1:2 の比に内分する点を M，線分 OA を 2:3 の比に内分する点を N とし，直線 BN と直線 OM の交点を P とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ で表せ。

**17**　4 点 O(0, 0)，A(1, 3)，B(4, 2)，C(2, 5) とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ で表すとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{OC}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　直線 AB と直線 OC との交点を P とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3)　点 Q が直線 AB 上の点で，$\overrightarrow{QC}$ が $\overrightarrow{OB}$ に平行であるとき，$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

**18**　2 点 A(4, 2)，B(6, 0) を通る直線へ原点 O から下ろした垂線の足を H とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ と表すとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

**19** **発展**　$xy$ 平面上で，円 $C$ の表す方程式を $x^2+y^2-8x-4y=a^2-20$ $(a>0)$ とする。原点を O とし，円 $C$ 上に点 A$(4,\ 2-a)$ をとる。また，平面上の点 P に対して，$\overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{OP}+3\overrightarrow{OA}$ となる点 Q をとる。点 P が円 $C$ 上にあるときの点 Q の位置を求めよ。

**ヒント**　円 $C$ の方程式から，中心 C(4, 2)，半径 $a$ である。$\overrightarrow{CP}=(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$ とおいて $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}$ として考えればよい。

# 解　答　《selectⅢ 数学C》

## 第1講座　ベクトルと演算

【p.2】

**1**　$2\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}$ ……①　$\vec{x}-3\vec{y}=\vec{b}$ ……②

①×3+②　$7\vec{x}=3\vec{a}+\vec{b}$

①−②×2　$7\vec{y}=\vec{a}-2\vec{b}$

よって，$\boldsymbol{\vec{x}=\frac{3}{7}\vec{a}+\frac{1}{7}\vec{b}}$，$\boldsymbol{\vec{y}=\frac{1}{7}\vec{a}-\frac{2}{7}\vec{b}}$

**2**　$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})+(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

よって，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$

**3**　$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと

$(8,\ 1)=s(1,\ 2)+t(2,\ -1)=(s+2t,\ 2s-t)$

ゆえに，$s+2t=8$，$2s-t=1$　これを解いて，

$s=2$，$t=3$　よって，$\boldsymbol{\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}}$

**4**　$\vec{a}-\vec{b}=(-4,\ 1)$ ……①

$3\vec{a}+2\vec{b}=(3,\ 8)$ ……②

①×2+②　$5\vec{a}=(-5,\ 10)$

①×3−②　$-5\vec{b}=(-15,\ -5)$

ゆえに，$\vec{a}=(-1,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ 1)$

よって，$\boldsymbol{|\vec{a}|}=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$

$\boldsymbol{|\vec{b}|}=\sqrt{3^2+1^2}=\boldsymbol{\sqrt{10}}$

**5**　(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120°$

$=3\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{-3}$

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{6}$

**6**　$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1\cdot(-2)+(-3)\cdot1}{\sqrt{1^2+(-3)^2}\sqrt{(-2)^2+1^2}}$

$=-\frac{1}{\sqrt{2}}$　よって，$\boldsymbol{\theta=135°}$

**7**　求める単位ベクトルを $\vec{e}=(x,\ y)$ とする。

$\vec{a}\perp\vec{e}$ より，$\vec{a}\cdot\vec{e}=0$　また，$|\vec{e}|=1$ から

$-4x+3y=0$ ……①　$x^2+y^2=1$ ……②

①，②を解いて求めるベクトルは

$\boldsymbol{\left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)}$，$\boldsymbol{\left(-\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right)}$

**8**　$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=41+4\vec{a}\cdot\vec{b}$

$4\vec{a}\cdot\vec{b}+41=9$ より，$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=-8}$

また，$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=29-2\vec{a}\cdot\vec{b}=45$　よって，$\boldsymbol{|\vec{a}-\vec{b}|=3\sqrt{5}}$

【p.3】

**9**　$\vec{p}=(-1,\ 3)+t(1,\ 2)=(-1+t,\ 3+2t)$

$|\vec{p}|^2=(-1+t)^2+(3+2t)^2=5(t+1)^2+5$

ゆえに，$|\vec{p}|^2$ は $t=-1$ のとき最小値 5

よって，$|\vec{p}|$ の最小値は $\boldsymbol{\sqrt{5}}$ ($t=-1$ のとき)

**10**　(1)　$\vec{p}=(-2+t,\ 1-t)$

$|\vec{p}|^2=(-2+t)^2+(1-t)^2=2\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

ゆえに，$|\vec{p}|$ は $t=\frac{3}{2}$ のとき最小となる。

よって，$\boldsymbol{\vec{p_0}=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)}$

(2)　$\vec{p_0}\cdot\vec{b}=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot1+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1)=0$

よって，$\vec{p_0}\perp\vec{b}$

**11**　(1)　$\overrightarrow{OC}=-\vec{a}$

(2)　$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{-\vec{a}-\vec{b}}$

**12**　対角線の交点を O とすると，

$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=\vec{a}+\vec{b}$

(1)　$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}$

$=\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})=\boldsymbol{2\vec{a}+\vec{b}}$

(2)　$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}$

$=2(\vec{a}+\vec{b})-\vec{a}=\boldsymbol{\vec{a}+2\vec{b}}$

(3)　$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{\vec{a}-\vec{b}}$

**13**　(1)　3 点 A，B，C が一直線上にあるから

$k\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ となる実数 $k$ が存在する。

$\overrightarrow{AB}=(-3,\ 2-x)$，$\overrightarrow{AC}=(x-4,\ 6-x)$

から，$-3k=x-4$，$k(2-x)=6-x$

これを解いて，$\boldsymbol{x=-2,\ 5}$

(2)　四角形 ABCD が平行四辺形であるから

AD∥BC かつ AD=BC より，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

$(1,\ 2)=(4-x,\ y-4)$

$4-x=1$，$y-4=2$ から，$\boldsymbol{x=3}$，$\boldsymbol{y=6}$

(3)　$(\vec{a}-\vec{b})\parallel(2\vec{b}-\vec{a})$ のとき

$t(\vec{a}-\vec{b})=2\vec{b}-\vec{a}$ となる実数 $t$ が存在するから，$t(1-k,\ -2)=(2k-1,\ 6)$

$t(1-k)=2k-1$，$-2t=6$ より

$t=-3$　よって，$\boldsymbol{k=2}$

また，$(3\vec{a}-\vec{b})\perp(\vec{a}+\vec{b})$ のとき

$(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=0$ より

$(3-k)(1+k)+2\cdot6=0$，　$k^2-2k-15=0$

これを解いて，$\boldsymbol{k=-3,\ 5}$

**14**　(1)　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=16$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4$

辺々引いて，$4\vec{a}\cdot\vec{b}=12$ より，$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=3}$

(2)　(1)の 2 式を辺々加えて，$2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2=20$

$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=10$ より

$|2\vec{a}-3\vec{b}|^2+|3\vec{a}-2\vec{b}|^2$

$=13(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)-24\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=13\cdot10-24\times3=\boldsymbol{58}$

【p.4】

**15**　(1)　$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{3\cdot2+2\cdot1}{\sqrt{3^2+2^2}\sqrt{2^2+1^2}}$

$=\boldsymbol{\frac{8}{\sqrt{65}}}$

(2)　$0°<\theta<180°$ より，$\sin\theta>0$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{8}{\sqrt{65}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{65}}$$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{65}\cdot\frac{1}{\sqrt{65}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

**16**　(1)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=49$ より

$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$　よって，$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$

(2)　$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot6\cdot\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^2}=\boldsymbol{6\sqrt{6}}$

**17**　(1)　$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{6\vec{u}-2\vec{v}}$

(2)　$\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{4\vec{u}}$

(3)　$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{4\vec{u}+2\vec{v}}$

(4)　$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{-2\vec{u}+2\vec{v}}$

**18**　(1)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を $\theta$ とすると

$|\vec{a'}|=|\vec{a}|\cos\theta$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ より

$|\vec{a'}|=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$，$\vec{a'}=|\vec{a'}|\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ から

$\vec{a'}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=5\cdot4+(-10)\cdot(-3)=50$

$\vec{a'}=\dfrac{50}{4^2+(-3)^2}\vec{b}=2\vec{b}=\boldsymbol{(8,\ -6)}$

**19**　$\vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}$ より

$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot(-\vec{a}-\vec{b})=-\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2=-1$

$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(-\vec{a}-\vec{b})=-|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$ より，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=\sqrt{2}$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を $\theta$ とすると

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-1}{2}$　よって，$\boldsymbol{\theta=120°}$

**20**　$\overrightarrow{QP}=\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})=\dfrac{3\vec{a}+\vec{b}}{6}$

$\overrightarrow{PH}$ は $\overrightarrow{PA}$ の $3\vec{a}+\vec{b}$ の上への正射影ベクトルと考えられるから，

$\overrightarrow{PH}=\dfrac{(3\vec{a}+\vec{b})\cdot\overrightarrow{PA}}{|3\vec{a}+\vec{b}|^2}(3\vec{a}+\vec{b})$，$|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2$，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos60°=\dfrac{1}{2}|\vec{a}|^2$ より

$\overrightarrow{PH}=\dfrac{1}{26}(3\vec{a}+\vec{b})$ となるから

$\boldsymbol{\overrightarrow{AH}}=\dfrac{1}{26}(3\vec{a}+\vec{b})-\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{2}=\boldsymbol{-\dfrac{5}{13}\vec{a}+\dfrac{7}{13}\vec{b}}$

## 第2講座　ベクトルの応用

【p.5】

**1**　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\dfrac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$，

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ}=\vec{a}+\dfrac{3}{2}(\vec{b}-\vec{a})$ より

$\boldsymbol{\vec{p}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}}$，$\boldsymbol{\vec{q}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{3}{2}\vec{b}}$

**2**　$\vec{p}=\dfrac{-5\vec{a}+3\vec{b}}{3-5}=\boldsymbol{\dfrac{5}{2}\vec{a}-\dfrac{3}{2}\vec{b}}$

**3**　点 A，B，C，P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{p}$ とする。等式から

$(\vec{a}-\vec{p})+(\vec{b}-\vec{p})+(\vec{c}-\vec{p})=\vec{b}-\vec{a}$

$3\vec{p}=2\vec{a}+\vec{c}$ より，$\vec{p}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{c}}{3}$

よって，点Pは**線分 AC を 1：2 の比に内分する点**

**4**　$\vec{p}=(1,\ -5)+t(2,\ 3)=(1+2t,\ -5+3t)$

よって，媒介変数を用いた表示は $\begin{cases}\boldsymbol{x=1+2t}\\ \boldsymbol{y=-5+3t}\end{cases}$

**5**　$\vec{n}=(3,\ 4)$ は直線に垂直なベクトルで

$|\vec{n}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$　　よって，$\vec{n}$ と平行な単位ベクトルは，$\pm\dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\pm\dfrac{1}{5}(3,\ 4)$　(複号同順)

すなわち，$\boldsymbol{\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)}$，$\boldsymbol{\left(-\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{4}{5}\right)}$

**6**　点 A と直線との距離が半径であるから

$\dfrac{|4\cdot5-3\cdot1-7|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2$ より，求める円の方程式は

$\boldsymbol{(x-5)^2+(y-1)^2=4}$

**7**　弧 AB に対する円周角は 90° であるから

$(\vec{p}-\vec{a})\perp(\vec{p}-\vec{b})$

よって，$\boldsymbol{(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0}$

【p.6】

**8**　(1)　$\boldsymbol{\overrightarrow{PQ}}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\dfrac{4\vec{a}+\vec{b}}{5}-\dfrac{3}{4}\vec{a}$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{20}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}}$$

$\boldsymbol{\overrightarrow{PC}}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}=\vec{a}+\vec{b}-\dfrac{3}{4}\vec{a}=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}}$

(2)　(1)から，$5\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC}$

よって，3 点 P，Q，C は一直線上にある。

**9**　$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ とすると

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{4}{7}\vec{a}$，$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{4}{5}\vec{b}$，$\overrightarrow{AG}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{3}$ より

$\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AP}=-\dfrac{5}{21}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$　……①

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=-\dfrac{4}{7}\vec{a}+\dfrac{4}{5}\vec{b}$　……②

①，②から $\dfrac{12}{5}\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{PQ}$

よって，3 点 P，G，Q は一直線上にある。

注 点 A，B，C の位置ベクトルで考えてもよい。

**10**　(1)　$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AP}=\vec{p}$ とおく。

$-5\vec{p}+3(\vec{a}-\vec{p})+4(\vec{b}-\vec{p})=\vec{0}$ より

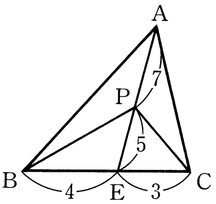
$\vec{p}=\dfrac{3\vec{a}+4\vec{b}}{12}=\dfrac{7}{12}\cdot\dfrac{3\vec{a}+4\vec{b}}{7}$

点 P は AE を 7：5 に内分する点であり，

点 E は辺 BC を 4：3 に内分する点である。

よって，BE：EC=**4：3**

(2) $\triangle BCP=\dfrac{7}{3}\triangle PCE$




$\triangle CAP=\dfrac{7}{5}\triangle PCE$

$\triangle ABP$

$=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{7}{5}\triangle PCE$

より，$S_1:S_2:S_3=\dfrac{7}{3}:\dfrac{7}{5}:\dfrac{28}{15}=$**$5:3:4$**

**11** (1) $l$，$m$ の法線ベクトル $\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$ のなす角 $\alpha$ について，$\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{3},\ 1)$，$\overrightarrow{n_2}=(1,\ \sqrt{3})$

$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}\cdot1+1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

この $\alpha$ は，$l$，$m$ のなす角 $\theta$ に等しい。

よって，求める角は，**$30°$**

(2) (1)と同様に，$\overrightarrow{n_1}=(1,\ 2)$，$\overrightarrow{n_2}=(1,\ -3)$

$\cos\alpha=\dfrac{1\cdot1+2\cdot(-3)}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{1^2+(-3)^2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\alpha=135°$ より，求める角 $\theta$ は，$180°-135°=$**$45°$**

**12** (1) $s+t=2$ より，$\dfrac{s}{2}+\dfrac{t}{2}=1$

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\dfrac{s}{2}(2\overrightarrow{OA})+\dfrac{t}{2}(2\overrightarrow{OB})$

$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ とすれば

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{s}{2}\overrightarrow{OA'}+\dfrac{t}{2}\overrightarrow{OB'}$，$\dfrac{s}{2}+\dfrac{t}{2}=1$

すなわち，点Pは，**$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ となる点 A′，B′ を結ぶ直線 A′B′ 上にある。**

(2) $2s+3t=6$ より，$\dfrac{s}{3}+\dfrac{t}{2}=1$

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{s}{3}(3\overrightarrow{OA})+\dfrac{t}{2}(2\overrightarrow{OB})$，$\dfrac{s}{3}+\dfrac{t}{2}=1$

$3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA''}$，$2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB''}$ とすれば

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{s}{3}\overrightarrow{OA''}+\dfrac{t}{2}\overrightarrow{OB''}$，$\dfrac{s}{3}+\dfrac{t}{2}=1$

$\dfrac{s}{3}\geqq0$，$\dfrac{t}{2}\geqq0$

すなわち，点Pは，**$3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA''}$，$2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB''}$ となる点 A″，B″ を結ぶ線分 A″B″ 上にある。**

**13** (1) $-1\leqq\cos\alpha\leqq1$ より，$\overrightarrow{OA}\cos\alpha$ は A′$(-1,\ -3)$ とすると，線分 AA′ 上を動く。
また，$0\leqq\sin\beta\leqq1$ より，P の存在範囲は次の図の斜線部（境界線を含む）になる。

(2) 点 Q の座標を $(x,\ y)$ とすると

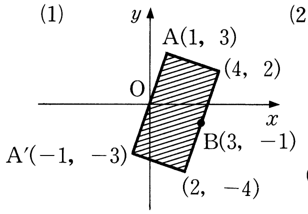
$(x,\ y)=(\cos\alpha+3\sin\alpha,\ 3\cos\alpha-\sin\alpha)$

より，$\cos\alpha=\dfrac{x+3y}{10}$，$\sin\alpha=\dfrac{3x-y}{10}$

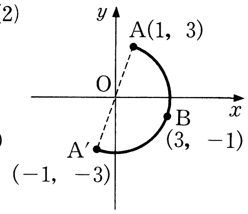
$\left(\dfrac{x+3y}{10}\right)^2+\left(\dfrac{3x-y}{10}\right)^2=1$ から

$x^2+y^2=10$　ただし，$-1\leqq\cos\alpha\leqq1$，$0\leqq\sin\alpha\leqq1$ より，円 $x^2+y^2=10$ の周上の点で，(1)の領域内にあるから，次の図のようになる。

(1)




(2)




【p.7】

**14** (1) $\overrightarrow{OP}=\dfrac{(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{ON}}{s+(1-s)}$

$=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{ON}=$**$(1-s)\vec{a}+\dfrac{5}{7}s\vec{b}$**

(2) $\overrightarrow{OP}=\dfrac{(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OM}}{t+(1-t)}=$**$\dfrac{1}{4}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$**

(3) $(1-s)\vec{a}+\dfrac{5}{7}s\vec{b}=\dfrac{1}{4}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は $\vec{0}$ でなく平行でないから

$1-s=\dfrac{1}{4}t$，$\dfrac{5}{7}s=1-t$ を解いて

$s=\dfrac{21}{23}$，$t=\dfrac{8}{23}$ より，**$\overrightarrow{OP}=\dfrac{2}{23}\vec{a}+\dfrac{15}{23}\vec{b}$**

**15** $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

**16** AM : MB $=1:2$ より，

$\overrightarrow{OM}=\dfrac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OM}$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{2}{3}k\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}k\overrightarrow{OB}=\dfrac{5}{3}k\cdot\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}k\overrightarrow{OB}$

点 P は直線 BN 上にあるから，$\dfrac{5}{3}k+\dfrac{1}{3}k=1$ より，$k=\dfrac{1}{2}$　　よって，**$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OB}$**

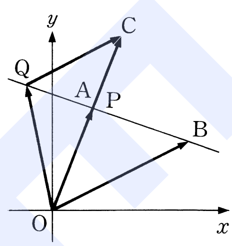
**17** (1) $\overrightarrow{OC}=p\vec{a}+q\vec{b}$ とすると

$2=p+4q$，$5=3p+2q$ を解いて

$p=\dfrac{8}{5}$，$q=\dfrac{1}{10}$ より，**$\overrightarrow{OC}=\dfrac{8}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{10}\vec{b}$**

(2) $\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OC}$

$=\dfrac{8k}{5}\vec{a}+\dfrac{k}{10}\vec{b}$




点 P は直線 AB 上にあるから，$\dfrac{8}{5}k+\dfrac{k}{10}=1$

よって，$k=\dfrac{10}{17}$ より，

**$\overrightarrow{OP}=\dfrac{16}{17}\vec{a}+\dfrac{1}{17}\vec{b}$**

(3) $\overrightarrow{OQ}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと

$\overrightarrow{OQ}=(1+3t,\ 3-t)$ より

$\overrightarrow{QC}=(-3t+1,\ t+2)$

$\overrightarrow{QC}/\!/\overrightarrow{OB}$ より，$-3t+1=2(t+2)$

よって，$t=-\dfrac{3}{5}$ から，**$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{8}{5}\vec{a}-\dfrac{3}{5}\vec{b}$**

**18** H は直線 AB 上にあるから

$\overrightarrow{OH}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(4+2t,\ 2-2t)$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ -2)$ で
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=0$
$2(4+2t)-2(2-2t)=0$ から，$t=-\dfrac{1}{2}$
よって，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{3}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}}$

**19** $(x-4)^2+(y-2)^2=a^2\,(a>0)$ より，円 $C$ の中心は $\mathrm{C}(4,\ 2)$，半径は $a$ である。
$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$ とおくことができる。
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(4+a\cos\theta,\ 2+a\sin\theta)$
$\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+3\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より，
$x=20+2a\cos\theta$，$y=10-3a+2a\sin\theta$
これから，$(x-20)^2+\{y-(10-3a)\}^2=(2a)^2$
よって，点 Q は **中心 $(20,\ 10-3a)$，半径 $2a$ の円の周上にある。**

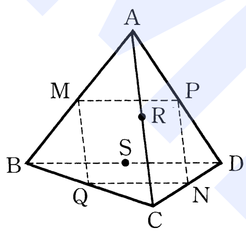
## 第 3 講座　空間ベクトル

【p.8】

**1** $\mathrm{AB}=\sqrt{(4-1)^2+(7-4)^2+(-7+1)^2}=\boldsymbol{3\sqrt{6}}$

**2** $\mathrm{P}\left(\dfrac{2\cdot(-2)+3\cdot2}{3+2},\ \dfrac{2\cdot1+3\cdot5}{3+2},\ \dfrac{2\cdot5+3\cdot(-3)}{3+2}\right)$
より，$\boldsymbol{\mathrm{P}\left(\dfrac{2}{5},\ \dfrac{17}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)}$
$\mathrm{Q}\left(\dfrac{-2\cdot(-2)+3\cdot2}{3-2},\ \dfrac{-2\cdot1+3\cdot5}{3-2},\ \dfrac{-2\cdot5+3\cdot(-3)}{3-2}\right)$
より，$\boldsymbol{\mathrm{Q}(10,\ 13,\ -19)}$

**3** A, B, …などの位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，…のように表す。




(1) $\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\dfrac{\vec{c}-\vec{a}}{2}$
また，$\overrightarrow{\mathrm{PN}}=\dfrac{\vec{c}+\vec{d}}{2}-\dfrac{\vec{a}+\vec{d}}{2}=\dfrac{\vec{c}-\vec{a}}{2}$
$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=\overrightarrow{\mathrm{PN}}$ より，$\mathrm{MQ}=\mathrm{PN}$，$\mathrm{MQ}\,/\!/\,\mathrm{PN}$
よって，四角形 MQNP は平行四辺形

(2) MN，PQ，RS の中点を $\mathrm{G_1}$，$\mathrm{G_2}$，$\mathrm{G_3}$ とし，その位置ベクトルを $\vec{g_1}$，$\vec{g_2}$，$\vec{g_3}$ とすると
$\vec{g_1}=\dfrac{\vec{m}+\vec{n}}{2}=\dfrac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$
$\vec{g_2}=\dfrac{\vec{p}+\vec{q}}{2}=\dfrac{1}{4}(\vec{a}+\vec{d}+\vec{b}+\vec{c})$
$\vec{g_3}=\dfrac{\vec{r}+\vec{s}}{2}=\dfrac{1}{4}(\vec{a}+\vec{c}+\vec{b}+\vec{d})$
位置ベクトルが一致することから，$\mathrm{G_1}$，$\mathrm{G_2}$，$\mathrm{G_3}$ は同じ点である。この点を G として，MN，PQ，RS は 1 点 G で交わる。

**4** $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(5-1,\ 1-(-1),\ -1-2)=\boldsymbol{(4,\ 2,\ -3)}$

**5** (1) $2\vec{a}-\vec{b}=\boldsymbol{(3,\ -6,\ 5)}$
$|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3^2+(-6)^2+5^2}=\boldsymbol{\sqrt{70}}$
(2) $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-3)^2+4^2}=\sqrt{26}$
$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは
$\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{\sqrt{26}},\ -\dfrac{3}{\sqrt{26}},\ \dfrac{4}{\sqrt{26}}\right)}$

**6** $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1+1\cdot(-2)+2\cdot(-1)=\boldsymbol{-3}$

【p.9】

**7** (1) $\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}=\sqrt{6}$ より，三角形 ABC は，**1 辺 $\sqrt{6}$ の正三角形**
(2) $\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$ とおくと
$\mathrm{AP}^2=(x-1)^2+(y-1)^2+4^2$
$\mathrm{BP}^2=(x-2)^2+(y-2)^2+2^2$
$\mathrm{CP}^2=(x-3)^2+y^2+3^2$
$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$ から，$x+y=-3$ ……①
$\mathrm{BP}^2=\mathrm{CP}^2$ から，$x-2y=3$ ……②
①，②から，$x=-1$，$y=-2$
よって，$\boldsymbol{(-1,\ -2,\ 0)}$

**8** $\left(0,\ \dfrac{12}{11},\ \dfrac{20}{11}\right)$

**9** (1) $\mathrm{A_1}(2,\ -1,\ -5)$，$\mathrm{A_2}(-2,\ -1,\ 5)$
(2) $\mathrm{G}\left(\dfrac{4-2+4}{3},\ \dfrac{5+4+0}{3},\ \dfrac{1+2+3}{3}\right)$
より，$\boldsymbol{\mathrm{G}(2,\ 3,\ 2)}$
(3) $\mathrm{C}(x,\ y,\ z)$ とすると
$\dfrac{3\cdot2+x}{1+3}=3$，$\dfrac{3\cdot1+y}{1+3}=3$，$\dfrac{3\cdot(-4)+z}{1+3}=1$
より，$x=6$，$y=9$，$z=16$
よって，$\boldsymbol{\mathrm{C}(6,\ 9,\ 16)}$
(4) $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とおくと
$\mathrm{AP}^2=(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2$
$\mathrm{BP}^2=(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2$
$\mathrm{CP}^2=(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2$
$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$ より，$x-y+2z+1=0$ ……①
$\mathrm{BP}^2=\mathrm{CP}^2$ より，$y=2$ ……②
①，②から，$x=-2z+1$
$\mathrm{P}(-2z+1,\ 2,\ z)$ となるから
$\mathrm{OP}^2=(-2z+1)^2+4+z^2=5\left(z-\dfrac{2}{5}\right)^2+\dfrac{21}{5}$
$z=\dfrac{2}{5}$ のとき，OP は最小となる。
よって，$\boldsymbol{\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{5},\ 2,\ \dfrac{2}{5}\right)}$

**10** $x$ 軸に関して B と対称な点を B′ とすると B′(5, −12, −16) であり，AP+PB が最小となるのは，A，P，B′ が一直線上にあるときで $\overrightarrow{\mathrm{AB'}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ なる $k$ が存在すればよい。
$\mathrm{P}(x,\ 0,\ 0)$ とおくと
$(-1,\ -18,\ -24)=k(x-6,\ -6,\ -8)$ より
$k=3$，$x=\dfrac{17}{3}$　よって，$\boldsymbol{\mathrm{P}\left(\dfrac{17}{3},\ 0,\ 0\right)}$

**11** $\mathrm{AD}^2=(x-2)^2+(y-2)^2+z^2$ ……①
$\mathrm{BD}^2=(x-2)^2+y^2+(z+2)^2$ ……②
$\mathrm{CD}^2=x^2+(y-2)^2+(z+2)^2$ ……③
①＝②より，$y=-z$　　②＝③より，$x=y$
これから，$x=y=-z$ ……④