◆本書の特色と構成◆

1 本書は，大学受験対策として，短期間に，数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学A，数学B，数学Cの総まとめをし，大学入試に出題される標準的な問題に対応できる学力を身につけることを目的として編集されています。

2 全体は11講座から成り，各講座とも１～1.5時間が標準授業時間です。

3 第１講座から第５講座，第９講座から第11講座まではそれぞれ２ページ構成，第６講座から第８講座まではそれぞれ３ページ構成です。

4 各講座は，標準問題と発展問題に分かれています。標準問題には，大学入試に出題される最も典型的な問題を精選して収録しました。また，発展問題では，やや高度な問題を，ヒントをつけて取り上げました。ヒントを参考にして挑戦してください。応用力のいっそうの充実が図れます。

もくじ

第1講座　数と式

標準問題

1　**［因数分解］**　次の式を因数分解せよ。

(1)　$t(t-1)\{(t-6)(t+5)-2\}+60$

(2)　$2x^2+3xy-2y^2+7x-y+3$

(3)　$(x^2+3x+5)(x+1)(x+2)+2$

(4)　$x^3+y^3-3xy+1$

2　**［式の値］**　次の問いに答えよ。

(1)　$a=\sqrt{2}+\sqrt{10}$，$b=\sqrt{2}-\sqrt{10}$ とするとき，$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}$ の値を求めよ。

(2)　実数 x が，$x^3+\dfrac{1}{x^3}=18$ を満たすとき，$x+\dfrac{1}{x}$，$x^2+\dfrac{1}{x^2}$ の値をそれぞれ求めよ。

3　**［比例式］**　次の問いに答えよ。

(1)　$(y+z):(z+x):(x+y)=1:2:3$ のとき，$\dfrac{x^2+y^2}{y^2+z^2}$ の値を求めよ。

(2)　$\dfrac{-a+b+c}{a}=\dfrac{a-b+c}{b}=\dfrac{a+b-c}{c}$ のとき，

$\dfrac{(a+b)(a+c)}{bc}+\dfrac{(b+c)(b+a)}{ac}+\dfrac{(c+a)(c+b)}{ab}$ の値を求めよ。

4　**［実数］**　次の問いに答えよ。

(1)　正の有理数 p，q が $(4-\sqrt{10})^2-(p^2+q)(4-\sqrt{10})+p^2q-10=0$ を満たすとき，p，q の値を求めよ。

(2)　$\alpha=\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ とする。この α を2重根号を使わずに簡単な形で表せ。また，$\alpha^5-4\alpha^4+2\alpha^3-4\alpha^2+\alpha-2$ の値を求めよ。

5　**［2次方程式］**　次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $x^2-4|x|+3=0$ を解け。

(2)　x についての2次方程式 $x^2+2(a+1)x+a+7=0$ が，異なる2つの正の解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

(3)　2つの2次方程式 $x^2+x+a=0$ と $x^2-x+a+4=0$ が共通解をもつとき，a の値を定め，共通解を求めよ。

6　**［解と係数の関係］**　次の問いに答えよ。

(1)　α，β が $x^2-x+1=0$ の解のとき，$\alpha^3+\beta^3$，$\alpha^{10}+\beta^{10}$ の値をそれぞれ求めよ。

(2)　2次方程式 $x^2+5x+3=0$ の2つの解を α，β とする。$\alpha^2+4\alpha+\beta$，$\beta^2+4\beta+\alpha$ を2つの解とする2次方程式で，x^2 の係数が1となるものを求めよ。

7　**［整数問題］**　次の問いに答えよ。

(1)　$4x^2+10x-y^2-y+6$ を因数分解せよ。

(2)　$4x^2+10x-y^2-y=0$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

発展問題

8　a を整数とし，$\dfrac{2}{a-\sqrt{5}}$ の整数部分は2であるとする。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　このような a に対して $\dfrac{2}{a-\sqrt{5}}$ の小数部分を x，$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{\sqrt{a-\sqrt{5}}}$ の小数部分を y とおくとき，$8x^2-6xy+y^2$ の値を求めよ。

ヒント　(1)　条件より，$2\leqq\dfrac{2}{a-\sqrt{5}}<3$ が成り立つ。

9　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{3}$ を満たす正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ について，次の問いに答えよ。ただし，$a\geqq b\geqq c$ とする。

(1)　c のとりうる値の最大値と最小値を求めよ。

(2)　$c=6$ のとき，$(a,\ b)$ の組を求めよ。

ヒント　条件式から c の不等式を導き，c のとりうる値を求める。

第2講座　関　数

標準問題

1　**［2次関数のグラフ］**　2つの放物線 $C_1: y=x^2+4x+m$，$C_2: y=x^2+2mx-m^2-3$ がある。放物線 C_1 の頂点の y 座標は，C_2 の頂点の y 座標よりも大きいとする。次の問いに答えよ。ただし，m は定数とする。

(1)　放物線 C_2 の頂点の座標を m の式で表せ。

(2)　m のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　放物線 C_1 と C_2 の交点の x 座標は $-\dfrac{3}{4}$ である。m の値を求めよ。

2　**［2次関数の最大・最小①］**　関数 $y=(x^2-4x+3)^2-2x^2+8x+3+a$ について，次の問いに答えよ。ただし，$0 \leqq x \leqq 3$ とする。

(1)　$t=x^2-4x+3$ とおくとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　y の最大値が6であるとき，a の値を求めよ。

3　**［2次関数の最大・最小②］**　x，y が実数で，$x^2-2xy+2y^2=2$ であるとき

(1)　x のとる値の範囲を求めよ。

(2)　$-x^2-2x+1$ のとる値の範囲を求めよ。

(3)　$x+2y$ のとる値の範囲を求めよ。

4　**［2次関数の最大・最小③］**　放物線 $y=x^2$ 上に2点 A$(-2,\ 4)$，B$(6,\ 36)$ がある。弧AB上の動点Pに対し，$\triangle$ABP の面積を S とおく。

(1)　S を，P の x 座標 x を用いて表せ。

(2)　S を最大にする x の値と，S の最大値を求めよ。

5　**［2次不等式］**　次の問いに答えよ。

(1)　$x^2-3|x-1|-13<0$，$x^2-x-6>0$ を同時に満たす x の値の範囲を求めよ。

(2)　不等式 $x^2-(a+2)x+2a<0$ を満たす x の整数値がただ1つ存在するような整数 a の値を求めよ。

(3)　不等式 $x^2-2x \geqq kx-4$ の解がすべての実数であるような定数 k の値の範囲を求めよ。

6　**［2次関数と2次不等式］**　$k \geqq 0$ とする。関数 $f(x)=x^2-2kx+\dfrac{1}{2}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　定義域が $0 \leqq x \leqq 1$ である2次関数 $y=f(x)$ の最小値を m とするとき，m を k を用いて表せ。

(2)　$0 \leqq x \leqq 1$ であるすべての x について $0 \leqq f(x) \leqq 1$ が成り立つような k の値の範囲を求めよ。

7　**［解の配置］**　次の問いに答えよ。

(1)　2次方程式 $x^2-x+p=0$ が，絶対値が 1 より小さい異なる2つの実数解をもつとき，定数 p の値の範囲を定めよ。

(2)　2次方程式 $3x^2-2(a-1)x+3(a-2)=0$ は相異なる2つの解 α，β をもつ。そのとき，α，β が $0<\alpha<1$，$0<\beta<1$ となるように定数 a の値の範囲を定めよ。

発展問題

8　連立方程式 $x+y+z=3$……①，$x^2+y^2+z^2=27$……②を満たす x，y，z を考える。

(1)　連立方程式①，②から，$xy+yz+zx$ の値を求めよ。

(2)　(1)の結果を利用して，連立方程式①，②において，x，y が実数となる実数 z の値の範囲を求めよ。

ヒント　(2)　$x+y$，xy をそれぞれ z の式で表し，実数解をもつ条件を考える。

9　次の2条件(イ)，(ロ)を同時に満たす整数 a，b の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

(イ)　2次方程式 $X^2+aX+b=0$ の2つの解が共に2以上の整数である。

(ロ)　不等式 $3a+2b \leqq 0$ が成り立つ。

ヒント　解と係数の関係から，2つの解 α，β についての条件を考える。

第3講座　確　率

標準問題

1 **［集合］** 1から100までの整数のうち，次の条件を満たす数の個数を求めよ。

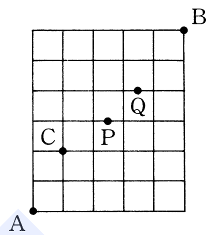
(1)　2または3で割り切れる数

(2)　5で割り切れない数

(3)　2または3で割り切れるが，5で割り切れない数

2 **［順列］** 0，1，2，3，4，5，6，7の中から，4個選んでできる4桁の整数を考える。このうちで，4の倍数となっているものの個数を求めよ。

3 **［組合せ］** 右の図のように，道路が碁盤の目のようになった街がある。地点Aから地点Bまでの長さが最短の道を行くとき，次の場合は何通りの道順があるか。



(1)　地点Cを通る。

(2)　地点Pは通らない。

(3)　地点Pおよび地点Qは通らない。

4 **［確率の基本性質］** 5円硬貨3枚，10円硬貨2枚を一度に投げ，表が出たものを残し，裏が出たものは取り除く。次の確率を求めよ。

(1)　10円硬貨が2枚とも残っている確率

(2)　5円硬貨と10円硬貨が同じ枚数残っている確率（ともに0枚の場合もふくむとする）

(3)　25円以上残っている確率

5 **［確率の基本性質］** 袋の中に赤玉3個，青玉2個，白玉1個が入っている。この中から同時に3個の玉を取り出したとき，すべての色の玉がそろう確率は $\boxed{(1)}$ である。また，玉を1個取り出し，色の確認後，袋の中に戻す。これを3回繰り返すとき，すべての色の玉が出る確率は $\boxed{(2)}$ である。

6　**［独立試行の確率］**　ある人が何枚かの正しい硬貨を投げて，表の出た枚数によって位置を変えるとする。

(1)　2枚の硬貨を投げて表の出た枚数が0ならば東へ，1または2ならば西へ，それぞれ1m動くとする。6回の試行で，元の位置にもどる確率を求めよ。

(2)　3枚の硬貨を投げて表の出た枚数が0ならば東へ，1ならば西へ，2ならば南へ，3ならば北へ，それぞれ1m動くとする。4回の試行で，元の位置にもどる確率を求めよ。

7　**〔独立試行の確率〕**2個のさいころを同時に投げ，目の積が偶数ならばAの勝ち，奇数ならばBの勝ちとなるゲームを繰り返し行い，先に3勝した方を優勝とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　各ゲームにおいてAが勝つ確率を求めよ。

(2)　3勝2敗でAが優勝する確率を求めよ。

(3)　Aが優勝する確率を求めよ。

発展問題

8　次のように得点を定めた一組52枚のトランプの中から，2枚を無作為に取り出す。ハートとダイヤのカードのAから10はそれぞれ -1 点から -10 点，またスペードとクラブのカードのAから10はそれぞれ $+1$ 点から $+10$ 点であるとする。なお，ハートとダイヤの絵札はすべて -10 点，スペードとクラブの絵札はすべて $+10$ 点とする。

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　取り出した2枚のカードの一方が $+1$ 点，もう一方が -1 点である確率を求めよ。

(2)　取り出した2枚のカードの合計得点が $+20$ 点未満である確率を求めよ。

(3)　取り出した2枚のカードの合計得点が0点である確率を求めよ。

(4)　取り出した2枚のカードの合計得点が正の数である確率を求めよ。

ヒント　(4)は，合計得点が正の数である確率と負の数である確率が同じであることから求める。

9　机のひきだしAに3枚のメダル，ひきだしBに2枚のメダルが入っている。ひきだしAの各メダルの色は金，銀，銅のどれかであり，ひきだしBの各メダルの色は金，銀のどちらかである。

(1)　ひきだしAのメダルの色が2種類である確率を求めよ。

(2)　ひきだしA，Bあわせたのメダルの色が2種類である確率を求めよ。

(3)　ひきだしA，Bあわせてちょうど3枚の金メダルが入っていることがわかっているとき，ひきだしAのメダルの色が2種類である確率を求めよ。

ヒント　(3)事象 B が起きたとき事象 A が起こる確率 $P_B(A)$ は $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

解答　《selectⅢ 数学総合》

第1講座 数と式

【p.2】

1 (1) 与式$=(t^2-t)^2-32(t^2-t)+60$

$=(t^2-t-2)(t^2-t-30)$

$=\boldsymbol{(t+1)(t-2)(t+5)(t-6)}$

(2) 与式$=2x^2+(3y+7)x-(2y+3)(y-1)$

$=\boldsymbol{(x+2y+3)(2x-y+1)}$

(3) 与式$=(x^2+3x)^2+7(x^2+3x)+12$

$=\boldsymbol{(x^2+3x+3)(x^2+3x+4)}$

(4) 与式$=x^3+y^3+1^3-3\cdot x\cdot y\cdot 1$

$=\boldsymbol{(x+y+1)(x^2-xy+y^2-x-y+1)}$

2 (1) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{10})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{10})^2}{(\sqrt{2}+\sqrt{10})(\sqrt{2}-\sqrt{10})}=\boldsymbol{-3}$

(2) $x+\dfrac{1}{x}=t$ とおくと，$t^3-3t-18=0$

$(t-3)(t^2+3t+6)=0$　t は実数だから，$t=3$

よって，$x+\dfrac{1}{x}=\boldsymbol{3}$

また，$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=\boldsymbol{7}$

3 (1) $\dfrac{y+z}{1}=\dfrac{z+x}{2}=\dfrac{x+y}{3}=k\,(\neq 0)$ とおく。

$y+z=k$，$z+x=2k$，$x+y=3k$

これを解いて，$x=2k$，$y=k$，$z=0$

よって，$\dfrac{x^2+y^2}{y^2+z^2}=\dfrac{4k^2+k^2}{k^2}=\boldsymbol{5}$

(2) 条件式$=k$ とおく。

$-a+b+c=ka$，$a-b+c=kb$，$a+b-c=kc$

辺々加えて，$a+b+c=k(a+b+c)$

(i) $a+b+c\neq 0$ のとき，$k=1$

与式$=\dfrac{2c\cdot 2b}{bc}+\dfrac{2a\cdot 2c}{ac}+\dfrac{2b\cdot 2a}{ab}=12$

(ii) $a+b+c=0$ のとき，$k=-2$

与式$=\dfrac{(-c)\cdot(-b)}{bc}+\dfrac{(-a)\cdot(-c)}{ac}$

$+\dfrac{(-b)\cdot(-a)}{ab}=3$

(i)，(ii)より，$\boldsymbol{a+b+c\neq 0}$ **のとき 12**

$\boldsymbol{a+b+c=0}$ **のとき 3**

4 (1) 与式より，

$\{p^2q-4(p^2+q)+16\}+\sqrt{10}(p^2+q-8)=0$

よって，$p^2q-4(p^2+q)+16=0$，$p^2+q-8=0$

これを解いて，$(p,\ q)=(\pm 2,\ 4)$

$p>0$，$q>0$ だから，$\boldsymbol{p=2}$，$\boldsymbol{q=4}$

(2) $\alpha=\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{4})^2}=2+\sqrt{3}$

$\alpha=2+\sqrt{3}$ より，$\alpha-2=\sqrt{3}$

両辺を2乗して整理すると，$\alpha^2-4\alpha+1=0$

よって，与式$=(\alpha^2-4\alpha+1)(\alpha^3+\alpha)-2=-2$

【p.3】

5 (1) $|x|^2-4|x|+3=0$ より，$|x|=1,\ 3$

よって，$\boldsymbol{x=\pm 1,\ \pm 3}$

(2) 異なる 2 つの解を α，β とすると，

$\dfrac{D}{4}=(a+1)^2-(a+7)>0$

$\alpha+\beta=-2(a+1)>0$，$\alpha\beta=a+7>0$

これを解いて，$\boldsymbol{-7<a<-3}$

(3) 共通解を α とすると，

$\alpha^2+a\alpha+a=0$ ……①　$\alpha^2-\alpha+a+4=0$ ……②

①−②から，$\alpha=2$　∴　$a=-6$

よって，$\boldsymbol{a=-6}$ **のとき共通解 2**

6 (1) $\alpha^2-\alpha+1=0$ より，

$\alpha^3+1=(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0$

∴　$\alpha^3=-1$　　同様に，$\beta^3=-1$

よって，$\alpha^3+\beta^3=-1-1=-2$

$\alpha^{10}+\beta^{10}=(\alpha^3)^3\alpha+(\beta^3)^3\beta=(-1)^3\alpha+(-1)^3\beta$

$=-(\alpha+\beta)$

$\alpha+\beta=1$ より，$\boldsymbol{\alpha^{10}+\beta^{10}=-1}$

(2) $\alpha+\beta=-5$，$\alpha\beta=3$ より，

$(\alpha^2+4\alpha+\beta)+(\beta^2+4\beta+\alpha)$

$=(\alpha^2+\beta^2)+5(\alpha+\beta)$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+5(\alpha+\beta)$

$=(-5)^2-2\cdot 3+5\cdot(-5)=-6$……①

また，$\alpha^2+5\alpha+3=0$，$\beta^2+5\beta+3=0$ より，

$\alpha^2+4\alpha=-\alpha-3$，$\beta^2+4\beta=-\beta-3$ だから，

$(\alpha^2+4\alpha+\beta)(\beta^2+4\beta+\alpha)$

$=(-\alpha-3+\beta)(-\beta-3+\alpha)=-(\alpha-\beta)^2+9$

$=-\{(\alpha-\beta)^2-4\alpha\beta\}+9$

$=-\{(-5)^2-4\cdot 3\}+9=-4$……②

①，②より，求める 2 次方程式は，

$\boldsymbol{x^2+6x-4=0}$

7 (1) $4x^2+10x-y^2-y+6$

$=4x^2+10x-(y-2)(y+3)$

$=\boldsymbol{(2x-y+2)(2x+y+3)}$

(2) $4x^2+10x-y^2-y=0$ より，

$4x^2+10x-y^2-y+6=6$

(1)より，$(2x-y+2)(2x+y+3)=6$

$(2x-y+2,\ 2x+y+3)$

$=(\pm 1,\ \pm 6)$，$(\pm 2,\ \pm 3)$，

$(\pm 3,\ \pm 2)$，$(\pm 6,\ \pm 1)$（複号同順）

このうち，x，y が整数となる組は，

$\boldsymbol{(x,\ y)=(0,\ -1),\ (0,\ 0),}$

$\boldsymbol{(-3,\ 2),\ (-3,\ -3)}$

8 (1) $2\leqq \dfrac{2}{a-\sqrt{5}}<3$ より，$\dfrac{2}{3}<a-\sqrt{5}\leqq 1$

よって，$\dfrac{2}{3}+\sqrt{5}<a\leqq 1+\sqrt{5}$

$\sqrt{5}\fallingdotseq 2.236$であり，$a$は整数だから，

$\boldsymbol{a=3}$

(2) $\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$であり，

$2<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}<3$より，整数部分は2だから，

$x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}-2=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

また，$\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{6-2\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$

より，$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{\sqrt{3-\sqrt{5}}}=\dfrac{2(\sqrt{2}+\sqrt{10})}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}=3+\sqrt{5}$

$5<3+\sqrt{5}<6$より，整数部分は5だから，

$y=3+\sqrt{5}-5=\sqrt{5}-2$

よって，与式$=(4x-y)(2x-y)$

$=\{2\sqrt{5}-2-(\sqrt{5}-2)\}\{\sqrt{5}-1-(\sqrt{5}-2)\}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$

9 (1) $a\geqq b\geqq c$ より，$\dfrac{1}{a}\leqq\dfrac{1}{b}\leqq\dfrac{1}{c}$ だから，

$\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leqq\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{3}{c}$

$\therefore\ c\leqq 9$　　$c=9$ のとき，$a=b=c=9$

よって，**最大値は 9**

また，$\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{3}$ より，$c>3$　　$\therefore\ c\geqq 4$

$c=4$ のとき，$a=b=24$ は等式を満たす。

よって，**最小値は 4**

(2) $c=6$ のとき，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{6}$

$(a-6)(b-6)=36$

$a-6\geqq b-6\geqq c-6=0$ だから，

$(a-6,\ b-6)=(36,\ 1),\ (18,\ 2),$
$(12,\ 3),\ (9,\ 4),\ (6,\ 6)$

よって，$\boldsymbol{(a,\ b)=(42,\ 7),(24,\ 8),(18,\ 9),(15,\ 10),(12,\ 12)}$

第2講座　関　数

【p.4】

1 (1) $C_2: y=x^2+2mx-m^2-3$
$=(x+m)^2-2m^2-3$

よって，C_2 の頂点の座標は　$\boldsymbol{(-m,\ -2m^2-3)}$

(2) $C_1: y=x^2+4x+m=(x+2)^2+m-4$

C_1 の頂点の y 座標は C_2 の頂点の y 座標よりも大きいから，$m-4>-2m^2-3$

これを解いて，$\boldsymbol{m<-1,\ m>\dfrac{1}{2}}$

(3) C_1 と C_2 の交点の x 座標は，

$x^2+4x+m=x^2+2mx-m^2-3$

$(4-2m)x=-m^2-m-3$

$x=-\dfrac{3}{4}$ を代入して，$-3+\dfrac{3}{2}m=-m^2-m-3$

これを解いて，$m=0,\ -\dfrac{5}{2}$

(2)より，求める m の値は，$\boldsymbol{m=-\dfrac{5}{2}}$

2 (1) $t=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$

$0\leqq x\leqq 3$ より，t のとりうる値の範囲は，

$\boldsymbol{-1\leqq t\leqq 3}$

(2) $y=(x^2-4x+3)^2-2(x^2-4x+3)+9+a$
$=t^2-2t+9+a=(t-1)^2+8+a$

$-1\leqq t\leqq 3$ より，y は $t=-1,\ 3$ のとき最大値 $12+a$ をとる。

よって，$12+a=6$ より，$\boldsymbol{a=-6}$

3 (1) $2y^2-2xy+x^2-2=0$

y が実数となる条件は，

$\dfrac{D}{4}=x^2-2(x^2-2)=4-x^2\geqq 0$

これを解いて，$\boldsymbol{-2\leqq x\leqq 2}$

(2) $-x^2-2x+1=-(x+1)^2+2$

(1)より，$\boldsymbol{-7\leqq -x^2-2x+1\leqq 2}$

(3) $x+2y=k$ とおくと，$x=k-2y$

これを $x^2-2xy+2y^2=2$ に代入して，

$(k-2y)^2-2(k-2y)y+2y^2=2$

$10y^2-6ky+k^2-2=0$

y が実数となる条件は，

$\dfrac{D}{4}=9k^2-10(k^2-2)=-k^2+20\geqq 0$

これを解いて，$-2\sqrt{5}\leqq k\leqq 2\sqrt{5}$

よって，$\boldsymbol{-2\sqrt{5}\leqq x+2y\leqq 2\sqrt{5}}$

4 (1) 直線 AB の方程式は，$4x-y+12=0$

$-2<x<6$ より，

$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{(6+2)^2+(36-4)^2}\times\dfrac{|4x-x^2+12|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}$

$=4|-x^2+4x+12|=4|-(x+2)(x-6)|$

$=\boldsymbol{-4(x^2-4x-12)}$

(2) (1)より，$S=-4(x-2)^2+64$

よって，**$x=2$ のとき最大値 $S=64$**

【p.5】

5 (1) $x^2-3|x-1|-13<0$ ……①

$x\geqq 1$ のとき　$x^2-3x-10<0$ より，$1\leqq x<5$

$x<1$ のとき　$x^2+3x-16<0$ より，

$\dfrac{-3-\sqrt{73}}{2}<x<1$

よって，①の解は，$\dfrac{-3-\sqrt{73}}{2}<x<5$ ……①′

$x^2-x-6>0$ ……②を解くと，

$x<-2,\ x>3$ ……②′

①′，②′ より，$\boldsymbol{\dfrac{-3-\sqrt{73}}{2}<x<-2,\ 3<x<5}$

(2)　$(x-2)(x-a)<0$

x の整数値がただ1つである a の値の範囲は，

$a>2$ のとき　$2<x<a$ より，$3<a\leqq 4$

$a<2$ のとき　$a<x<2$ より，$0\leqq a<1$

a は整数だから，**$a=0,\ 4$**

(3)　$x^2-x(2+k)+4\geqq 0$……①

①の解がすべての実数であるための条件は，

$D=(2+k)^2-4\cdot 1\cdot 4\leqq 0$

よって，$k^2+4k-12\leqq 0$

これを解いて，**$-6\leqq k\leqq 2$**

6 (1)　$f(x)=(x-k)^2-k^2+\dfrac{1}{2}$　$(0\leqq x\leqq 1)$

(i)　**$0\leqq k<1$ のとき**

$m=f(k)=-k^2+\dfrac{1}{2}$

(ii)　**$k\geqq 1$ のとき**

$m=f(1)=-2k+\dfrac{3}{2}$

(2) (i)　$0\leqq k<\dfrac{1}{2}$ のとき

$f(x)$ の最大値は $f(1)$，最小値は $f(k)$ だから，

$f(1)=-2k+\dfrac{3}{2}\leqq 1$……①　かつ

$f(k)=-k^2+\dfrac{1}{2}\geqq 0$……②　であればよい。

①と②と $0\leqq k<\dfrac{1}{2}$ の共通範囲を求めて，

$\dfrac{1}{4}\leqq k<\dfrac{1}{2}$

(ii)　$\dfrac{1}{2}\leqq k<1$ のとき

$f(x)$ の最大値は $f(0)$，最小値は $f(k)$ であり，

$f(0)=\dfrac{1}{2}\leqq 1$ だから，$f(k)\geqq 0$ であればよい。

よって，②と $\dfrac{1}{2}\leqq k<1$ の共通範囲を求めて，

$\dfrac{1}{2}\leqq k\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(iii)　$k\geqq 1$ のとき

$f(x)$ の最大値は $f(0)$，最小値は $f(1)$ であり，

$f(0)=\dfrac{1}{2}\leqq 1$ だから，$f(1)\geqq 0$ であればよい。

よって，$f(1)=-2k+\dfrac{3}{2}\geqq 0$ より，$k\leqq\dfrac{3}{4}$

これは $k\geqq 1$ を満たさない。

以上より，**$\dfrac{1}{4}\leqq k\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$**

7 (1)　$f(x)=x^2-x+p$ とおく。

判別式 $D=1-4p>0$,

$f(-1)=2+p>0$，$f(1)=p>0$

よって，**$0<p<\dfrac{1}{4}$**

(2)　$f(x)=3x^2-2(a-1)x+3(a-2)$ とおく。

判別式 $\dfrac{D}{4}=(a-1)^2-9(a-2)>0$

より，$a<\dfrac{11-3\sqrt{5}}{2}$，$a>\dfrac{11+3\sqrt{5}}{2}$

$f(1)=a-1>0$，$f(0)=3(a-2)>0$

よって，**$2<a<\dfrac{11-3\sqrt{5}}{2}$**

8 (1)　$xy+yz+zx$

$=\dfrac{1}{2}\{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\}=\mathbf{-9}$

(2)　$x+y=3-z$

$xy=-z(x+y)-9=z^2-3z-9$

x，y は2次方程式 $t^2-(3-z)t+z^2-3z-9=0$ の実数解だから，

$D=(3-z)^2-4(z^2-3z-9)\geqq 0$

これを解いて，**$-3\leqq z\leqq 5$**

9　$X^2+aX+b=0$ の2つの解を α，$\beta(\alpha\leqq\beta)$ とすると，$\alpha+\beta=-a$，$\alpha\beta=b$ ……①

これを，$3a+2b\leqq 0$ に代入して，

$-3(\alpha+\beta)+2\alpha\beta\leqq 0$

$(2\alpha-3)(2\beta-3)\leqq 9$ ……②

②を満たす $\alpha\geqq 2$，$\beta\geqq 2$ の組は，

$(\alpha,\ \beta)=(2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),$
$(2,\ 6),\ (3,\ 3)$

これを①に代入して，

**$(a,\ b)=(-4,\ 4),\ (-5,\ 6),\ (-6,\ 8),$
$(-7,\ 10),\ (-8,\ 12),\ (-6,\ 9)$**

第3講座　確　率

【p.6】

1 (1)　2の倍数は50個，3の倍数は33個，6の倍数は16個であるから，2または3の倍数は

$50+33-16=$**67（個）**

(2)　5の倍数は20個だから，5で割り切れない数は，$100-20=$**80（個）**

(3)　2または3の倍数で5の倍数でもあるのは，
10，15，20，30，40，45，50，60，70，75，80，90，100の13個だから，2または3で割り切れるが5で割り切れない数は，$67-13=$**54（個）**

2　下2桁が4の倍数である。

(i)下2桁に0を含まないとき

下2桁が12，16，24，32，36，52，56，64，72，76のときだから，$10\times5\times5=250$（個）

(ii)下2桁に0を含むとき

下2桁が04，20，40，60のときだから，

$4\times6\times5=120$（個）

よって，$250+120=$**370（個）**

3 (1)　AからCの道順は ${}_3C_1=3$（通り）

CからBまでの道順は ${}_8C_4=70$（通り）

よって，$3\times70=$**210（通り）**

(2)　AからBまでの道順は，${}_{11}C_5=462$（通り）

Pを通る道順は，${}_5C_2\times{}_5C_2=100$（通り）

よって，Pを通らない道順は，

$462-100=\mathbf{362}$ **(通り)**

(3)　Q を通る道順は，${}_7C_3 \times {}_3C_1=105$ (通り)

P かつ Q を通る道順は，${}_5C_2 \times {}_3C_1=30$ (通り)

よって，P または Q を通る道順は

$100+105-30=175$ (通り)

したがって，P も Q も通らない道順は，

$462-175=\mathbf{287}$ **(通り)**

4　(1)　5 円硬貨の表裏はどちらでもよいから，

$\dfrac{2^3\times 1^2}{2^5}=\mathbf{\dfrac{1}{4}}$

(2)　5 円硬貨と 10 円硬貨が 0 枚ずつ，1 枚ずつ，2 枚ずつ残っている確率は，

$\dfrac{1}{2^5}+\dfrac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{2^5}+\dfrac{{}_3C_2\times 1}{2^5}=\mathbf{\dfrac{5}{16}}$

(3)　5 円硬貨が X 枚，10 円硬貨が Y 枚表が出たとすると，25 円以上残っているのは，

$(X,\ Y)=(1,\ 2),\ (2,\ 2),\ (3,\ 2),\ (3,\ 1)$

よって，確率は，

$\dfrac{{}_3C_1\times 1}{2^5}+\dfrac{{}_3C_2\times 1}{2^5}+\dfrac{1}{2^5}+\dfrac{1\times{}_2C_1}{2^5}=\mathbf{\dfrac{9}{32}}$

5　(1)　$\dfrac{{}_3C_1\times{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_6C_3}=\dfrac{3}{10}$

(2)　${}_3P_3\times\dfrac{{}_3C_1}{{}_6C_1}\times\dfrac{{}_2C_1}{{}_6C_1}\times\dfrac{{}_1C_1}{{}_6C_1}=\dfrac{1}{6}$

【p.7】

6　(1)　$P(\text{東})=\dfrac{1}{4}$，$P(\text{西})=\dfrac{3}{4}$ である。

東，西へおのおの 3 回動くので，

${}_6C_3\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\left(\dfrac{3}{4}\right)^3=\mathbf{\dfrac{135}{1024}}$

(2)　$P(\text{東})=P(\text{北})=\dfrac{1}{8}$，$P(\text{西})=P(\text{南})=\dfrac{3}{8}$ である。東西南北におのおの 1 回ずつ動くとき，

$4!\cdot\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{3}{8}=\dfrac{27}{512}$

東西に各 2 回，または南北に各 2 回動くとき，

${}_4C_2\left(\dfrac{1}{8}\right)^2\left(\dfrac{3}{8}\right)^2\times 2=\dfrac{27}{1024}$

よって，$\dfrac{27}{512}+\dfrac{27}{1024}=\mathbf{\dfrac{81}{1024}}$

7　(1)B が勝つのは目の数がともに奇数の場合だから，B が勝つ確率は $\dfrac{3\cdot 3}{6^2}=\dfrac{1}{4}$，よって，

A が勝つ確率は $1-\dfrac{1}{4}=\mathbf{\dfrac{3}{4}}$

(2)4 回終わった時点で A が 2 勝 B が 2 勝であり，5 回目に A が勝てばよいから，

${}_4C_2\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\cdot\dfrac{3}{4}=\mathbf{\dfrac{81}{512}}$

(3)・A が 3 勝 0 敗で優勝するとき，

$\left(\dfrac{3}{4}\right)^3=\dfrac{27}{64}$

・A が 3 勝 1 敗で優勝するとき，3 回終わった時点で A が 2 勝 B が 1 勝であり，4 回目に A が勝てばよいから，

${}_3C_2\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{81}{256}$

よって，A が優勝する確率は，

$\dfrac{27}{64}+\dfrac{81}{256}+\dfrac{81}{512}=\mathbf{\dfrac{459}{512}}$

8　(1)　(スペードまたはクラブの A) と (ハートまたはダイヤの A) が出ることだから，

$\dfrac{2\times 2}{{}_{52}C_2}=\mathbf{\dfrac{2}{663}}$

(2)　余事象は合計点が 20 点のときで，スペードまたはクラブの 10 と絵札の計 8 枚から 2 枚を取り出すときだから，求める確率は

$1-\dfrac{{}_8C_2}{{}_{52}C_2}=\mathbf{\dfrac{649}{663}}$

(3)　合計点が 0 点となるのは，$(-1,\ 1),\ (-2,\ 2),\ \cdots\cdots,\ (-9,\ 9)$ が 2^2 通りずつ，$(-10,\ 10)$ は 8^2 通りあるから，求める確率は

$\dfrac{2^2\times 9+8^2}{{}_{52}C_2}=\mathbf{\dfrac{50}{663}}$

(4)　合計得点が正の数である確率と負の数である確率は等しい。(3)より，求める確率は，

$\left(1-\dfrac{50}{663}\right)\div 2=\mathbf{\dfrac{613}{1326}}$

9　(1)ひきだし A のメダルの色は $3^3=27$ 通りの可能性があり，そのうち，2 種類になるのは，すべて同じ色になる 3 通りとすべて異なる色になる $3!=6$ 通りを除いた 18 通りだから，確率は，$\dfrac{18}{27}=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$

(2)・金と銀の 2 種類であるとき，5 枚すべてが金または銀である場合の $2^5=32$ 通りからすべて金またはすべて銀の 2 通りを除いて，$32-2=30$ 通り

・銀と銅の 2 種類であるとき，A のひきだしが金と銅だけ，または，銅だけで，B のひきだしが金と金であればよいから，

$7\cdot 1=7$ 通り

・金と銅の 2 種類であるとき，同様に 7 通り

A，B のひきだしのメダルの色の組み合わせは $3^3\cdot 2^2=108$ 通りあるから，求める確率は，$\dfrac{30+7+7}{108}=\mathbf{\dfrac{11}{27}}$

(3)ひきだし A，B あわせてちょうど 3 枚の金メダルが入っているのは，

(i)A のひきだしに 3 枚，B のひきだしに 0 枚のとき，$1\cdot1=1$ 通り

(ii)A のひきだしに 2 枚，B のひきだしに 1 枚のとき，$6\cdot2=12$ 通り

(iii)A のひきだしに 1 枚，B のひきだしに 2 枚のとき，$12\cdot1=12$ 通り

よって，その確率は，$\dfrac{1+12+12}{108}=\dfrac{25}{108}$

ひきだし A，B あわせてちょうど 3 枚の金メダルが入っていて，かつ，ひきだし A のメダルの色が 2 種類になるのは，(ii)の場合と，(iii)で金以外の 2 枚のメダルの色が同じになる 6 通りだから，その確率は，

$\dfrac{12+6}{108}=\dfrac{18}{108}$

よって，求める確率は，$\dfrac{\frac{18}{108}}{\frac{25}{108}}=\mathbf{\dfrac{18}{25}}$

第4講座 式と証明，複素数と方程式

【p.8】

1 (1) $x+y-z=0$，$2x-2y+z+1=0$

より，$y=3x+1$，$z=4x+1$

よって，$ax^2+b(3x+1)^2+c(4x+1)^2=1$

$(a+9b+16c)x^2+(6b+8c)x$

$+b+c-1=0$

これが x についての恒等式だから，

$a+9b+16c=0$，$6b+8c=0$，

$b+c-1=0$　これを解いて，

$\boldsymbol{a=12,\ b=4,\ c=-3}$

(2) $x^4-4x^3+ax^2+x+b=(x^2+px+q)^2$

とおく。右辺を展開すると，

$x^4-4x^3+ax^2+x+b$

$=x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$

両辺の係数を比較して，

$-4=2p$，$a=p^2+2q$，$1=2pq$，$b=q^2$

これを解いて，

$\boldsymbol{p=-2,\ q=-\dfrac{1}{4},\ a=\dfrac{7}{2},\ b=\dfrac{1}{16}}$

2 $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=\dfrac{c}{a+b}=k$とおく。

$a=(b+c)k$……①

$b=(c+a)k$……②

$c=(a+b)k$……③

①+②+③より，$a+b+c=2k(a+b+c)$

$a+b+c\neq0$ だから，$k=\dfrac{1}{2}$

①，②，③に代入して，

$2a=b+c$，$2b=c+a$，$2c=a+b$

これを解いて，$a=b=c$

3 (1) (左辺)−(右辺)

$=a^4+a^3b+ab^3+b^4-(a^4+2a^2b^2+b^4)$

$=ab(a^2-2ab+b^2)=ab(a-b)^2\geqq0$

よって，$(a+b)(a^3+b^3)\geqq(a^2+b^2)^2$

等号が成り立つのは，$a=b$ のとき。

(2) (左辺)−(右辺)

$=\{(a+b)+c\}\{(a^3+b^3)+c^3\}$

$-\{(a^2+b^2)+c^2\}^2$

$=(a+b)(a^3+b^3)+(a+b)c^3$

$+(a^3+b^3)c+c^4-\{(a^2+b^2)+c^2\}^2$

$\geqq(a^2+b^2)^2+(a+b)c^3+(a^3+b^3)c+c^4$

$-\{(a^2+b^2)^2+2c^2(a^2+b^2)+c^4\}$……①

$=c^3a-2c^2a^2+ca^3+bc^3-2b^2c^2+b^3c$

$=ca(c-a)^2+bc(c-b)^2\geqq0$……②

よって，$(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)\geqq(a^2+b^2+c^2)^2$

①の等号が成り立つのは(1)より $a=b$ のときであり

②の等号が成り立つのは $a=b=c$ のときである。

したがって，等号が成り立つのは $a=b=c$ のとき。

4 (1) 与式$=\dfrac{-2i}{2i}-2+\dfrac{2i}{-2i}=-4$

(2) $3+(x^2+1)i=(x^2-2x)+(-2x)i$

∴　$3=x^2-2x$，$x^2+1=-2x$

これを解いて，$\boldsymbol{x=-1}$

5 $x^2+(3+2i)x+1+ki=0$

∴　$x^2+3x+1+(2x+k)i=0$ ……①

①が少なくとも 1 個の実数解をもつ条件は，

$x^2+3x+1=0$ ……②　$2x+k=0$ ……③

が実数解を共通解としてもつことである。

③より，$x=-\dfrac{k}{2}$ で，これを②に代入すると，

$\left(-\dfrac{k}{2}\right)^2+3\left(-\dfrac{k}{2}\right)+1=0$，$k=3\pm\sqrt{5}$

逆に，このとき①は

$x^2+3x+1+(2x+3\pm\sqrt{5})i=0$

となり，実数解 $x=\dfrac{-3\mp\sqrt{5}}{2}$ をもつ。

よって，$\boldsymbol{k=3\pm\sqrt{5}}$

【p.9】

6 (1) $xy+yz+zx$

$=\dfrac{1}{2}\{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\}=0$

また，$x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

より，$21-3xyz=3\cdot(9-0)$