◆本書の特色と構成◆

1 本書は数学Bのうち，統計的な推測に重点を置き，基本事項の徹底理解から標準的な応用問題が解けるまでの実力養成を目的として編集されています。

2 全体は9講座から成り各講座とも1～1.5時間が標準授業時間です。

3 各講座の構成は以下の通りです。

①基本の整理　基本事項を1つ1つの問題を解くことで確認します。

②演　　　習　例題として取り上げた最も重要でかつ応用範囲の広い問題や，その類題を解くことによって解法を習得します。さらに，例題の関連問題や，やや発展的な問題についても練習して，様々なタイプの問題に対応できる応用力を養成します。

もくじ

第1講座　確率変数と確率分布

基本の整理

① **確率変数**　試行の結果によってその値が定まる変数を**確率変数**という。

② **確率分布**　確率変数Xのとりうる値と，その値がとる確率との対応関係を，Xの**確率分布**という。

$p_1 \geqq 0,\ p_2 \geqq 0,\ \cdots\cdots,\ p_n \geqq 0$

$p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n=1$

X	$x_1\ x_2\cdots\cdots x_n$	計
P	$p_1\ p_2\cdots\cdots p_n$	1

〈確率分布〉

1　次の確率変数Xの確率分布を求めよ。

(1)　1個のさいころを投げるとき，出る目の数をXとする。

(2)　1枚の硬貨を3回投げるとき，表の出る回数をXとする。

(3)　赤玉10個と白玉6個の入った袋から，無作為に3個の玉を取り出すとき，取り出される白玉の個数をXとする。

(4)　100本のうち1等500円が10本，2等100円が20本で，他ははずれであるくじがある。このくじを1本引くときもらえる賞金をX円とする。

2　次の確率変数Xの確率分布を求めよ。

(1)　3枚の100円硬貨を同時に投げるとき，表の出た硬貨の金額の合計X(円)

(2)　1個のさいころを3回続けて投げるとき，1の目が出る回数X(回)

3　赤玉2個，白玉3個入っている袋の中から，玉を同時に2個取り出すとき，その中の赤玉の個数をXとする。

(1)　確率変数Xの確率分布を求めよ。

(2)　$P(X \leqq 1)$を求めよ。

4　確率変数Xの確率分布が次の表のようになっているとき，次の確率を求めよ。

X	1	2	3	4	計
P	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	1

(1)　$P(X \geqq 2)$　　(2)　$P(X < 3)$　　(3)　$P(X \neq 2)$

演　習

例題　確率分布

5　5枚のカードがあり，それには1から5までの通し番号がついている。別に5つの席があり，それにも1から5までの通し番号がついている。カードの番号と一致している席の個数をXとするとき，確率変数Xの確率分布を求めよ。

解法のポイント　$X=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$だが，$X=4$のときはあり得ない。

6　類題　4つの箱があり，その箱に，それぞれ1，2，3，4の番号がつけられている。1，2，3，4の番号がつけられている4枚のカードを1つの箱に1枚ずつ入れるとき，カードの番号が一致したものの個数をXとする。Xの確率分布を求めよ。

7　2個のさいころを同時に投げるとき，出る目の和Xの確率分布を求めよ。また$P(4 \leqq X \leqq 6)$を求めよ。

8　4枚の硬貨を同時に投げる試行を4回繰り返すとき，2枚が表で2枚が裏となる回数をXとする。確率$P(X=k)$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$をkの式で表せ。

9　発展　1個のさいころを投げて，出る目の数の和がはじめて6の倍数となるまでに必要な回数を確率変数Xとする。Xの確率分布を求めよ。

ヒント　$P(X=k)=\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\cdots\cdots\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{6}=\left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\dfrac{1}{6}$で求められる。

第２講座　確率変数の期待値と分散

基本の整理

① **確率変数の期待値(平均)**　確率変数Xが右の表の分布に従うとき，

期待値$\mathrm{E}(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n=\sum_{k=1}^{n}x_kp_k$

X	x_1　$x_2\cdots\cdots x_n$	計
P	p_1　$p_2\cdots\cdots p_n$	1

② **確率変数の分散，標準偏差**　確率変数Xの期待値をmとするとき，

分散$V(X)=E((X-m)^2)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2p_k=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

標準偏差$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{E(X^2)-\{E(X)\}^2}$

③ **確率変数の変換**　確率変数Xと定数a，bに対して，$Y=aX+b$とすると，

$E(Y)=aE(X)+b$　　$V(Y)=a^2V(X)$　　$\sigma(Y)=|a|\sigma(X)$

〈確率変数の期待値〉

1　2枚の100円硬貨を同時に投げるとき，表の出た硬貨の金額の和をX円とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　Xの確率分布を求めよ。　　(2)　Xの期待値を求めよ。

2　赤玉4個，白玉3個が入っている袋の中から，玉を同時に2個取り出すとき，取り出した玉に赤玉があれば1個につき2点，白玉があれば1個につき1点が得られる。このときの得点の合計をXとするとき，確率変数Xの期待値を求めよ。

〈確率変数の分散，標準偏差〉

3　1から5までの数字が1つずつ記入された5枚のカードがある。この中から1枚を取り出し，そのカードに書かれた数字をXとする。

(1)　Xの分散を求めよ。　　(2)　Xの標準偏差を求めよ。

4　50円硬貨2枚を同時に投げる試行において，表が出た硬貨の金額の合計をX円とする。

(1)　Xの期待値を求めよ。　　(2)　Xの分散を求めよ。　　(3)　Xの標準偏差を求めよ。

〈確率変数の変換〉

5　1個のさいころを投げて出た目の数をXとする。次の問いに答えよ。

(1)　確率変数Xの期待値，分散，標準偏差を求めよ。

(2)　次の確率変数Yの期待値，分散，標準偏差を求めよ。

①$Y=X+3$　　②$Y=-4X$　　③$Y=2X-5$

演　習

例題　確率変数の期待値，分散，標準偏差

6　白玉3個と赤玉7個が入っている袋から，同時に3個の玉を取り出すとき，その3個の中の白玉の個数をXとする。次の問いに答えよ。

(1)　確率変数Xの期待値，分散，標準偏差を求めよ。

(2)　確率変数$Y=2X+3$の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

解法のポイント　分散$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$，$E(aX+b)=aE(X)+b$，$V(aX+b)=a^2V(X)$を利用する。

7　**類題**　白玉4個と赤玉2個が入っている袋から，玉を1個ずつ，もとに戻さずに2回続けて取り出すとき，白玉の出る回数をXとする。確率変数Xの期待値，分散，標準偏差を求めよ。

8　1，2，2，3，3，3の数字が1つずつ記入された6枚のカードがある。この中から2枚を取り出すとき，そのカードに書かれた数の和をXとする。

(1)　確率変数Xの期待値を求めよ。　(2)　確率変数Xの分散と標準偏差を求めよ。

9　自然数1，2，……，nの番号のついたカードが，それぞれn枚，$n-1$枚，……，1枚ある。このカードをよく混ぜてから1枚取り出し，そのカードに書かれている番号をXとする。

(1)　確率$P(X=k)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$を求めよ。

(2)　Xの期待値を求めよ。　(3)　Xの分散を求めよ。

10　1の目が3つの面に，2の目が2つの面に，3の目が1つの面に書かれた立方体のさいころを1回投げるとき，出た目の数をXとする。確率変数Yを次のように定めるとき，Yの期待値，分散，標準偏差を求めよ。

(1)　$Y=-3X$　(2)　$Y=6X+2$

11　**発展**　確率変数Xの期待値がmで分散がσ^2のとき，確率変数$Y=\dfrac{X-m}{\sigma}$の期待値と分散を求めよ。

ヒント　$Y=\dfrac{X-m}{\sigma}=\dfrac{1}{\sigma}X-\dfrac{m}{\sigma}$で1次式の期待値と分散の公式を利用する。

解　答　《selectⅢ 数学B》

第1講座　確率変数と確率分布

【p.2】

1 (1)

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

(2)

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

(3)

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{3}{14}$	$\frac{27}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{28}$	1

(4)

X	0	100	500	計
P	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

2 (1)

X	0	100	200	300	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

(2)

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$	1

3 (1)　Xのとり得る値は，$X=0$，1，2

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_2C_1\cdot{}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{6}{10}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$$

X	0	1	2	計
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

(2)　$P(X\leqq 1)=P(X=0)+P(X=1)$

$$=\frac{3}{10}+\frac{6}{10}=\boldsymbol{\frac{9}{10}}$$

4 (1) $\frac{4}{5}$　　(2) $\frac{3}{10}$　　(3) $\frac{9}{10}$

【p.3】

5　5枚のカードを5個の席に配るすべての方法は$5!=120$(通り)。

$X=5$のとき，すべて一致するのは1通りだから，$P(X=5)=\frac{1}{120}$

$X=4$のとき，5個目も必ず一致するので，$X=4$の場合は起こらないから，$P(X=4)=\frac{0}{120}$

$X=3$のとき，3個一致するのは，${}_5C_3=10$(通り)より，$P(X=3)=\frac{10}{120}$

$X=2$のとき，2個一致するのは，一致しない3枚のカードの配り方が2通りずつあるから，

${}_5C_2\times 2=20$(通り) より，$P(X=2)=\frac{20}{120}$

$X=1$のとき，1個一致するのは，${}_5C_1\times 9=45$(通り) より，$P(X=1)=\frac{45}{120}$

$X=0$のとき，余事象を考えて，

$120-(1+10+20+45)=44$ より，$P(X=0)=\frac{44}{120}$

求める確率分布は，

X	0	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{44}{120}$	$\frac{45}{120}$	$\frac{20}{120}$	$\frac{10}{120}$	0	$\frac{1}{120}$	1

6

X	0	1	2	4	計
P	$\frac{9}{24}$	$\frac{8}{24}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{1}{24}$	1

7　目の出方は$6^2=36$通りあり，どの出方も確率は$\frac{1}{36}$

目の和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
場合の数	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

〔$2\leqq k\leqq 7$のとき，目の和がkになるのは$(k-1,\ 1)$，$(k-2,\ 2)$，……，$(1,\ k-1)$ の $(k-1)$ 通り，8以上のときも $(6,\ k-6)$，$(5,\ k-5)$，……と考えればよい〕

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

$P(4 \leqq X \leqq 6)=\dfrac{3}{36}+\dfrac{4}{36}+\dfrac{5}{36}=\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$

（答）確率分布は前の表のとおり。

$P(4 \leqq X \leqq 6)=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

8　${}_4\mathrm{C}_k\cdot\dfrac{3^k5^{4-k}}{4096}$

9　$X=1$ のとき，$P(X=1)=\dfrac{1}{6}$

$X=2$ のとき，２回の出た目の数の和が６の倍数となるのは(1，5)(2，4)(3，3)(4，2)(5，1)の５通りより，

$P(X=2)=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{36}$

$X=3$ のとき，1，２回の目の数の和が６の倍数にならないのは $5\times5=25$(通り) より，

$P(X=3)=\left(\dfrac{5}{6}\right)^2\cdot\dfrac{1}{6}$

$X=n$ のとき，(１回目)＋(２回目)＋……＋(n回目)が６の倍数となる目が出るのは，

$P(X=n)=\dfrac{5}{6}\cdots\cdots\dfrac{5}{6}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)=\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{6}$

以上より，

X	1	2	3	…	n	…	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2\frac{1}{6}$	…	$\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}$	…	1

第２講座　確率変数の期待値と分散

【p.4】

1　(1)

X	0	100	200	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

(2)　$E(X)=0\cdot\dfrac{1}{4}+100\cdot\dfrac{2}{4}+200\cdot\dfrac{1}{4}$

$=\mathbf{100}$

2　X のとり得る値は，

白玉２個のとき，　$X=1+1=2$

赤，白１個ずつのとき，　$X=2+1=3$

赤玉２個のとき，　$X=2+2=4$

$P(X=2)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}$

$=\dfrac{3}{21}=\dfrac{1}{7}$

$P(X=3)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}$

$=\dfrac{12}{21}=\dfrac{4}{7}$

$P(X=4)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}$

$=\dfrac{6}{21}=\dfrac{2}{7}$

X の確率分布は右の表のようになるから，

X	2	3	4	計
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

X の期待値は，

$2\cdot\dfrac{1}{7}+3\cdot\dfrac{4}{7}+4\cdot\dfrac{2}{7}=\boldsymbol{\dfrac{22}{7}}$

3

X	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$m=1\cdot\dfrac{1}{5}+2\cdot\dfrac{1}{5}+3\cdot\dfrac{1}{5}+4\cdot\dfrac{1}{5}+5\cdot\dfrac{1}{5}$

$=3$

$X-m$	-2	-1	0	1	2	計
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

(1)　$V(X)=(-2)^2\cdot\dfrac{1}{5}+(-1)^2\cdot\dfrac{1}{5}+0^2\cdot\dfrac{1}{5}+1^2\cdot\dfrac{1}{5}+2^2\cdot\dfrac{1}{5}$

$=\dfrac{10}{5}=\mathbf{2}$

(2)　$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

$=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

4　(1)　$E(X)=50$　　(2)　$V(X)=1250$

(3)　$\sigma(X)=25\sqrt{2}$

5　(1)　$E(X)=1\cdot\dfrac{1}{6}+2\cdot\dfrac{1}{6}+\cdots\cdots+6\cdot\dfrac{1}{6}=\boldsymbol{\dfrac{7}{2}}$

$V(X)=1^2\cdot\dfrac{1}{6}+2^2\cdot\dfrac{1}{6}+\cdots\cdots+6^2\cdot\dfrac{1}{6}-\left(\dfrac{7}{2}\right)^2=\boldsymbol{\dfrac{35}{12}}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\dfrac{35}{12}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{105}}{6}}$

(2)　①　$E(Y)=E(X)+3=\dfrac{7}{2}+3=\boldsymbol{\dfrac{13}{2}}$

$V(Y)=1^2V(X)=\boldsymbol{\dfrac{35}{12}}$

$\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{\dfrac{35}{12}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{105}}{6}}$

②　$E(Y)=-4E(X)=-4\cdot\dfrac{7}{2}=\mathbf{-14}$

$V(Y)=(-4)^2V(X)=16\cdot\dfrac{35}{12}=\boldsymbol{\dfrac{140}{3}}$

$\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{\dfrac{140}{3}}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{105}}{3}}$

③　$E(Y)=2E(X)-5=2\cdot\dfrac{7}{2}-5=\mathbf{2}$

$$V(Y)=2^2\cdot V(X)=4\cdot\frac{35}{12}=\mathbf{\frac{35}{3}}$$

$$\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{\frac{35}{3}}=\mathbf{\frac{\sqrt{105}}{3}}$$

【p.5】

6 (1) $P(X=0)=\dfrac{{}_3C_0\cdot{}_7C_3}{{}_{10}C_3}=\dfrac{1\cdot35}{120}=\dfrac{35}{120}$,

$P(X=1)=\dfrac{{}_3C_1\cdot{}_7C_2}{{}_{10}C_3}=\dfrac{3\cdot21}{120}=\dfrac{63}{120}$

$P(X=2)=\dfrac{{}_3C_2\cdot{}_7C_1}{{}_{10}C_3}=\dfrac{3\cdot7}{120}=\dfrac{21}{120}$,

$P(X=3)=\dfrac{{}_3C_3\cdot{}_7C_0}{{}_{10}C_3}=\dfrac{1}{120}$

X の確率分布は下の表。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{35}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{1}{120}$	1

X の期待値は,

$$E(X)=0\times\frac{35}{120}+1\times\frac{63}{120}+2\times\frac{21}{120}+3\times\frac{1}{120}=\mathbf{\frac{9}{10}}$$

また, $E(X^2)=0^2\times\dfrac{35}{120}+1^2\times\dfrac{63}{120}+2^2\times\dfrac{21}{120}+3^2\times\dfrac{1}{120}=\dfrac{13}{10}$ より,

X の分散は, $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$$=\frac{13}{10}-\left(\frac{9}{10}\right)^2=\mathbf{\frac{49}{100}}$$

X の標準偏差は, $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

$$=\sqrt{\frac{49}{100}}=\mathbf{\frac{7}{10}}$$

(2) $Y=2X+3$ の期待値は,

$E(Y)=E(2X+3)=2E(X)+3$

$$=2\times\frac{9}{10}+3=\mathbf{\frac{24}{5}}$$

Y の分散は, $V(Y)=2^2\times V(X)$

$$=4\times\frac{49}{100}=\mathbf{\frac{49}{25}}$$

Y の標準偏差は, $\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\mathbf{\dfrac{7}{5}}$

7 Xのとりうる値は 0, 1, 2 である。

$P(X=0)=\dfrac{{}_2C_2}{{}_6C_2}=\dfrac{1}{15}$, $P(X=1)=\dfrac{{}_4C_1\times{}_2C_1}{{}_6C_2}=\dfrac{8}{15}$

$P(X=2)=\dfrac{{}_4C_2}{{}_6C_2}=\dfrac{6}{15}$

確率分布は右の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$	1

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{15}+1\cdot\frac{8}{15}+2\cdot\frac{6}{15}=\mathbf{\frac{4}{3}}$$

$$V(X)=0^2\cdot\frac{1}{15}+1^2\cdot\frac{8}{15}+2^2\cdot\frac{6}{15}-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\mathbf{\frac{16}{45}}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{16}{45}}=\mathbf{\frac{4\sqrt{5}}{15}}$$

8 (1) X のとり得る値は, $X=3$, 4, 5, 6

$X=3$ となるのは, 1 と 2 のカードを取り出すときだから,

$$P(X=3)=\frac{{}_2C_1}{{}_6C_2}=\frac{2}{15}$$

$X=4$ となるのは, 1 と 3 のカード, または 2 のカードを 2 枚取り出すときだから,

$$P(X=4)=\frac{{}_3C_1+1}{{}_6C_2}=\frac{4}{15}$$

$X=5$ となるのは, 2 と 3 のカードを取り出すときだから,

$$P(X=5)=\frac{{}_2C_1\cdot{}_3C_1}{{}_6C_2}=\frac{6}{15}$$

$X=6$ となるのは, 3 のカードを 2 枚取り出すときだから,

$$P(X=6)=\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{3}{15}$$

X	3	4	5	6	計
P	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{3}{15}$	1

X の確率分布は上の表のようになるから, X の期待値は,

$$E(X)=3\cdot\frac{2}{15}+4\cdot\frac{4}{15}+5\cdot\frac{6}{15}+6\cdot\frac{3}{15}$$

$$=\frac{70}{15}=\mathbf{\frac{14}{3}}$$

(2) $E(X^2)=3^2\cdot\dfrac{2}{15}+4^2\cdot\dfrac{4}{15}+5^2\cdot\dfrac{6}{15}+6^2\cdot\dfrac{3}{15}$

$$=\frac{340}{15}=\frac{68}{3}$$

X の分散を $V(X)$, 標準偏差を $\sigma(X)$ とすると,

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$$=\frac{68}{3}-\left(\frac{14}{3}\right)^2=\mathbf{\frac{8}{9}}$$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

$$=\sqrt{\frac{8}{9}}=\mathbf{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

9 (1) カードは全部で

$1+2+\cdots\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ 枚ある。

そのうち，番号が k であるカードは $n-k+1$ 枚あるから

$$P(X=k)=\frac{n-k+1}{\frac{1}{2}n(n+1)}=\boldsymbol{\frac{2(n-k+1)}{n(n+1)}}$$

(2) $E(X)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k(n-k+1)}{n(n+1)}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k(n+1)-2k^2}{n(n+1)}$$

$$=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=\frac{2}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=(n+1)-\frac{2n+1}{3}=\boldsymbol{\frac{n+2}{3}}$$

(3) $E(X^2)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2P(X=k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2(n-k+1)}{n(n+1)}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2(n+1)-2k^3}{n(n+1)}$$

$$=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k^3$$

$$=\frac{2}{n}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{2}{n(n+1)}\cdot\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

$$=\frac{(n+1)(2n+1)}{3}-\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)}{6}$$

したがって　$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$$=\frac{(n+1)(n+2)}{6}-\left(\frac{n+2}{3}\right)^2$$

$$=\boldsymbol{\frac{(n+2)(n-1)}{18}}$$

10 X のとり得る値は，$X=1,\ 2,\ 3$

$P(X=1)=\dfrac{3}{6}$

$P(X=2)=\dfrac{2}{6}$

$P(X=3)=\dfrac{1}{6}$

X の確率分布は右の表のようになるから，

X	1	2	3	計
P	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(X)=1\cdot\frac{3}{6}+2\cdot\frac{2}{6}+3\cdot\frac{1}{6}$$

$$=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$

$$E(X^2)=1^2\cdot\frac{3}{6}+2^2\cdot\frac{2}{6}+3^2\cdot\frac{1}{6}$$

$$=\frac{20}{6}=\frac{10}{3}$$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$

$$=\frac{10}{3}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

$$=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

(1) $E(Y)=-3E(X)$

$$=-3\cdot\frac{5}{3}=\boldsymbol{-5}$$

$$V(Y)=(-3)^2V(X)$$

$$=9\cdot\frac{5}{9}=\boldsymbol{5}$$

$$\sigma(Y)=|-3|\,\sigma(X)$$

$$=3\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$$

(2) $E(Y)=6E(X)+2$

$$=6\cdot\frac{5}{3}+2=\boldsymbol{12}$$

$$V(Y)=6^2V(X)$$

$$=36\cdot\frac{5}{9}=\boldsymbol{20}$$

$$\sigma(Y)=|6|\,\sigma(X)$$

$$=6\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=\boldsymbol{2\sqrt{5}}$$

11 $Y=\dfrac{1}{\sigma}X-\dfrac{m}{\sigma}$ より，

期待値 $E(Y)=\dfrac{1}{\sigma}E(X)-\dfrac{m}{\sigma}=\dfrac{1}{\sigma}\cdot m-\dfrac{m}{\sigma}=0$

よって，$\boldsymbol{E(Y)=0}$

分散 $V(Y)=\dfrac{1}{\sigma^2}V(X)=\dfrac{1}{\sigma^2}\cdot\sigma^2=1$

したがって，$\boldsymbol{V(Y)=1}$

第3講座　確率変数の和と期待値

【p.6】

1 (1) $P(X=0,\ Y=0)=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{{}_2C_2}{{}_4C_2}$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{10}}$$