◆本書の特色と構成◆

1 本書は，数学Ⅱ・数学Ｂ・数学Ｃの３科目について，総まとめと大学入試へ向けての土台づくりを目的として編集されています。

2 全体は11講座から成り，各講座とも１～1.5時間が標準授業時間です。

3 各講座の構成は以下の通りです。

①パターンの修得……例題として取り上げた最も重要でかつ応用範囲の広い典型パターン問題や，その類題・関連問題を説くことで解法に習熟します。

②演　　習……例題レベルを変形した問題や，やや発展した内容の問題を扱うことで，さまざまなタイプの問題に対応できる応用力を養成します。

もくじ

第1講座　式と証明

パターンの修得

例題 1　多項式の除法

1　次の多項式 A を多項式 B で割った商と余りを求めよ。

(1)　$A=2x^3-5x^2+2x+3$，$B=x^2-3x+1$

(2)　$A=1-2x^2+3x^3$，$B=x-2$

解法のポイント　(2)　降べきの順に整理して，割られる式の欠けている次数の項はあける。

2 **類題**　次の多項式 A を多項式 B で割った商と余りを求めよ。

(1)　$A=3x^3+11-6x$，$B=x+2$　　(2)　$A=3-3x^2+2x^3$，$B=1+2x^2-x$

例題 2　分数式の計算

3　次の計算をせよ。

(1)　$\dfrac{x^2-x}{x^2+x-6}\times\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+2x}$　　(2)　$\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}-\dfrac{x-5}{x^2-5x+6}$

解法のポイント　(1)　分母と分子を因数分解して約分する。
(2)　通分して分子の差を計算して，結果を約分する。

4 **類題**　次の計算をせよ。

(1)　$\dfrac{x^2}{x^2-9}\div\dfrac{x}{2x^2-5x-3}$　　(2)　$\dfrac{x+4}{x^2-x-2}-\dfrac{x+3}{x^2-1}$

例題 3　恒等式の係数の決定

5　等式 $\dfrac{x+13}{(2x-1)(x+4)}=\dfrac{a}{2x-1}+\dfrac{b}{x+4}$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b の値を定めよ。

解法のポイント　分母を払った等式で，両辺の同じ次数の項の係数を等しいとおく。

6 **類題**　等式 $\dfrac{2x-5}{(x+2)(x+5)}=\dfrac{a}{x+5}+\dfrac{b}{x+2}$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b の値を定めよ。

例題 4　条件付きの等式の証明

7　次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$a+b+c=0$ のとき，$ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)=0$

(2)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，$\dfrac{2a+3c}{2b+3d}=\dfrac{a-c}{b-d}$

解法のポイント　(1)　$a+b=-c$，$b+c=-a$，$c+a=-b$ を利用する。

(2)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおき，$a=bk$，$c=dk$ として，２文字を減らす。

8 類題　次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$a+b+c=0$ のとき，　$ab+b^2=ca+c^2$

(2)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，$\dfrac{ab}{a^2+b^2}=\dfrac{cd}{c^2+d^2}$

例題 5　不等式の証明

9　次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$a^2-6ab+10b^2 \geqq 0$

(2)　$a>0$，$b>0$ のとき，$\sqrt{2(a+b)} \geqq \sqrt{a}+\sqrt{b}$

解法のポイント　(1)　$A^2+B^2 \geqq 0$，また，$A^2+B^2=0 \Longleftrightarrow A=0,\ B=0$

(2)　$A>0$，$B>0$ のとき，$A \geqq B \Longleftrightarrow A^2 \geqq B^2$

10 類題　次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$a^2+3ab+3b^2 \geqq 0$

(2)　$a>0$，$b>0$ のとき，$\sqrt{a}+3\sqrt{b}>\sqrt{a+9b}$

例題 6　相加平均・相乗平均の利用

11　$a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{4b} \geqq 1$

(2)　$(2a+b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geqq 9$

解法のポイント　$A>0$，$B>0$ のとき，$\dfrac{A+B}{2} \geqq \sqrt{AB}$，等号は $A=B$ のとき成り立つ。

12 類題　$a>0$，$b>0$ のとき，不等式 $\left(a+\dfrac{2}{b}\right)\left(b+\dfrac{2}{a}\right) \geqq 8$ が成り立つことを証明せよ。

演　習

13 ある多項式を x^2-x-5 で割ると，商が $2x-1$，余りが $4x+3$ である。この多項式を求めよ。

14 次の計算をせよ。

$$\frac{a^2}{(a-b)(c-a)}+\frac{b^2}{(b-c)(a-b)}+\frac{c^2}{(c-a)(b-c)}$$

15 次の式を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{1-\dfrac{1}{a}}{a-\dfrac{1}{a}}$　　(2) $\dfrac{x+1-\dfrac{2}{x+2}}{x-1+\dfrac{2}{x+2}}$

16 次の等式が x についての恒等式であるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

$$x^2=a(x-1)(x-2)+b(x-1)+c$$

17 $(1-2k)x+(2-k)y-4-k=0$ が，k のどのような値に対しても成り立つように，x，y の値を定めよ。

18 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$(b+c)(c+a)(a+b)=0$$

19 次の不等式を証明せよ。

(1) $a^2+b^2+c^2+3\geqq 2(a+b+c)$　　(2) $a>0$，$b>0$ のとき，$\sqrt{ab}\geqq\dfrac{2ab}{a+b}$

20 **発展** $x>0$ とする。$(x^2+1)^3$ と $(x^3+1)^2$ の大小を比較せよ。

ヒント まず適当な数を代入してみて見当をつけて，差の式の変形をする。

第 8 講座　平面上のベクトル

パターンの修得

例題 1　ベクトルと図形

1　△ABC の辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ D，E，F とし，重心を G とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{ED}}$　　(3)　$\overrightarrow{\mathrm{CF}}$　　(4)　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$　　(5)　$\overrightarrow{\mathrm{BG}}$

解法のポイント　AG : GD＝2 : 1 である。

2　**類題**　正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

例題 2　ベクトルの成分と大きさ

3　$\vec{a}=(2,\ -1)$，$\vec{b}=(-2,\ -3)$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\vec{c}=(14,\ 9)$ を $k\vec{a}+l\vec{b}$ の形に表せ。

(2)　$\vec{d}=\vec{a}+t\vec{b}$ (t は実数) とするとき，$|\vec{d}|$ の最小値と，そのときの t の値を求めよ。

解法のポイント　(2)　まず，$|\vec{d}|^2$ の最小値を考える。

4　**類題**　$\vec{a}=(-3,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ 1)$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\vec{c}=(-5,\ 8)$ を $k\vec{a}+l\vec{b}$ の形に表せ。

(2)　$\vec{d}=\vec{a}+t\vec{b}$ (t は実数) とするとき，$|\vec{d}|$ の最小値と，そのときの t の値を求めよ。

例題 3　ベクトルの内積

5　$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=4$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角の余弦を求めよ。

(2)　$\vec{a}+t\vec{b}$ が $\vec{a}-\vec{b}$ と直交するように t の値を定めよ。

解法のポイント　(2)　$\vec{a}+t\vec{b}\perp\vec{a}-\vec{b} \Longleftrightarrow (\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$

6　**類題**　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$ のとき，$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+t\vec{b}$ が垂直になるように，実数 t の値を定めよ。

例題 4　位置ベクトル

7　△ABC で，辺 AB を 2：1，辺 AC を 5：2 に内分する点を，それぞれ D，E とし，線分 BE と線分 CD の交点を P とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ として，$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

解法のポイント　点 P は線分 BE を $l:(1-l)$，線分 CD を $k:(1-k)$ に内分する点と考え，点 P の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて 2 通りに表す。

8　**類題**　平行四辺形 ABCD において，辺 AB の中点を E，EC と BD の交点を I とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ とおくとき，$\overrightarrow{IC}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

例題 5　ベクトルと領域

9　△OAB で，OA＝3，OB＝2，∠AOB＝60° とする。
$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}$ $(0\leqq t\leqq 1)$ のとき，点 P の動く範囲の長さを求めよ。

解法のポイント　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{BA}$ と変形できる。

10　**類題**　O を原点として，$\overrightarrow{OA}=(2,\ 0)$，$\overrightarrow{OB}=(1,\ 2)$ とする。実数 s，t が次の条件を満たしながら変化するとき，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ の終点 P の存在範囲を図示せよ。

(1)　$s+t=2$

(2)　$s+t=2$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

(3)　$1\leqq s+t\leqq 3$，$s\geqq 0$

例題 6　内積の図形への応用

11　△ABC と点 D が次の等式を満たすとき，△ABC はどんな形の三角形か。

$$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$$

解法のポイント　$\overrightarrow{DC}\cdot(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC})+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ と変形できる。$\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CB}$

12　**類題**　△ABC と点 D が次の等式を満たすとき，△ABC はどんな形の三角形か。

$$(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}-2\overrightarrow{DA})=0$$

演　習

13　平行四辺形 ABCD において，辺 BC，CD の中点を，それぞれ E，F とする。$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

14　2 つのベクトル $2\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{a}+3\vec{b}$ の大きさが等しく，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の大きさも等しいという。このとき，2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を求めよ。

15　$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$，$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の大きさをそれぞれ求めよ。

(2)　$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角の大きさを求めよ。

16　平面上の 3 つのベクトル $\vec{u}=(4,\ 2)$，$\vec{v}=(1,\ 1)$，$\vec{w}=(1,\ -1)$ に対し，$\vec{x}+\vec{w}$ が $\vec{u}-\vec{v}$ に平行で，かつ $|\vec{x}-\vec{w}|=\sqrt{10}$ であるようなベクトル $\vec{x}$ を求めよ。

17　平行四辺形 ABCD において，辺 AB を 2：1 に内分する点を P，対角線 BD を 1：3 に内分する点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　3 点 P，Q，C は同一直線上にあることを示せ。

(2)　PQ：QC を求めよ。

18　△ABC と点 P に対して，$6\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 P はどのような位置にあるか。

(2)　△PBC：△PCA：△PAB を求めよ。

19　**発展**　△ABC で ∠A＝60°，AB＝3，AC＝2 とする。辺 BC の中点を M，∠A の二等分線と辺 BC との交点を N とし，B から AN の延長に下した垂線と AM の延長との交点を P とする。このとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}$ で表せ。

ヒント　AN は ∠A の二等分線だから，AB：AC＝BN：CN

第10講座　数列

パターンの修得

例題 1　等差数列

1　第 3 項が 9，第 10 項が 23 である等差数列がある。次の問いに答えよ。

(1)　第 15 項を求めよ。　　(2)　初項から第 10 項までの和を求めよ。

解法のポイント　初項 a，公差 d の等差数列の一般項は，$a_n=a+(n-1)d$
初項 a，公差 d，項数 n，末項 l の等差数列の和 S は

$$S=\frac{1}{2}n(a+l)=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$$

2　**類題**　第 4 項が 0，第 9 項が -30 である等差数列がある。次の問いに答えよ。

(1)　第 6 項を求めよ。　　(2)　初項から第 12 項までの和を求めよ。

例題 2　等比数列

3　初項が 5，公比が 2 である等比数列がある。次の問いに答えよ。

(1)　第 5 項を求めよ。　　(2)　第 6 項までの和を求めよ。

解法のポイント　初項 a，公比 r の等比数列の一般項は，$a_n=ar^{n-1}$
初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

$r\neq1$ のとき　$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$，　$r=1$ のとき，$S_n=na$

4　**類題**　等比数列 4，2，1，$\dfrac{1}{2}$，……　がある。次の問いに答えよ。

(1)　第 8 項を求めよ。　　(2)　初項から第 n 項までの和を求めよ。

例題 3　Σの計算

5　次の和を求めよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$　　(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k^2+1)$

解法のポイント　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$，　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

6 **類題** 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+3)$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k^3-3k)$　　(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}5^{k-1}$

例題 4　階差数列

7 数列 1, 3, 7, 13, 21, 31, ……　の一般項を求めよ。

解法のポイント 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}b_k$　$(n\geqq 2)$

8 **類題** 次の数列の一般項を求めよ。

(1) 3, 5, 11, 21, 35, 53, ……　　(2) 1, 2, 5, 14, 41, 122, ……

例題 5　いろいろな数列の和

9 次の和を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{4\cdot 6}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n(n+2)}$

(2) $1+3x+5x^2+7x^3+\cdots\cdots+(2n-1)x^{n-1}$

解法のポイント (1) $\dfrac{1}{k(k+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)$ を利用する。

(2) (等差数列)×(等比数列) の形の数列の和 S は，等比部分の公比が x のとき，$S-xS$ により求める。$x\neq 1$，$x=1$ の場合分けをする。

10 **類題** 次の和を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\dfrac{1}{10\cdot 13}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

(2) $2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\cdots\cdots+(n+1)\cdot 2^n$

例題 6　漸化式

11 次の式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=2$，$a_{n+1}=3a_n-2$　$(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$

解法のポイント $a_{n+1}-1=3(a_n-1)$　または　$a_{n+1}-a_n=3(a_n-a_{n-1})$ の形にする。

12 **類題** 次の式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=1$，$a_{n+1}=4a_n+1$　$(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$

◇演　習◇

13 ある等差数列の初項から第 5 項までの和は 20 で，第 6 項から第 10 項までの和が 30 である。第 11 項から第 15 項までの和を求めよ。

14 第 2 項が 9，第 4 項が 81 である等比数列の第 7 項までの和を求めよ。

15 初項 2，公比 r である等比数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

16 初項から第 n 項までの和 S_n が次の式で表される数列の一般項 a_n を求めよ。

(1)　n^2-n+1　　(2)　n^2+2^n-1

17 偶数の列を次のように群に分ける。

$$2 \mid 4,\ 6 \mid 8,\ 10,\ 12 \mid 14,\ 16,\ 18,\ 20 \mid 22,\ \cdots\cdots$$

(1)　第 n 群の最後の数を求めよ。　　(2)　第 n 群の数の和を求めよ。

(3)　200 は第何群の何番目の数か。

18 次の式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=2,\ a_{n+1}-3a_n=0$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(2)　$a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+2n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(3)　$a_1=4,\ a_{n+1}=a_n+3n^2$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

19 **発展**　$a_1=1,\ a_n=\dfrac{4-a_{n-1}}{3-a_{n-1}}$ $(n=2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1)　$a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ を求め，その結果から一般項 a_n を推定せよ。

(2)　(1)の推定が正しいことを数学的帰納法によって証明せよ。

ヒント　(2)　数学的帰納法による証明は，次の[1]，[2]を示す。

[1]　$n=1$ のとき，命題 P が成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，命題 P が成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときも命題 P が成り立つ。

解　答　《select Ⅰ 数学Ⅱ・B・Cのまとめ》

第1講座　式と証明

【p.2】

1　(1)

$$
\begin{array}{r}
2x+1 \\
x^2-3x+1\,\big)\,\overline{2x^3-5x^2+2x+3} \\
\underline{2x^3-6x^2+2x} \\
x^2+3 \\
\underline{x^2-3x+1} \\
3x+2
\end{array}
$$

商　$\boldsymbol{2x+1}$，余り　$\boldsymbol{3x+2}$

(2)

$$
\begin{array}{r}
3x^2+4x+8 \\
x-2\,\big)\,\overline{3x^3-2x^2+1} \\
\underline{3x^3-6x^2} \\
4x^2 \\
\underline{4x^2-8x} \\
8x+1 \\
\underline{8x-16} \\
17
\end{array}
$$

商　$\boldsymbol{3x^2+4x+8}$，余り　17

2　(1)

$$
\begin{array}{r}
3x^2-6x+6 \\
x+2\,\big)\,\overline{3x^3-6x+11} \\
\underline{3x^3+6x^2} \\
-6x^2-6x \\
\underline{-6x^2-12x} \\
6x+11 \\
\underline{6x+12} \\
-1
\end{array}
$$

商　$\boldsymbol{3x^2-6x+6}$，余り　$\boldsymbol{-1}$

(2)

$$
\begin{array}{r}
x-1 \\
2x^2-x+1\,\big)\,\overline{2x^3-3x^2+3} \\
\underline{2x^3-x^2+x} \\
-2x^2-x+3 \\
\underline{-2x^2+x-1} \\
-2x+4
\end{array}
$$

商　$\boldsymbol{x-1}$，余り　$\boldsymbol{-2x+4}$

3　(1)　$\dfrac{x^2-x}{x^2+x-6}\times\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+2x}$

$=\dfrac{x(x-1)}{(x+3)(x-2)}\times\dfrac{(x+2)(x+3)}{x(x+2)}=\boldsymbol{\dfrac{x-1}{x-2}}$

(2)　$\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}-\dfrac{x-5}{x^2-5x+6}$

$=\dfrac{(2x-1)(x-3)-(x-5)(x-1)}{(x-2)(x-1)(x-3)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{x+1}{(x-1)(x-3)}}$

4　(1)　$\dfrac{x^2}{x^2-9}\div\dfrac{x}{2x^2-5x-3}$

$=\dfrac{x^2}{(x+3)(x-3)}\times\dfrac{(2x+1)(x-3)}{x}$

$=\boldsymbol{\dfrac{x(2x+1)}{x+3}}$

(2)　$\dfrac{x+4}{x^2-x-2}-\dfrac{x+3}{x^2-1}$

$=\dfrac{(x+4)(x-1)-(x+3)(x-2)}{(x+1)(x-2)(x-1)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{2}{(x-2)(x-1)}}$

5　両辺に $(2x-1)(x+4)$ を掛けると

$x+13=a(x+4)+b(2x-1)$ より

$x+13=(a+2b)x+4a-b$

これも x についての恒等式であるから

$a+2b=1$，$4a-b=13$ より，$\boldsymbol{a=3}$，$\boldsymbol{b=-1}$

6　両辺に $(x+2)(x+5)$ を掛けると

$2x-5=a(x+2)+b(x+5)$ より，

$2x-5=(a+b)x+2a+5b$

これも x についての恒等式であるから

$a+b=2$，$2a+5b=-5$ より，$\boldsymbol{a=5}$，$\boldsymbol{b=-3}$

【p.3】

7　(1)　$a+b=-c$，$b+c=-a$，$c+a=-b$

左辺$=ab(a-b)\cdot(-c)+bc(b-c)\cdot(-a)$

$\quad+ca(c-a)\cdot(-b)$

$\quad=-a^2bc+ab^2c-ab^2c+abc^2$

$\quad-abc^2+a^2bc=0=$右辺

(2)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと，$a=bk$，$c=dk$

$\dfrac{2a+3c}{2b+3d}=\dfrac{2bk+3dk}{2b+3d}=\dfrac{k(2b+3d)}{2b+3d}=k$

$\dfrac{a-c}{b-d}=\dfrac{bk-dk}{b-d}=\dfrac{k(b-d)}{b-d}=k$

よって，$\dfrac{2a+3c}{2b+3d}=\dfrac{a-c}{b-d}$

8　(1)　$(ab+b^2)-(ca+c^2)$

$=(b-c)a+(b+c)(b-c)$

$=(a+b+c)(b-c)=0$

よって，$ab+b^2=ca+c^2$

(2)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと，$a=bk$，$c=dk$

$\dfrac{ab}{a^2+b^2}=\dfrac{bk\cdot b}{(bk)^2+b^2}=\dfrac{b^2k}{b^2(k^2+1)}=\dfrac{k}{k^2+1}$

$\dfrac{cd}{c^2+d^2}=\dfrac{dk\cdot d}{d^2k^2+d^2}=\dfrac{d^2k}{d^2(k^2+1)}=\dfrac{k}{k^2+1}$

よって，$\dfrac{ab}{a^2+b^2}=\dfrac{cd}{c^2+d^2}$

9　(1)　$a^2-6ab+10b^2=(a-3b)^2+b^2$

ここで，$(a-3b)^2\geqq 0$，$b^2\geqq 0$ であるから，

$(a-3b)^2+b^2\geqq 0$ より，$a^2-6ab+10b^2\geqq 0$

等号が成り立つのは，$a-3b=0$ かつ $b=0$

すなわち，$a=b=0$ のとき

(2) $(\sqrt{2(a+b)})^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$=2(a+b)-(a+2\sqrt{ab}+b)$

$=a+b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqq 0$

よって，$(\sqrt{2(a+b)})^2\geqq(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$\sqrt{2(a+b)}>0$，$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$ より，

$\sqrt{2(a+b)}\geqq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

等号が成り立つのは，$a=b$ のとき

10 (1) $a^2+3ab+3b^2=\left(a+\dfrac{3}{2}b\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2$

ここで，$\left(a+\dfrac{3}{2}b\right)^2\geqq 0$，$\dfrac{3}{4}b^2\geqq 0$ であるから，

$\left(a+\dfrac{3}{2}b\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2\geqq 0$ より，$a^2+3ab+3b^2\geqq 0$

等号が成り立つのは，$a+\dfrac{3}{2}b=0$ かつ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}b=0$

すなわち，$a=b=0$ のとき

(2) $(\sqrt{a}+3\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+9b})^2$

$=a+6\sqrt{ab}+9b-(a+9b)$

$=6\sqrt{ab}\geqq 0$

よって，$(\sqrt{a}+3\sqrt{b})^2\geqq(\sqrt{a+9b})^2$

$\sqrt{a}+3\sqrt{b}>0$，$\sqrt{a+9b}>0$ より

$\sqrt{a}+3\sqrt{b}\geqq\sqrt{a+9b}$

等号が成り立つのは，$ab=0$ のとき

11 (1) $\dfrac{b}{a}>0$，$\dfrac{a}{4b}>0$ より，

$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{4b}\geqq 2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{4b}}=1$

よって，$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{4b}\geqq 1$

等号が成り立つのは，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{4b}$，$a>0$，

$b>0$ より，$a=2b$ のとき

(2) $\dfrac{a}{b}>0$，$\dfrac{b}{a}>0$ より，

$(2a+b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=4+2\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)+1$

$\geqq 5+4\sqrt{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{a}}=9$

よって，$(2a+b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqq 9$

等号が成り立つのは，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a}$，$a>0$，$b>0$

より，$a=b$ のとき

12 $ab>0$ より，

$\left(a+\dfrac{2}{b}\right)\left(b+\dfrac{2}{a}\right)=4+ab+\dfrac{4}{ab}$

$\geqq 4+2\sqrt{ab\cdot\dfrac{4}{ab}}=8$

よって，$\left(a+\dfrac{2}{b}\right)\left(b+\dfrac{2}{a}\right)\geqq 8$

等号が成り立つのは，$ab=\dfrac{4}{ab}$，$ab>0$ より，

$ab=2$ のとき

[p.4]

13 $(x^2-x-5)(2x-1)+4x+3$

$=\boldsymbol{2x^3-3x^2-5x+8}$

14 与式$=\dfrac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\dfrac{(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\dfrac{(b-c)(a-b)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\boldsymbol{-1}$

15 (1) $\dfrac{1-\dfrac{1}{a}}{a-\dfrac{1}{a}}=\dfrac{\dfrac{a-1}{a}}{\dfrac{a^2-1}{a}}=\dfrac{a-1}{(a+1)(a-1)}=\boldsymbol{\dfrac{1}{a+1}}$

(2) $\dfrac{x+1-\dfrac{2}{x+2}}{x-1+\dfrac{2}{x+2}}=\dfrac{\dfrac{(x+1)(x+2)-2}{x+2}}{\dfrac{(x-1)(x+2)+2}{x+2}}$

$=\dfrac{x(x+3)}{x(x+1)}=\boldsymbol{\dfrac{x+3}{x+1}}$

16 $x^2=ax^2+(-3a+b)x+2a-b+c$ より，

係数を比較すると，

$a=1$，$-3a+b=0$，$2a-b+c=0$

これを解いて，$\boldsymbol{a=1}$，$\boldsymbol{b=3}$，$\boldsymbol{c=1}$

別解 $x^2=a(x-1)(x-2)+b(x-1)+c$ ……①

①に $x=0$ を代入して，$0=2a-b+c$

①に $x=1$ を代入して，$1=c$

①に $x=2$ を代入して，$4=b+c$

これを解いて，$a=1$，$b=3$，$c=1$

逆に，この値を代入すると①の右辺は，

$(x-1)(x-2)+3(x-1)+1=x^2$ より

左辺に等しいから，①は恒等式である。

よって，$\boldsymbol{a=1}$，$\boldsymbol{b=3}$，$\boldsymbol{c=1}$

17 k について整理すると，

$(-2x-y-1)k+x+2y-4=0$

k についての恒等式であるから，

$-2x-y-1=0$，$x+2y-4=0$

これを解いて，$\boldsymbol{x=-2}$，$\boldsymbol{y=3}$

18 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$ の両辺に

$abc(a+b+c)$ を掛けると，

$(a+b+c)(bc+ca+ab)=abc$ より，

$(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc(b+c)=0$

$(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)=0$

$(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}=0$

よって，$(b+c)(c+a)(a+b)=0$

19 (1) $a^2+b^2+c^2+3-2(a+b+c)$

$=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\geqq 0$

よって，$a^2+b^2+c^2+3\geqq 2(a+b+c)$

等号が成り立つのは，$a=b=c=1$ のとき

(2) $a>0$，$b>0$ より，$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$

よって，$\dfrac{1}{2\sqrt{ab}}\geqq\dfrac{1}{a+b}$ より

$\dfrac{2ab}{2\sqrt{ab}}\geqq\dfrac{2ab}{a+b}$ であるから，$\sqrt{ab}\geqq\dfrac{2ab}{a+b}$

20 $(x^2+1)^3-(x^3+1)^2$

$=(x^6+3x^4+3x^2+1)-(x^6+2x^3+1)$

$=3x^4-2x^3+3x^2=(x^2-x)^2+2x^4+2x^2>0$

よって，$\boldsymbol{(x^2+1)^3>(x^3+1)^2}$

2接線は $y=2\alpha x-\alpha^2$, $y=2\beta x-\beta^2$
交点Rを $(x,\ y)$ とすれば,

$y=\alpha\beta$, $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ ……②

①, ②より α, β を消去して, $\boldsymbol{y=x^2-\dfrac{9}{4}}$

26 $y=m(x-1)+3$ と $y=x^2$ との交点の x 座標を α, $\beta\,(\alpha<\beta)$ とすると,
$\alpha+\beta=m$, $\alpha\beta=m-3$

よって, $S=\displaystyle\int_\alpha^\beta(mx+3-m-x^2)dx=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$

$=\dfrac{1}{6}\{m^2-4(m-3)\}^{\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{6}\{(m-2)^2+8\}^{\frac{3}{2}}$

ゆえに, $m=2$ のとき最小だから, $\boldsymbol{y=2x+1}$

27 $f(t)=-\displaystyle\int_0^t(x-t)dx+\int_t^1(x-t)dx$

$=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$ $(0\leqq t\leqq 1)$

よって, **$t=0$, 1のとき, 最大値 $\dfrac{1}{2}$**

$t=\dfrac{1}{2}$ のとき, 最小値 $\dfrac{1}{4}$

28 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ とおくと,
$f'(x)=2ax+b$
$f(f'(x))=f(2ax+b)$
$=4a^3x^2+2ab(2a+1)x+(ab^2+b^2+c)$
$f'(f(x))=2a^2x^2+2abx+2ac+b$
よって, $4a^3=2a^2$ ……③ $2ab(2a+1)=2ab$ …④
$ab^2+b^2+c=2ac+b$ ……⑤

③で $a\neq 0$ より, $a=\dfrac{1}{2}$ ④から, $b=0$

これは⑤を満たすから, $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+c$

②より, $\displaystyle\int_0^1 2\left(\frac{1}{2}x^2+c\right)dx=\frac{1}{3}+2c=1$

$c=\dfrac{1}{3}$ よって, $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}}$

第8講座 平面上のベクトル

【p.24】

1 (1) $\vec{b}-\vec{a}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{ED}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\dfrac{\vec{b}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{\vec{a}}{2}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\boldsymbol{\dfrac{\vec{a}}{2}-\vec{b}}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{3}}$

(5) $\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{3}-\vec{a}$

$=\boldsymbol{-\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}}$

2 Oを対角線の交点とする。
$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\boldsymbol{\vec{b}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\boldsymbol{-\vec{a}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}}$
$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=-\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\boldsymbol{-\vec{a}-\vec{b}}$
$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boldsymbol{\vec{b}-\vec{a}}$
$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{a}=\boldsymbol{2\vec{a}+\vec{b}}$
(または $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}+\overrightarrow{\mathrm{FC}}=\vec{b}+2\vec{a}$)
$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}=\boldsymbol{\vec{a}+2\vec{b}}$
$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=2\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\boldsymbol{2\vec{a}+2\vec{b}}$

3 (1) $(14,\ 9)=k(2,\ -1)+l(-2,\ -3)$
$=(2k-2l,\ -k-3l)$
よって, $2k-2l=14$, $-k-3l=9$
これを解いて $k=3$, $l=-4$
ゆえに, $\boldsymbol{\vec{c}=3\vec{a}-4\vec{b}}$

(2) $\vec{d}=(2,\ -1)+t(-2,\ -3)$
$=(2-2t,\ -1-3t)$
$|\vec{d}|^2=(2-2t)^2+(-1-3t)^2$

$=13t^2-2t+5=13\left(t-\dfrac{1}{13}\right)^2+\dfrac{64}{13}$

よって, $|\vec{d}|$ は **$t=\dfrac{1}{13}$ のとき最小値 $\dfrac{8\sqrt{13}}{13}$** をとる。

4 (1) $(-5,\ 8)=k(-3,\ 2)+l(2,\ 1)$
$=(-3k+2l,\ 2k+l)$
よって, $-3k+2l=-5$, $2k+l=8$
これを解いて $k=3$, $l=2$
ゆえに, $\boldsymbol{\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}}$

(2) $|\vec{d}|^2=5t^2-8t+13=5\left(t-\dfrac{4}{5}\right)^2+\dfrac{49}{5}$

よって, $|\vec{d}|$ は **$t=\dfrac{4}{5}$ のとき最小値 $\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$** をとる。

5 (1) $|\vec{a}-2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=16$

$3^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\cdot 2^2=16$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{9}{4}$

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\boldsymbol{\dfrac{3}{8}}$

(2) $(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$
$=|\vec{a}|^2+(t-1)\vec{a}\cdot\vec{b}-t|\vec{b}|^2=0$

$3^2+(t-1)\cdot\dfrac{9}{4}-4t=0$ よって, $\boldsymbol{t=\dfrac{27}{7}}$

6 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+t\vec{b})$
$=|\vec{a}|^2+(t+1)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$
$2^2-2(t+1)+t\cdot 2^2=0$ よって, $\boldsymbol{t=-1}$

【p.25】

7 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{2}{3}\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{5}{7}\vec{b}$

$\mathrm{BP}:\mathrm{PE}=l:(1-l)$ とすると,
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-l)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+l\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

$=(1-l)\vec{a}+\dfrac{5}{7}l\vec{b}$ ……①

また, $\mathrm{CP}:\mathrm{PD}=k:(1-k)$ とすると,
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{AC}}+k\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$=\dfrac{2}{3}k\vec{a}+(1-k)\vec{b}$ ……②

①, ②より, $1-l=\dfrac{2}{3}k$, $\dfrac{5}{7}l=1-k$

これを解いて, $k=\dfrac{6}{11}$, $l=\dfrac{7}{11}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boldsymbol{\dfrac{4}{11}\vec{a}+\dfrac{5}{11}\vec{b}}$

8　BI：ID$=l：(1-l)$ とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=(1-l)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+l\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$\quad=(1-l)\vec{a}+l\vec{b}$ ……①

CI：IE$=k：(1-k)$ とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=k\overrightarrow{\mathrm{AE}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\quad=k\cdot\dfrac{1}{2}\vec{a}+(1-k)(\vec{a}+\vec{b})$

$\quad=\left(1-\dfrac{1}{2}k\right)\vec{a}+(1-k)\vec{b}$ ……②

①，②より，$1-l=1-\dfrac{1}{2}k$，$l=1-k$

これを解いて，$k=\dfrac{2}{3}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{IC}}=k\overrightarrow{\mathrm{EC}}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}\right)=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}}$

9　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\quad=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

$0\leqq t\leqq 1$ より，P は線分 AB 上を動く。

$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos 60°$

$\quad=3^2+2^2-2\cdot 3\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2}=7$

よって，$\mathrm{AB}=\boldsymbol{\sqrt{7}}$

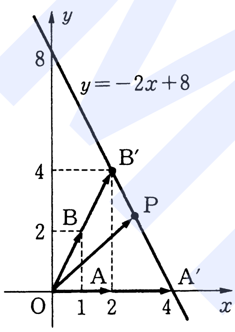
10　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，

$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおけば，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{s}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\dfrac{t}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$

$\dfrac{s}{2}+\dfrac{t}{2}=1$ より，点 P は直線 A′B′ 上を動く。

すなわち，右の図で直線 $y=-2x+8$ 上を動く。



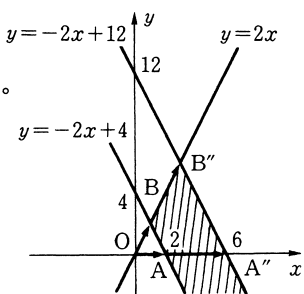
(2)　(1)の図で線分 A′B′ 上を動く。

(3)　右の図で，

$\overrightarrow{\mathrm{OA''}}=3\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，

$\overrightarrow{\mathrm{OB''}}=3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。

点 P は斜線部分を動く。ただし，境界線を含む。



別解　P$(x,\ y)$ とする。

$(x,\ y)=s(2,\ 0)+t(1,\ 2)$ より，

$x=2s+t$，$y=2t$

これを s，t について解くと，

$s=\dfrac{2x-y}{4}$，$t=\dfrac{y}{2}$

(1)　$\dfrac{2x-y}{4}+\dfrac{y}{2}=2$

整理して，$y=-2x+8$

すなわち，直線 $y=-2x+8$ 上を動く。

(2)　(1)で，$\dfrac{2x-y}{4}\geqq 0$，$\dfrac{y}{2}\geqq 0$ だから，

$y\geqq 0$，$x\geqq 0$，$y=-2x+8$

よって，線分 $y=-2x+8\ (0\leqq x\leqq 4)$ 上を動く。

(3)　$1\leqq\dfrac{2x-y}{4}+\dfrac{y}{2}\leqq 3$，$\dfrac{2x-y}{4}\geqq 0$

よって，$-2x+4\leqq y\leqq -2x+12$，$y\leqq 2x$ を満たす領域を動く。

11　$\overrightarrow{\mathrm{DC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{DB}}-\overrightarrow{\mathrm{DC}})+\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{DC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{DC}}-\overrightarrow{\mathrm{DA}})=0$　　よって，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

CB⊥AC より，**∠C=90° の直角三角形**

12　$\overrightarrow{\mathrm{DB}}-\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{DB}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}-2\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\overrightarrow{\mathrm{DB}}-\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}-\overrightarrow{\mathrm{DA}}$

$\quad=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

よって，与式は $\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})=0$

$(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})=0$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=0$　　よって，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$

ゆえに，**AB=AC の二等辺三角形**

[p.26]

13　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{a}$，$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$ より

$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{4}{3}\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}}$，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AD}}=-\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{4}{3}\vec{b}}$

14　$|2\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}+3\vec{b}|$ より，

$|2\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}+3\vec{b}|^2$

$4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2$

また，$|\vec{a}|=|\vec{b}|$ より，

$5|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}=10|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}$

$5|\vec{a}|^2+10\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}|\vec{a}|^2$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-\dfrac{1}{2}|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2}=-\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq 180°$ より，$\boldsymbol{\theta=120°}$

15　(1)　$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$ ……①

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ ……②

②より，$|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ ……③

③に①を代入して，$|\vec{a}|^2=2$

よって，$|\boldsymbol{\vec{a}}|=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

同様に考えて，$|\boldsymbol{\vec{b}}|=\boldsymbol{\sqrt{2}}$，$|\boldsymbol{\vec{c}}|=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

(2)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると，

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq 180°$ より，$\boldsymbol{\theta=120°}$

16　$\vec{x}=(a,\ b)$ とおくと，

$\vec{x}+\vec{w}=(a+1,\ b-1)$

また，$\vec{u}-\vec{v}=(3,\ 1)$

$\vec{x}+\vec{w}\parallel\vec{u}-\vec{v}$ より，$\vec{x}+\vec{w}=k(\vec{u}-\vec{v})$

とおくと，$(a+1,\ b-1)=k(3,\ 1)$

$a=3k-1$，$b=k+1$

よって，$\vec{x}-\vec{w}=(3k-2,\ k+2)$

$|\vec{x}-\vec{w}|^2=(3k-2)^2+(k+2)^2=(\sqrt{10})^2$ より，

$(5k+1)(k-1)=0$　　よって，$k=-\frac{1}{5}$，1

$k=-\frac{1}{5}$ のとき，$\boldsymbol{\vec{x}=\left(-\frac{8}{5},\ \frac{4}{5}\right)}$

$k=1$ のとき，$\boldsymbol{\vec{x}=(2,\ 2)}$

17　(1)　$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{3}\vec{a}$

$\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b})$

$\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{BQ}-\overrightarrow{BC}=\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}=\frac{1}{4}(\vec{a}-3\vec{b})$

$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{12}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}=\frac{1}{12}(\vec{a}-3\vec{b})$

よって，$\overrightarrow{CQ}=3\overrightarrow{QP}$ ……①

ゆえに，P，Q，C は同一直線上にある。

(2)　①より　CQ : QP$=3:1$

よって，PQ : QC$=$**1 : 3**

18　(1)　$6\overrightarrow{AP}+3(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})+2(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

より，$\overrightarrow{AP}=\frac{3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{11}=\frac{5}{11}\cdot\frac{3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{5}$

よって，BC を 2 : 3 に内分する点を D とすると，P は AD を 5 : 6 に内分する点である。

(2)　$\triangle PBC=(2+3)\cdot 6S=30S$ とおくと，

$\triangle PBD=12S$，$\triangle PDC=18S$

$\triangle PCA=\frac{5}{6}\triangle PDC=15S$

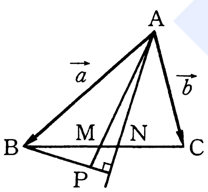
$\triangle PAB=\frac{5}{6}\triangle PBD=10S$

よって，

$\triangle PBC:\triangle PCA:\triangle PAB=30S:15S:10S$

$=\boldsymbol{6:3:2}$

19　M は BC の中点だから，



$\overrightarrow{AM}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

P は直線 AM 上にあるから，

$\overrightarrow{AP}=2k\overrightarrow{AM}=k(\vec{a}+\vec{b})$

よって，$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}$

$=(k-1)\vec{a}+k\vec{b}$

AN は ∠A の二等分線だから，

$\overrightarrow{AN}=\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{3+2}=\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}$

$\overrightarrow{BP}\perp\overrightarrow{AN}$ より，

$\{(k-1)\vec{a}+k\vec{b}\}\cdot\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}=0$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60°=2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}=3$ より，

$18(k-1)+3(5k-3)+12k=0$

よって，$k=\frac{3}{5}$　　ゆえに，$\boldsymbol{\overrightarrow{AP}=\frac{3}{5}(\vec{a}+\vec{b})}$

第 9 講座　空間のベクトル

[p.27]

1　(1)　$\sqrt{14}$，中点 $\left(1,\ \frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

(2)　$\sqrt{17}$，中点 $\left(2,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$

2　(1)　内分点 $\left(-\frac{7}{2},\ \frac{9}{4},\ \frac{11}{4}\right)$

外分点 $\left(-8,\ \frac{15}{2},\ \frac{7}{2}\right)$

(2)　内分点 $\left(-\frac{7}{5},\ -\frac{1}{5},\ \frac{12}{5}\right)$

外分点 $(13,\ -17,\ 0)$

3　(1)　$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$　　(2)　$\vec{b}+\vec{c}$

(3)　$-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$　　(4)　$-\vec{a}+\vec{b}$

(5)　$-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

4　$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とすると，

$\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{q}=\vec{a}+\vec{c}$，$\vec{r}=\vec{b}+\vec{c}$

よって，$\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}=2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

ゆえに，$\boldsymbol{\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\frac{1}{2}(\vec{p}+\vec{q}+\vec{r})}$

5　∠BAC は $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角で，これを θ とする。

$\overrightarrow{AB}=(4,\ 0,\ -4)$，$\overrightarrow{AC}=(0,\ -2,\ -2)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=8$，$|\overrightarrow{AB}|=4\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{2}$ より，

$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2}$　　よって，$\boldsymbol{\theta=60°}$

[p.28]

6　$\overrightarrow{AB}=(4,\ 0,\ -4)$，$\overrightarrow{AC}=(0,\ -2,\ -2)$

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角を θ とすると，

$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{8}{4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$，$\theta=60°$

よって，$\triangle ABC=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin 60°=\boldsymbol{4\sqrt{3}}$

7　(1)　$2\vec{a}-\vec{b}=(5,\ 5,\ -4)$，$\vec{a}+3\vec{c}=(1,\ 3,\ 5)$

よって，$(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{c})$

$=5\cdot 1+5\cdot 3-4\cdot 5=0$

ゆえに，$(2\vec{a}-\vec{b})\perp(\vec{a}+3\vec{c})$

(2)　$\vec{a}+p\vec{b}-q\vec{c}$

$=(4+3p+q,\ -3-11p-2q,\ 2+8p-q)$

$k(\vec{a}+\vec{c})=(3k,\ -k,\ 3k)$

よって，$4+3p+q=3k$，$-3-11p-2q=-k$，

$2+8p-q=3k$

これを解いて，$\boldsymbol{p=0}$，$\boldsymbol{q=-1}$

8　(1)　$\vec{x}=(p,\ q,\ r)$ とおく。

$(\vec{x}-\vec{b})\perp\vec{a}$ より，$r=-p+2$ ……①

$(\vec{x}-\vec{c})\perp\vec{b}$ より，$q=2p-3$ ……②

また，$|\vec{x}+\vec{c}|=\sqrt{13}$ より，

$(p+1)^2+(q-1)^2+(r-2)^2=13$ ……③

①，②を③に代入して解くと，$p=\frac{1}{3}$，2

よって，$\boldsymbol{\vec{x}=\left(\frac{1}{3},\ -\frac{7}{3},\ \frac{5}{3}\right)}$，$\boldsymbol{(2,\ 1,\ 0)}$

(2)　$\vec{a}\parallel\vec{b}$ より，$\vec{a}=k\vec{b}$

よって，$x+2y=-8k$，$2=-4k$，

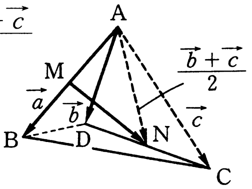
$2x-5=2ky$

これを解いて，$\boldsymbol{x=2}$，$\boldsymbol{y=1}$

9　$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\dfrac{3\vec{a}-2\vec{b}}{3-2}=3\vec{a}-2\vec{b}$ より，

$\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{CE}}+3\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{2+3}=\boldsymbol{\dfrac{6\vec{a}-4\vec{b}+3\vec{c}}{5}}$

10　$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$



$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{AN}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}$

$=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}}{2}$……①

ところで，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，

$\vec{c}-\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

よって，$\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}$……②

①，②より，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2\overrightarrow{\mathrm{MN}}$

11　(1)　$(x-3)^2+(y+1)^2+z^2=3$

(2)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(-1-1)^2+(2-4)^2+(5-1)^2}$

$=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

中心は，$\left(\dfrac{1-1}{2},\ \dfrac{4+2}{2},\ \dfrac{1+5}{2}\right)=(0,\ 3,\ 3)$

したがって，$\boldsymbol{x^2+(y-3)^2+(z-3)^2=6}$

12　(1)　$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=16$ より

中心 $(2,\ -1,\ 1)$，半径 4

(2)　$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=16$ に $z=0$ を代入して，$\boldsymbol{(x-2)^2+(y+1)^2=15}$，$\boldsymbol{z=0}$

【p.29】

13　点 Q の座標を $(x,\ y,\ z)$ とする。

点 A $(2,\ -1,\ 1)$ は線分 PQ の中点であるから，

$\dfrac{-1+x}{2}=2$，$\dfrac{3+y}{2}=-1$，$\dfrac{2+z}{2}=1$

これより，$x=5$，$y=-5$，$z=0$

よって，$\mathbf{Q\,(5,\ -5,\ 0)}$

また，R $(x',\ y',\ z')$ とすれば，

$x'=\dfrac{-2+5}{1+2}=1$，$y'=\dfrac{6-5}{1+2}=\dfrac{1}{3}$，$z'=\dfrac{4+0}{1+2}=\dfrac{4}{3}$

よって，$\mathbf{R}\boldsymbol{\left(1,\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)}$

14　D $(x,\ y,\ z)$ とする。

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ だから，

$(x-1,\ y-1,\ z-1)=(-3,\ -4,\ -1)$

$x-1=-3$，$y-1=-4$，$z-1=-1$

よって，$x=-2$，$y=-3$，$z=0$

ゆえに，$\mathbf{D\,(-2,\ -3,\ 0)}$

15　(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ より，$1\cdot k+k\cdot k+k\cdot 1=0$

$k^2+2k=0$，$k(k+2)=0$

$k\neq 0$ より，$\boldsymbol{k=-2}$

(2)　求めるベクトルを $\vec{c}=(x,\ y,\ z)$ とする。

$|\vec{c}|=3$ より，$x^2+y^2+z^2=9$

$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ より，$x-2y-2z=0$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ より，$-2x-2y+z=0$

これを解いて，

$x=\pm 2$，$y=\mp 1$，$z=\pm 2$（複号同順）

よって，$\boldsymbol{(2,\ -1,\ 2)}$，$\boldsymbol{(-2,\ 1,\ -2)}$

16　$\vec{p}=(10-2t,\ -4+t,\ 3+2t)$

$|\vec{p}|^2=(10-2t)^2+(-4+t)^2+(3+2t)^2$

$=9t^2-36t+125=9(t-2)^2+89$

よって，$|\vec{p}|$ は **$t=2$ のとき最小値 $\sqrt{89}$** をとる。

17　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とする。

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{c}-\vec{b}$　∴　$\overrightarrow{\mathrm{BL}}=\dfrac{\vec{c}-\vec{b}}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{KL}}=\overrightarrow{\mathrm{KB}}+\overrightarrow{\mathrm{BL}}=\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{\vec{c}-\vec{b}}{2}=\dfrac{\vec{c}}{2}$

同様にして　$\overrightarrow{\mathrm{NM}}=\dfrac{1}{2}\vec{d}+\dfrac{\vec{c}-\vec{d}}{2}=\dfrac{\vec{c}}{2}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{KL}}=\overrightarrow{\mathrm{NM}}$

ゆえに，四角形 KLMN は平行四辺形。

18　$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=k\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ とおける。

また，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}+2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=k\overrightarrow{\mathrm{AE}}+2k\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2k\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$

ここで，R は平面 EPQ 上の点だから，

$k+2k+2k=1$　これより，$k=\dfrac{1}{5}$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AG}}$

したがって，AR:RG=**1:4**

19　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たす実数 s，t が存在すればよい。

$(1,\ a,\ -1)=s(2,\ -2,\ 1)+t(a,\ -1,\ 2)$

よって，$1=2s+at$　……①

$a=-2s-t$　……②

$-1=s+2t$　……③

②，③を s，t について解くと，

$s=\dfrac{1-2a}{3}$，$t=\dfrac{a-2}{3}$

これらを①に代入して整理すると，

$a^2-6a-1=0$

これを解いて，$\boldsymbol{a=3\pm\sqrt{10}}$

第10講座　数　列

【p.30】

1　(1)　$a+2d=9$，$a+9d=23$ より，

$a=5$，$d=2$

よって，$a_{15}=5+(15-1)\times 2=\mathbf{33}$

(2)　求める和を S_{10} とすると，初項が 5，第10項が 23，項数が10であるから，

$S_{10}=\dfrac{1}{2}\times 10\times(5+23)=\mathbf{140}$

2　(1)　$a+3d=0$，$a+8d=-30$ より

$a=18$，$d=-6$

よって，$a_6=18+(6-1)\times(-6)=\mathbf{-12}$

(2)　求める和を S_{12} とすると，初項が18，項数が12であるから，

$S_{12}=\dfrac{1}{2}\times12\times\{2\times18+(12-1)\times(-6)\}=\mathbf{-180}$

3　(1)　$a_5=5\times2^4=\mathbf{80}$

(2)　$S_6=\dfrac{5\times(2^6-1)}{2-1}=\mathbf{315}$

4　(1)　初項 4，公比 $\dfrac{1}{2}$ であるから，

$a_8=4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^7=\boldsymbol{\dfrac{1}{32}}$

(2)　$S_n=\dfrac{4\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=8\boldsymbol{\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}}$

5　(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n=\boldsymbol{n^2+2n}$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k^2+1)=\sum_{k=1}^{n}k^3+\sum_{k=1}^{n}k$

$=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2+\dfrac{n(n+1)}{2}=\boldsymbol{\dfrac{n(n+1)(n^2+n+2)}{4}}$

【p.31】

6　(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+3)=\boldsymbol{\frac{n(2n^2-3n+13)}{6}}$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k^3-3k)=\boldsymbol{\frac{n(n+1)(n^2+n-3)}{2}}$

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}5^{k-1}=\frac{1\cdot(5^n-1)}{5-1}=\boldsymbol{\frac{1}{4}(5^n-1)}$

7　与えられた数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。$\{b_n\}$ は，2，4，6，8，10，……となり，

$b_n=2n$　よって，$n\geqq2$ のとき，

$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2k=1+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}$

$=n^2-n+1$

これは，$n=1$ のときも成り立つ。

したがって，$\boldsymbol{a_n=n^2-n+1}$

8　(1)　与えられた数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。$\{b_n\}$ は，2，6，10，14，18，……となり，$b_n=4n-2$　よって，$n\geqq2$ のとき，

$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(4k-2)$

$=3+4\cdot\dfrac{n(n-1)}{2}-2(n-1)$

$=2n^2-4n+5$

これは，$n=1$ のときも成り立つ。

したがって，$\boldsymbol{a_n=2n^2-4n+5}$

(2)　与えられた数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。$\{b_n\}$ は，1，3，9，27，81，……となり，

$b_n=3^{n-1}$　よって，$n\geqq2$ のとき，

$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}=1+\frac{3^{n-1}-1}{3-1}$

$=\dfrac{1}{2}(3^{n-1}+1)$

これは，$n=1$ のときも成り立つ。

したがって，$\boldsymbol{a_n=\dfrac{1}{2}(3^{n-1}+1)}$

9　(1)　$\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot4}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{4\cdot6}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n(n+2)}$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\right.$

$\left.\cdots\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

$=\boldsymbol{\dfrac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}}$

(2)　$S=1+3x+5x^2+7x^3+\cdots\cdots$

$\cdots\cdots+(2n-1)x^{n-1}$ ……①

$xS=x+3x^2+5x^3+7x^4+\cdots\cdots$

$\cdots\cdots+(2n-3)x^{n-1}+(2n-1)x^n$ ……②

①−②より

$(1-x)S=1+2x+2x^2+\cdots\cdots$

$\cdots\cdots+2x^{n-1}-(2n-1)x^n$

$x\fallingdotseq1$ のとき

$(1-x)S=1+\dfrac{2x(1-x^{n-1})}{1-x}-(2n-1)x^n$

$=\dfrac{1+x-(2n+1)x^n+(2n-1)x^{n+1}}{1-x}$

よって，$S=\boldsymbol{\dfrac{1+x-(2n+1)x^n+(2n-1)x^{n+1}}{(1-x)^2}}$

$x=1$ のとき

$S=1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=\boldsymbol{n^2}$

10　(1)　与式$=\dfrac{1}{3}\left\{\left(1-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}\right)+\cdots\cdots\right.$

$\left.\cdots\cdots+\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{3n+1}\right)=\boldsymbol{\dfrac{n}{3n+1}}$

(2)　$S=2\cdot2+3\cdot2^2+4\cdot2^3+\cdots\cdots+(n+1)2^n$

……①

$2S=2\cdot2^2+3\cdot2^3+4\cdot2^4+\cdots\cdots+(n+1)2^{n+1}$

……②

①−②より

$(1-2)S=4+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^n-(n+1)2^{n+1}$

$-S=4+\dfrac{4(2^{n-1}-1)}{2-1}-(n+1)2^{n+1}$

$=2^{n+1}-(n+1)2^{n+1}=-n\cdot2^{n+1}$

よって，$S=\boldsymbol{n\cdot2^{n+1}}$

11　$\alpha=3\alpha-2$ を解いて，$\alpha=1$

よって，$a_{n+1}=3a_n-2$ は，

$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$ と変形される。

数列 $\{a_n-1\}$ は，初項 $a_1-1=1$，公比 3 の等比数列であるから，$a_n-1=1\cdot3^{n-1}$

よって，$\boldsymbol{a_n=3^{n-1}+1}$

別解　$a_{n+2}=3a_{n+1}-2$ ……①

$a_{n+1}=3a_n-2$　……②

①−②より，$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$

$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと，$b_{n+1}=3b_n$

数列 $\{b_n\}$ は，初項 $b_1=a_2-a_1=4-2=2$，

公比 3 の等比数列であるから，$b_n=2\cdot3^{n-1}$

$n\geqq2$ のとき

$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+2\cdot\frac{3^{n-1}-1}{3-1}=3^{n-1}+1$

この式は $n=1$ のときも成り立つ。

よって，$\boldsymbol{a_n=3^{n-1}+1}$

12　$\alpha=4\alpha+1$ を解いて，$\alpha=-\dfrac{1}{3}$

よって，$a_{n+1}=4a_n+1$ は，

$a_{n+1}+\dfrac{1}{3}=4\left(a_n+\dfrac{1}{3}\right)$ と変形される。

数列 $\left\{a_n+\dfrac{1}{3}\right\}$ は，初項 $a_1+\dfrac{1}{3}=1+\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}$，

公比 4 の等比数列であるから，$a_n+\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}\cdot4^{n-1}$

よって，$\boldsymbol{a_n=\dfrac{1}{3}(4^n-1)}$

$\boxed{\text{別解}}$　$a_{n+2}=4a_{n+1}+1$ ……①

$a_{n+1}=4a_n+1$ ……②

①−②より，$a_{n+2}-a_{n+1}=4(a_{n+1}-a_n)$

$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと，$b_{n+1}=4b_n$

数列 $\{b_n\}$ は，初項 $b_1=a_2-a_1=5-1=4$，公比 4 の等比数列であるから，$b_n=4\cdot4^{n-1}=4^n$

$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+4\cdot\frac{4^{n-1}-1}{4-1}=\frac{1}{3}(4^n-1)$$

この式は $n=1$ のときも成り立つ。

よって，$\boldsymbol{a_n=\dfrac{1}{3}(4^n-1)}$

【p.32】

13　初項を a，公差を d とすると，

$\dfrac{5}{2}(2a+4d)=20$ より，$a+2d=4$ ……①

$\dfrac{10}{2}(2a+9d)=20+30$ より，$2a+9d=10$ ……②

①，②を解いて，$a=\dfrac{16}{5}$，$d=\dfrac{2}{5}$

初項から第15項までの和は，

$\dfrac{15}{2}\left(2\times\dfrac{16}{5}+14\times\dfrac{2}{5}\right)=90$

初項から第10項までの和は，$20+30=50$

よって，第11項から第15項までの和は，

$90-50=\boldsymbol{40}$

14　初項を a，公比を r とすると，

$ar=9$ ……①，$ar^3=81$ ……②

②÷①より，$r^2=9$　　よって，$r=\pm3$

$\boldsymbol{r=3}$ のとき，$a=3$

よって，求める和は，$\dfrac{3(3^7-1)}{3-1}=\boldsymbol{3279}$

$\boldsymbol{r=-3}$ のとき，$a=-3$

よって，求める和は，$\dfrac{(-3)\times\{1-(-3)^7\}}{1-(-3)}=\boldsymbol{-1641}$

15　$r\neq1$ のとき，$\dfrac{2(1-r^n)}{1-r}$

$r=1$ のとき，$2n$

16　$n\geqq2$ のとき，$a_n=S_n-S_{n-1}$ を利用する。

(1)　$n\geqq2$ のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2-n+1)-\{(n-1)^2-(n-1)+1\}$

$=2n-2$ ……①

$n=1$ のとき，$S_1=a_1=1^2-1+1=1$

①に $n=1$ を代入すると 0 より，①は a_1 を表さない。

よって，$\boldsymbol{a_1=1}$，**$\boldsymbol{n\geqq2}$ のとき $\boldsymbol{a_n=2n-2}$**

(2)　$n\geqq2$ のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2+2^n-1)-\{(n-1)^2+2^{n-1}-1\}$

$=2n+2^{n-1}-1$ ……①

$n=1$ のとき，$S_1=a_1=1^2+2-1=2$

①に $n=1$ を代入したものに等しい。

よって，一般項は，$\boldsymbol{a_n=2n+2^{n-1}-1}$

17　(1)　第 1 群から第 n 群までに含まれる項数は

$1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

第 n 群の最後の数は，$2\times\dfrac{n(n+1)}{2}=\boldsymbol{n(n+1)}$

(2)　第 n 群の初項は，

$2\times\left\{\dfrac{n(n-1)}{2}+1\right\}=n^2-n+2$

第 n 群に含まれる項数は n 個であるから

(1)から，求める和は，

$\dfrac{n}{2}\{(n^2-n+2)+n(n+1)\}=\boldsymbol{n(n^2+1)}$

(3)　200が第 n 群の数であるとき

$n(n-1)+2\leqq200\leqq n(n+1)$

これを満たす n は，$13\cdot14=182$，

$14\cdot15=210$ より，$n=14$

第14群の初項は，$13\cdot14+2=184$

200が第14群の m 番目とすると，

$184+(m-1)\times2=200$ より，$m=9$

よって，200は**第14群の 9 番目**

18　(1)　$a_{n+1}=3a_n$

よって，初項 2，公比 3 の等比数列であるから，

$\boldsymbol{a_n=2\cdot3^{n-1}}$

(2)　$a_{n+1}-a_n=2n$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，

$b_n=2n$

$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=3+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}$$

$$=n^2-n+3$$

これは，$n=1$ のときも成り立つ。

よって，$\boldsymbol{a_n=n^2-n+3}$

(3)　$a_{n+1}-a_n=3n^2$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，

$b_n=3n^2$

$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=4+3\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

$$=\frac{1}{2}(2n^3-3n^2+n+8)$$

これは，$n=1$ のときも成り立つ。

よって，$\boldsymbol{a_n=\dfrac{1}{2}(2n^3-3n^2+n+8)}$

19 (1) $a_2=\frac{3}{2}$, $a_3=\frac{5}{3}$, $a_4=\frac{7}{4}$, $a_5=\frac{9}{5}$

よって，$a_n=\frac{2n-1}{n}$ と推定される。

(2) $a_n=\frac{2n-1}{n}$ ……①

[1] $n=1$ のとき①は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき①が成り立つと仮定すると

$$a_k=\frac{2k-1}{k}$$

$n=k+1$ のとき

$$a_{k+1}=\frac{4-\frac{2k-1}{k}}{3-\frac{2k-1}{k}}=\frac{2k+1}{k+1}$$

$$=\frac{2(k+1)-1}{k+1}$$

よって，①は，$n=k+1$ のときも成り立つ。

[1]，[2]より，すべての自然数 n について①が成り立つ。

第11講座 統計的な推測

【p.33】

1 (1) 確率変数 X の確率 $P(X=k)$ を求めると，

$P(X=0)=\frac{{}_5C_3}{{}_8C_3}=\frac{5}{28}$，$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_5C_2}{{}_8C_3}=\frac{15}{28}$

$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\cdot{}_5C_1}{{}_8C_3}=\frac{15}{56}$，$P(X=3)=\frac{{}_3C_3}{{}_8C_3}=\frac{1}{56}$

よって，確率分布は次の通り。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$	1

期待値 $E(X)=0\times\frac{5}{28}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{15}{56}$

$+3\times\frac{1}{56}=\mathbf{\frac{9}{8}}$

分散 $V(X)=0^2\times\frac{5}{28}+1^2\times\frac{15}{28}+2^2\times\frac{15}{56}$

$+3^2\times\frac{1}{56}-\left(\frac{9}{8}\right)^2=\mathbf{\frac{225}{448}}$

標準偏差 $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{225}{448}}=\mathbf{\frac{15\sqrt{7}}{56}}$

(2) 期待値 $E(4X-3)=4E(X)-3$

$=4\times\frac{9}{8}-3=\mathbf{\frac{3}{2}}$

分散 $V(4X-3)=4^2V(X)=16\times\frac{225}{448}=\mathbf{\frac{225}{28}}$

標準偏差 $\sigma(4X-3)=\sqrt{4^2V(X)}=\sqrt{\frac{225}{28}}$

$=\mathbf{\frac{15\sqrt{7}}{14}}$

2 $E(X)=1\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{2}{10}+3\cdot\frac{3}{10}+4\cdot\frac{4}{10}=3$

$V(X)=(1-3)^2\cdot\frac{1}{10}+(2-3)^2\cdot\frac{2}{10}+(3-3)^2\cdot\frac{3}{10}$

$+(4-3)^2\cdot\frac{4}{10}=1$

よって，

$E(7X-3)=7E(X)-3=7\cdot3-3=\mathbf{18}$

$V(7X-3)=7^2V(X)=7^2\cdot1=\mathbf{49}$

$\sigma(7X-3)=\sqrt{V(7X-3)}=\sqrt{49}=\mathbf{7}$

3 1回目，2回目に出る目をそれぞれ X，Y とすると，

$E(X)=E(Y)=$

$1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$

であるから，求める得点の和の期待値は

$E(5X-3Y)=5E(X)-3E(Y)=5\cdot\frac{7}{2}-3\cdot\frac{7}{2}$

$=\mathbf{7}$ **（点）**

4 X のとりうる値は0，1であり，

$P(X=0)=\frac{3}{4}$，$P(X=1)=\frac{1}{4}$

$X=0$ のとき

$P(X=0,\ Y=0)=\frac{3}{4}\times\frac{{}_5C_2}{{}_7C_2}=\frac{5}{14}$

$P(X=0,\ Y=1)=\frac{3}{4}\times\frac{{}_2C_1\times{}_5C_1}{{}_7C_2}=\frac{5}{14}$

$P(X=0,\ Y=2)=\frac{3}{4}\times\frac{{}_2C_2}{{}_7C_2}=\frac{1}{28}$

$X=1$ のとき

$P(X=1,\ Y=0)$

$=\frac{1}{4}\times\frac{{}_6C_2}{{}_7C_2}=\frac{5}{28}$

$P(X=1,\ Y=1)$

$=\frac{1}{4}\times\frac{{}_1C_1\times{}_6C_1}{{}_7C_2}=\frac{1}{14}$

$P(X=1,\ Y=2)=0$

同時分布は右のようになる。

$X \backslash Y$	0	1	2	計
0	$\frac{5}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{3}{4}$
1	$\frac{5}{28}$	$\frac{1}{14}$	0	$\frac{1}{4}$
計	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{28}$	1

$E(X)=0\times\frac{3}{4}+1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

$E(Y)=0\times\frac{5}{28}+1\times\frac{3}{7}+2\times\frac{1}{28}=\frac{1}{2}$ より，

$E(X)+E(Y)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

また，$E(X+Y)=0\times\frac{5}{14}+1\times\left(\frac{5}{14}+\frac{5}{28}\right)$

$+2\times\left(\frac{1}{28}+\frac{1}{14}\right)=\frac{3}{4}$

よって，$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

が成り立ち，$E(X+Y)=\mathbf{\frac{3}{4}}$