数学Ⅱ

数学Ⅱ

特　色

本書は，学習指導要領をふまえ，各単元の標準的なレベルの問題を，年間を通じてじっくり完全マスターし，あわせて，受験への基礎対策用としても使用できるように編集されています。

数学は体系が整然としている学問ですから，１つの単元を把握するためには，それを構成している基本事項を正確に理解し，さらに，その単元における典型的な問題の解法パターンを習得することが必要です。

そこで本書では，各単元において，基本事項や重要事項を習得するための基本レベルの問題を取り上げ，それらを反復練習することでまず基礎を固め，続いて，単元の内容をより深く理解する上で必須となる標準レベルの問題を精選して，その解き方をパターンとして学ぶことによって，幅広い応用力が定着するようにしました。

構　成

○数学Ⅱで学習する事項を，６章47セクションに分けました。
○各セクションは原則として見開き２ページ構成で，年間計画がたてやすいよう配慮されています。

☆１セクションの構成

(セクション)

学習の要点	言葉による基本事項の説明。 公式や計算法則の例示。
基本問題	新しく学習する内容についての理解度をチェックする。 基本レベルの問題で構成。
例　　題	単元を代表する標準レベルの問題を，解き方のパターンも含めて学習する。
標準問題 発展問題	例題の関連問題を解きながら，応用範囲の広い実戦力の養成をめざす。
章末問題	章全体のまとめと，程度の高い問題で応用力を養う。

もくじ

1章　式と証明

2章　複素数と方程式

3章　図形と方程式

4章　三角関数

5章　指数関数と対数関数

6章　微分法・積分法

第1章　式と証明

1　3次式の展開と因数分解

★学習の要点★

❶　**3次式の展開**　（複号同順）

（1）　$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

（2）　$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$

❷　**3次式の因数分解**　（複号同順）

（1）　$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$

（2）　$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

● 基本問題 ●●

1　［$(\boldsymbol{a \pm b})^3$ **の展開**］　次の式を展開せよ。

（1）　$(x+3)^3$　　（2）　$(x-2y)^3$

（3）　$(2x+3y)^3$　　（4）　$(3a-2b)^3$

2　［$(\boldsymbol{a \pm b})(\boldsymbol{a^2 \mp ab + b^2})$ **の展開**］　次の式を展開せよ。

（1）　$(x+1)(x^2-x+1)$　　（2）　$(a-2)(a^2+2a+4)$

（3）　$(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$　　（4）　$(3x-4y)(9x^2+12xy+16y^2)$

3　［$\boldsymbol{a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3}$ **の因数分解**］　次の式を因数分解せよ。

（1）　x^3+3x^2+3x+1　　（2）　$a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3$

4　［$\boldsymbol{a^3 \pm b^3}$ **の因数分解**］　次の式を因数分解せよ。

（1）　a^3+8　　（2）　x^3-1

（3）　$8x^3+27y^3$　　（4）　$64-27a^3$

例題 ①　３次式の因数分解

次の式を因数分解せよ。

(1)　a^6-b^6　　　　(2)　x^6-7x^3-8

着眼点　(1)　$a^6=(a^3)^2$，$b^6=(b^3)^2$ と考える。　(2)　$x^6=(x^3)^2$ と考える。

解　(1)　与式 $=(a^3)^2-(b^3)^2$

$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$ ……答

(2)　与式 $=(x^3)^2-7x^3-8$

$=(x^3+1)(x^3-8)$

$=(x+1)(x^2-x+1)(x-2)(x^2+2x+4)$

$=(x+1)(x-2)(x^2-x+1)(x^2+2x+4)$ ……答

5　**類題**　次の式を因数分解せよ。

(1)　$64x^6-y^6$　　　　(2)　a^6+26a^3-27

▶ 標準問題 ◀◀

6　次の式を因数分解せよ。

(1)　$8a^3+64b^3$　　　　(2)　a^4-27ab^3

(3)　$x^3y^3-z^3$　　　　(4)　$(a+b)^3+8c^3$

(5)　x^6-2x^3+1　　　　(6)　$x^3+y^3+3y^2+3y+1$

7　$x+y=-2$，$xy=-1$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　x^2+y^2　　　　(2)　x^3+y^3　　　　(3)　x^6+y^6

◆ 発展問題 ◆◆

8　等式 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ を利用して，$a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解せよ。

2　二項定理

★学習の要点★

❶　二項定理

$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n$

一般項は ${}_n\mathrm{C}_r\boldsymbol{a^{n-r}b^r}$（第 $r+1$ 番目の項）となる。

❷　二項係数

・二項定理の右辺の係数 ${}_n\mathrm{C}_0$，${}_n\mathrm{C}_1$，${}_n\mathrm{C}_2$，……，${}_n\mathrm{C}_n$ を**二項係数**という。

・二項係数を右の図のように並べたものを**パスカルの三角形**という。

$a+b$ ⇨ 1　1

$(a+b)^2$ ⇨ 1　2　1

$(a+b)^3$ ⇨ 1　3　3　1

$(a+b)^4$ ⇨ 1　4　6　4　1

$(a+b)^5$ ⇨ 1　5　10　10　5　1

❸　$(\boldsymbol{a+b+c})^n$ の展開式

$(a+b+c)^n$ の展開式の一般項は，

$$\frac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r\quad（p，q，r \text{ は } p+q+r=n \text{ を満たす 0 または正の整数}）$$

●基本問題●●

9　［**二項定理①**］　次の式を展開せよ。

(1)　$(x+2)^5$　　(2)　$(x-1)^6$

(3)　$(2x+y)^4$　　(4)　$\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^5$

10　［**二項定理②**］　次の式の展開式で，〔　〕内に示した項の係数を求めよ。

(1)　$(3x+2)^5$　〔x^2〕　　(2)　$\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^8$　〔x^4〕

(3)　$(2x+3y)^7$　〔x^3y^4〕　　(4)　$(x^2-2y)^6$　〔x^8y^2〕

11　［**パスカルの三角形**］　パスカルの三角形を利用して，次の式を展開せよ。

(1)　$(a+b)^6$　　(2)　$(x-y)^8$

12　［$(\boldsymbol{a+b+c})^n$ **の展開式**］　次の式の展開式で，〔　〕内に示した項の係数を求めよ。

(1)　$(a+b+c)^6$　〔a^2b^3c〕　　(2)　$(1+2a+3b)^7$　〔a^2b^3〕

例題 ② $(a+b+c)^n$ の展開式

$(x^2-x+2)^4$ の展開式において，x^5 の項の係数を求めよ。

着眼点　一般項で x の指数が5，かつ $p+q+r=4$ を満たす0以上の整数 p，q，r の値の組を求める。

解　$(x^2-x+2)^4$ の一般項は，$\dfrac{4!}{p!q!r!}(x^2)^p\cdot(-x)^q\cdot2^r=\dfrac{4!}{p!q!r!}(-1)^q\cdot2^r\cdot x^{2p+q}$

ただし，p，q，r は0以上の整数で，$p+q+r=4$

ここで，$2p+q=5$ より，$(p,\ q,\ r)=(1,\ 3,\ 0)$，$(2,\ 1,\ 1)$

よって，x^5 の項の係数は，$\dfrac{4!}{1!3!0!}(-1)^3\cdot2^0+\dfrac{4!}{2!1!1!}(-1)^1\cdot2^1=-4-24=-28$ ……答

注　一般に，$a\neq0$ のとき，$a^0=1$ と定める。$2^0=1$

13　類題　$(1+x+x^2)^{10}$ を展開したとき，x の係数は□であり，x^4 の係数は□である。

▶ 標準問題 ◀◀

14　二項定理を利用して，次の等式が成り立つことを示せ。

(1)　${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^n$

(2)　${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-\cdots\cdots+(-1)^n{}_n\mathrm{C}_n=0$

(3)　$2^n{}_n\mathrm{C}_0-2^{n-1}{}_n\mathrm{C}_1+2^{n-2}{}_n\mathrm{C}_2-\cdots\cdots+(-1)^n{}_n\mathrm{C}_n=1$

(4)　${}_n\mathrm{C}_1+2{}_n\mathrm{C}_2+3{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+n{}_n\mathrm{C}_n=n\cdot2^{n-1}$

15　次の空らん□にあてはまる数を求めよ。

(1)　$(3x^2-y)^7$ を展開して整理したとき，x^8y^3 の係数は□であり，逆に係数が21となる項の y の次数は□である。

(2)　$(2x-y)^5(x+z)^7$ を展開して整理したとき，$x^5y^3z^4$ の係数は□である。

◆ 発展問題 ◆◆

16　次の式の展開式で，〔　〕内に示した項の係数を求めよ。

(1)　$\left(2x-\dfrac{1}{x^3}\right)^{12}$　〔x^7〕，〔x^8〕　　(2)　$\left(1+2a^2+\dfrac{3}{a}\right)^7$　〔a〕

ヒント　一般に，$a\neq0$ のとき，$\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

章末問題

A

1　次の式を因数分解せよ。

(1)　a^6-64　　(2)　$x^3+y^3+3xy-1$

2　$x+\dfrac{1}{x}=-3$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$x^2+\dfrac{1}{x^2}$　　(2)　$x^3+\dfrac{1}{x^3}$

3　n を自然数とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　${}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}={}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}$ を証明せよ。

(2)　$\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}}{4^n}$ を求めよ。

4　次の問いに答えよ。

(1)　$(x^2+2xy-3y^2+x-5y-2)\div(x-y-1)$ を計算せよ。

(2)　$3x^4-5x^2+1$ をある整式 P で割ったら，商が $3x^2-3x-5$，余りが $8x+6$ であった。整式 P を求めよ。

5　次の計算をせよ。

(1)　$\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-4}\times\dfrac{6x^2-11x-2}{x^2+2x-3}\div\dfrac{6x^2+x}{x^2-4x+3}$　　(2)　$\dfrac{2}{2x^2-7x-4}-\dfrac{4}{6x^2-x-2}-\dfrac{1}{3x^2-14x+8}$

6　次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c，d の値を定めよ。

(1)　$x^3-x^2-16x+37=(x-3)^3+a(x-3)^2+b(x-3)+c$

(2)　$x^3=a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)+d(x-1)(x-2)(x-3)$

7　次の等式を証明せよ。

(1)　$x+y=1$ のとき，$x(x+1)+y(y+1)=2(1-xy)$

(2)　$a:b=c:d$ のとき，$\dfrac{a^2-b^2}{ab}=\dfrac{c^2-d^2}{cd}$

8　$\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{y+z}{3}=\dfrac{z+x}{7}$ のとき，$x:y:z$ を求めよ。ただし，$xyz\neq0$ とする。

9　次の不等式を証明せよ。

(1)　$2x^2+8xy+9y^2\geqq0$　　(2)　$x^4+y^4\geqq x^3y+xy^3$

(3)　$(x^4+y^4)(x^2+y^2)\geqq(x^3+y^3)^2$　　(4)　$a^2+b^2+2\geqq2(a+b)$

B

10　整式 x^3+ax^2+bx+6 が整式 x^2+x+2 で割り切れるとき，a，b の値を求めよ。

11　a，b，c を 0 でない実数とする。

$$\frac{a^3+b^3}{c^3}=\frac{b^3+c^3}{a^3}=\frac{c^3+a^3}{b^3}=k$$

が成立するとき，k の値を求めよ。

12　$x=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ のとき，$2x^3-9x^2+10x+8$ の値を求めよ。

13　次の等式を証明せよ。

(1)　$a+b=1$ のとき，$a^3+b^3=1-3ab$

(2)　$x+y+z=0$ のとき，$yz(y^2-z^2)+zx(z^2-x^2)+xy(x^2-y^2)=0$

14　次の不等式を証明せよ。

(1)　$a>0$，$b>0$ のとき，$a^3+b^3\geqq ab(a+b)$

(2)　$a>0$，$b>0$ のとき，$\left(a+\dfrac{2}{b}\right)\left(\dfrac{8}{a}+b\right)\geqq 18$

(3)　$a>0$，$b>0$，$c>0$，$a+b+c=1$ のとき，$ax^2+by^2+cz^2\geqq(ax+by+cz)^2$

15　$|a|<1$，$|b|<1$，$|c|<1$ のとき，次の不等式を証明せよ。

(1)　$ab+1>a+b$　　(2)　$abc+2>a+b+c$

16　整数 a，b，c が $|b-c|<a<b+c$ を満たすとき，

$$|a-c|<b<a+c,\quad |b-a|<c<b+a$$

が成り立つことを証明せよ。

ヒント　**12** x の値を解とする 2 次方程式を利用する。　**13**(2)かっこの中を因数分解して，条件式を使う。
14(2)相加平均・相乗平均の不等式を利用する。(3)(左辺)－(右辺) を計算する。条件式を用いて，平方の和の形に変形する。　**15**(2)は(1)を利用する。　**16** $|b-c|<a$ より $a>0$ で，$-a<b-c<a$

第2章 複素数と方程式

1 複素数

★学習の要点★

❶ **虚数単位**

平方して-1になる数をiで表し，これを**虚数単位**という。$i^2=-1$

$a>0$のとき，$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$，$\sqrt{-1}=i$

❷ **複素数**

$a+bi$(a，bは実数)の形で表される数を**複素数**という。aを**実部**，bを**虚部**という。

❸ **複素数の相等**

$a+bi=c+di \iff a=c,\ b=d$　(a，b，c，dは実数)

❹ **複素数の計算**

(1) $(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$　(複号同順)

(2) $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

(3) $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$　($c^2+d^2\neq0$)

・複素数については，大小を考えない。

・$c+di$に対して$c-di$を**共役な複素数**という。

●基本問題●●

1 [**虚数単位①**]　iを用いて，次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{-9}$　(2) $\sqrt{-2}$　(3) $\sqrt{-2}+\sqrt{-18}$

2 [**虚数単位②**]　次の数の平方根を虚数単位iを用いて表せ。

(1) -1　(2) -4　(3) -10

3 [**複素数の相等**]　次の等式を満たす実数x，yの値を求めよ。

(1) $x+2i=3+yi$　(2) $(1+2i)x+(i-2)y=3+i$

4 [**複素数の計算**]　次の計算をせよ。

(1) $(3+5i)-(-2+3i)$　(2) $(2-i)(1+3i)$

(3) $\dfrac{3-2i}{i}$　(4) $\dfrac{1+i}{1-i}$

例題 1　複素数の計算

$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{2}\,i}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{2}\,i}{2}$ のとき，$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$ の値を求めよ。

着眼点　$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ の値を求め，$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ を利用する。

解　$\alpha+\beta=\dfrac{1+\sqrt{2}\,i}{2}+\dfrac{1-\sqrt{2}\,i}{2}=1$，$\alpha\beta=\left(\dfrac{1+\sqrt{2}\,i}{2}\right)\left(\dfrac{1-\sqrt{2}\,i}{2}\right)=\dfrac{1-2i^2}{4}=\dfrac{3}{4}$

$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{4}{3}\left(1^2-2\cdot\dfrac{3}{4}\right)=-\dfrac{2}{3}$　……**答**

5　**類題**　$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$ のとき，$\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}$ の値を求めよ。

▶ 標準問題 ◀◀

6　次の計算をせよ。

(1)　$(4-3i)(4+3i)$　　(2)　$(2-5i)^2$

(3)　$(1+i)^3$　　(4)　$\dfrac{2+\sqrt{2}\,i}{1+\sqrt{2}\,i}$

(5)　$(-3+\sqrt{2}\,i)^2-5(3-\sqrt{2}\,i)$　　(6)　$\dfrac{4-i}{4+i}-\dfrac{4+i}{4-i}$

7　$\alpha=3+2i$ とする。α の共役な複素数を $\overline{\alpha}$ として，次の数を求めよ。

(1)　$\alpha+\overline{\alpha}$　　(2)　$\alpha\overline{\alpha}$

8　次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ。

(1)　$5x+y-1+(x-y-11)i=0$　　(2)　$(xi-y-1)i+(xi+2y+5)=0$

◆ 発展問題 ◆◆

9　$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{7}\,i}{2}$ のとき，$\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2$ の値を求めよ。

ヒント　$2\alpha=1+\sqrt{7}\,i$ より，$2\alpha-1=\sqrt{7}\,i$　両辺を平方してまとめると，$\alpha^2-\alpha+2=0$　これを利用する。

2　2次方程式

★学習の要点★

❶　２次方程式の解の公式による解き方

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad (a\neq 0)$$

特に，$ax^2+bx+c=0$ において，$b=2b'$ のとき，

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

❷　２次方程式の解の判別

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を $D=b^2-4ac$ とすると，

$D>0 \iff$ 相異なる２つの実数解をもつ。

$D=0 \iff$ 実数の重解をもつ。$\left(x=-\dfrac{b}{2a}\right)$

$D<0 \iff$ 相異なる２つの虚数解をもつ。

●基本問題●●

10　［**解の公式による解き方**］　次の２次方程式を解の公式を用いて解け。

(1)　$x^2+x-1=0$　　(2)　$x^2-5x+2=0$

(3)　$x^2+4x+10=0$　　(4)　$5x^2+2x-1=0$

(5)　$2x^2-6x-7=0$　　(6)　$3x^2-5x+4=0$

11　［**解の判別①**］　次の２次方程式の解を判別せよ。

(1)　$x^2-5x+5=0$　　(2)　$x^2-x+2=0$

(3)　$3x^2-4x-1=0$　　(4)　$9x^2+6x+1=0$

12　［**解の判別②**］　次の問いに答えよ。

(1)　２次方程式 $x^2-4x+a=0$ が相異なる２つの実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

(2)　２次方程式 $3x^2+6x+2-a=0$ が相異なる２つの虚数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

例題 2 解の判別

2次方程式 $(1-k)x^2+2(1-2k)x+1=0$ が重複解をもつように，k の値を定めよ。

着眼点　重複解(重解)をもつ条件は，判別式 $D=0$

解　重解をもつ条件は，$\dfrac{D}{4}=(1-2k)^2-(1-k)=0$　　$k \neq 1$

すなわち，$4k^2-3k=0$，$k(4k-3)=0$　　よって，$k=0$，$\dfrac{3}{4}$ ……**答**

13 類題　次の2次方程式が重解をもつように a の値を定め，その重解を求めよ。

$$3x^2+x+1+a(x^2+2x+2)=0$$

▶ 標準問題 ◀◀

14　次の2次方程式を解け。

(1)　$2x^2+6x+7=0$　　(2)　$3x^2-4x-5=0$

(3)　$\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{6}x^2+1=0$　　(4)　$2x^2-2\sqrt{2}\,x+1=0$

15　次の2次方程式が〔　　〕内に示される解をもつとき，実数の定数 k の値または値の範囲を求めよ。

(1)　$3x^2-3x+4-k^2=0$　　〔異なる2つの実数解〕

(2)　$x^2+kx-(k-3)=0$　　〔重解〕

(3)　$2x^2-4x+k=0$　　〔異なる2つの虚数解〕

16　次の2次方程式の解を判別せよ。ただし，a は定数とする。

(1)　$x^2-5x-3a+1=0$　　(2)　$2x^2+(a-3)x+3-a=0$

◆ 発展問題 ◆◆

17　a，b は定数とする。x の2次方程式 $(x-1)(x-2)=m(x-a^2-b^2)$ がすべての m の値に対して実数解をもつような a，b の条件を求めよ。

ヒント　すべての m の値に対して，$am^2+bm+c \geqq 0$ が成り立つ条件は，$am^2+bm+c=0$ の判別式を D とすると，$a>0$ かつ $D \leqq 0$

第 3 章　図形と方程式

1　点と座標

★学習の要点★

❶ **2 点間の距離**

平面上の 2 点を A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$とすると，2 点A，B間の距離ABは，

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

❷ **線分の分点**

平面上の 2 点を A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$とする。

線分ABを $m:n$ の比に分ける点について，

(1)　内分点の座標は，$\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$

特に，中点の座標は，$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$　($m=n$ のとき)

(2)　外分点の座標は，$\left(\dfrac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \dfrac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$

❸ **三角形の重心の座標**

A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$，C$(x_3,\ y_3)$のとき，△ABCの重心Gの座標は，

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

● 基本問題 ●●

1　［**2 点間の距離**］　次の 2 点間の距離を求めよ。

(1)　(0，0)，(4，3)　　(2)　(2，3)，(5，1)

(3)　(1，0)，(−1，4)　　(4)　(−2，−4)，(−3，1)

2　［**線分の分点**］　2 点A(2，1)，B(4，3)を結ぶ線分ABについて，次の点の座標を求めよ。

(1)　中点　　(2)　2：1 に内分する点

(3)　2：1 に外分する点　　(4)　1：2 に外分する点

3　［**三角形の形状，重心**］　3 点A(7，1)，B(3，−2)，C(4，5)を頂点とする△ABCはどのような三角形か，答えよ。また，△ABCの重心の座標を求めよ。

例題 ① 三角形の重心

2点A(2, 2)，B(4, 1)を通る直線と，直線 $y=x$ と y 軸で囲まれた三角形の重心の座標を求めよ。

着眼点　直線ABの方程式を求めてから，三角形の各頂点の座標を求める。

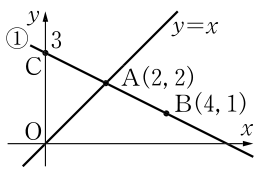
解　直線ABの方程式は $y=-\dfrac{1}{2}x+3$ ……①

点A(2, 2)は $y=x$ 上にあるから，①と $y=x$ との交点はA(2, 2)

①と y 軸との交点をCとすると，C(0, 3)

以上から，題意の三角形は△OACであるから，その重心の座標は，

$\left(\dfrac{0+2+0}{3},\ \dfrac{0+2+3}{3}\right)=\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$ ……**答**



4 **類題**　3辺の中点の座標が(1, −1)，(4, −2)，(2, 3)であるような三角形の3つの頂点の座標を求めよ。

▶ 標準問題 ◀◀

5 次の問いに答えよ。

(1)　2点A(1, 1)，B(5, 3)から等距離にある x 軸上の点，および y 軸上の点の座標を求めよ。

(2)　2点A(2, −1)，B(4, 4)から等距離にあり，かつ，直線 $y=2x$ 上にある点の座標を求めよ。

6 次の問いに答えよ。

(1)　A(3, 1)，B(4, −3)を結ぶ線分ABを2：3に外分する点をCとして，線分BCを2：1に内分する点Dの座標を求めよ。

(2)　3点A(2, −2)，B(3, 5)，C(−6, 2)を頂点とする△ABCの外心の座標を求めよ。

(3)　△ABCにおいて，A(−3, 2)，B(1, −2)で，△ABCの重心の座標が(2, 1)のとき，頂点Cの座標を求めよ。

(4)　O(0, 0)，A(1, 2)，B(3, 1)を3つの頂点とするひし形OABCの第4の頂点Cの座標を求めよ。

◆ 発展問題 ◆◆

7 △ABCにおいて，辺BCの中点をMとすると，$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$ であることを証明せよ。

ヒント　Mを原点に，辺BCを x 軸上にとると，C(a, 0)，B($-a$, 0)とおける。これは中線定理といわれる。

2　直線の方程式(1)

★学習の要点★

❶　直線の方程式

(1)　傾き m，y 切片 n の直線　　$y=mx+n$

(2)　傾き m，点$(x_1,\ y_1)$を通る直線　　$y-y_1=m(x-x_1)$

(3)　２点$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$を通る直線　　・$x_1 \neq x_2$ のとき，$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

・$x_1=x_2$ のとき，$x=x_1$

(4)　２点$(a,\ 0)$，$(0,\ b)$を通る直線　　$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

❷　２直線の位置関係

	２直線　$y=m_1x+n_1$，$y=m_2x+n_2$	$a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0$　$(a_1a_2 \neq 0)$
(1)　交わる条件	$m_1 \neq m_2$	$a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$
(2)　平行条件	$m_1=m_2$，$n_1 \neq n_2$	$a_1b_2-a_2b_1=0$，$a_1c_2-a_2c_1 \neq 0$
(3)　一致条件	$m_1=m_2$，$n_1=n_2$	$a_1b_2-a_2b_1=0$，$a_1c_2-a_2c_1=0$
(4)　垂直条件	$m_1m_2=-1$	$a_1a_2+b_1b_2=0$

● 基本問題 ●●

8　**［直線の方程式］**　次の直線の方程式を求めよ。

(1)　点$(1,\ 2)$を通り，傾きが３

(2)　点$(-1,\ 4)$を通り，x 軸に平行

(3)　２点$(-4,\ 3)$，$(2,\ -1)$を通る

(4)　２点$(3,\ 5)$，$(7,\ -3)$を通る

(5)　２点$(-2,\ 6)$，$(-2,\ -1)$を通る

(6)　x 切片が２，y 切片が３

9　**［２直線の位置関係①］**　次の直線の方程式を求めよ。

(1)　点$(8,\ 3)$を通り，直線 $y=x-2$ に平行である直線

(2)　点$(-3,\ -5)$を通り，直線 $y=-4x+1$ に平行である直線

(3)　点$(2,\ -1)$を通り，直線 $y=-2x+7$ に垂直である直線

(4)　点$(6,\ -2)$を通り，直線 $y=3x+2$ に垂直である直線

10　**［２直線の位置関係②］**　次の問いに答えよ。

(1)　２点 A$(1,\ 2)$，B$(3,\ -4)$を結ぶ線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ。

(2)　３点 A$(0,\ 0)$，B$(0,\ 3)$，C$(3,\ 2)$を頂点とする△ABC について，その外心と垂心の座標を求めよ。

例題 ②　定直線について対称な点

直線 $x+3y-1=0$ を l とする。直線 l について，点A$(2,\ -7)$と対称な点Bの座標を求めよ。

着眼点　次の2つの条件から求める。①線分ABの中点が l 上にある。②直線ABと l は垂直である。

解　点Bの座標を$(p,\ q)$とする。

線分ABの中点$\left(\dfrac{p+2}{2},\ \dfrac{q-7}{2}\right)$が直線 l 上にあるから

$\dfrac{p+2}{2}+3\cdot\dfrac{q-7}{2}-1=0$ より，$p+3q=21$ ……①

直線ABと l は垂直だから，その傾きについて，

$\dfrac{q+7}{p-2}\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-1$　　よって，$3p-q=13$ ……②

①，②を解いて，$p=6$，$q=5$　　よって，B$(6,\ 5)$ ……答

11　**類題**　直線 $2x-4y+3=0$ について，点A$(2,\ 6)$と対称な点Bの座標を求めよ。

▶ 標準問題 ◀◀

12　次の問いに答えよ。

(1)　2点A$(-2,\ 0)$，B$(4,\ 4)$を結ぶ線分ABを $2:1$ に内分する点を通り，この線分に垂直な直線の方程式を求めよ。

(2)　3直線 $x-y=3-2a$，$2x+y=5-a$，$x+2y=8-2a$ が1点で交わるように a の値を定めよ。

13　次の2直線の共有点の座標を求めよ。

(1)　$y=2x-1$，$y=-x+5$　　(2)　$x-3y-1=0$，$2x+y+5=0$

14　2直線 $x+ay+1=0$，$(a-3)x+(a+5)y+2=0$ が次の条件を満たすときの定数 a の値を求めよ。

(1)　平行　　(2)　垂直　　(3)　一致　　(4)　交わる

◆ 発展問題 ◆◆

15　次の3点が一直線上にあるように定数 a の値を定めよ。

(1)　$(1,\ -1)$，$(2,\ 1)$，$(-3,\ a)$　　(2)　$(-1,\ 0)$，$(1,\ -8)$，$(a,\ a^2)$

ヒント　まず2点を通る直線の方程式を求め，残りの1点がその直線上にあると考える。または，(1)　$(1,\ -1)$と$(2,\ 1)$を通る直線の傾きと，$(2,\ 1)$と$(-3,\ a)$を通る直線の傾きが等しいことから求める。

第 4 章　三角関数

1　一般角と三角関数

★学習の要点★

❶　**一般角**

動径OPが始線OXとなす角の１つをαとすると，動径OPの表す一般角θは

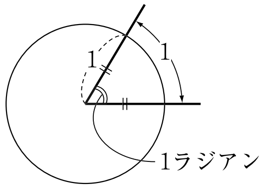
$\theta=\alpha+360^\circ\times n$　（nは整数）

❷　**弧度法**

半径１の円において，半径と同じ長さ１の弧に対する中心角の大きさを**１ラジアン**という。

・度数法と弧度法の換算表

度数法	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度法	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π



❸　**弧度法と扇形**

半径r，中心角θ（ラジアン）の扇形の弧の長さl，面積Sとすると，

$l=r\theta,\qquad S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}lr$

注　一般的に，単位ラジアンは省略する。

❹　**三角関数の定義**

P$(x,\ y)$，OP$=r$のとき，$\sin\theta=\frac{y}{r}$，$\cos\theta=\frac{x}{r}$，$\tan\theta=\frac{y}{x}$

●基本問題●●

1　［**一般角**］　次の角を図示し，その動径を表す一般角をいえ。また，それは第何象限の角か。

（1）　150°　　（2）　390°　　（3）　-120°　　（4）　1120°

2　［**弧度法**］　次の角を弧度法で表せ。

（1）　210°　　（2）　300°　　（3）　-135°　　（4）　22.5°

3　［**扇形の弧の長さと面積**］　次のような扇形の弧の長さと面積を求めよ。

（1）　半径２　　中心角$\frac{\pi}{6}$　　（2）　半径$\sqrt{5}$　　中心角$\frac{5}{4}\pi$

4　［**三角関数の値**］　θが次の角のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$の値を求めよ。

（1）　$\frac{2}{3}\pi$　　（2）　$-\frac{5}{4}\pi$　　（3）　$\frac{5}{3}\pi$　　（4）　$-\frac{\pi}{2}$

例題 1　等式を満たす θ

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ の値を求めよ。

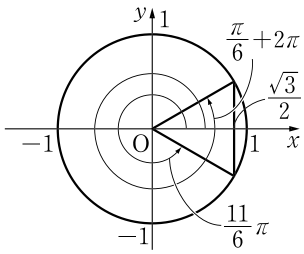
着眼点　$A = \theta + \dfrac{\pi}{3}$ とおき，単位円で $\cos A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる A を考える。

解　$A = \theta + \dfrac{\pi}{3}$ とすると，$\dfrac{\pi}{3} \leqq A < \dfrac{7}{3}\pi$

$\cos A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす A は，$A = \dfrac{11}{6}\pi$，$\dfrac{13}{6}\pi$

$\theta + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{11}{6}\pi$，$\dfrac{13}{6}\pi$

よって，$\theta = \dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$ ……答



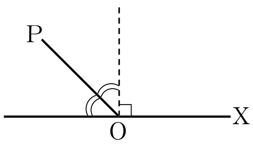
5　**類題**　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の等式を満たす θ の値を求めよ。

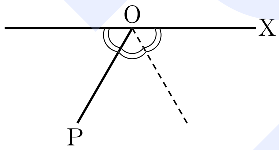
(1)　$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$\sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

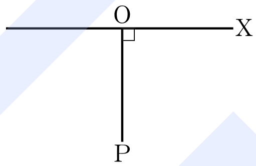
(3)　$\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$　　(4)　$\sin 3\theta = -1$

▶ 標準問題 ◀◀

6　次の動径OPの表す一般角を弧度法で表せ。

(1)


(2)


(3)


7　次の問いに答えよ。

(1)　θ が第 3 象限の角で，$\cos\theta = -\dfrac{5}{13}$ となるとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2)　θ が第 4 象限の角で，$\tan\theta = -2$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

◆ 発展問題 ◆◆

8　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，$\sqrt{2}\sin^2 x - \sin x = 0$ を満たす x の値を求めよ。

ヒント　左辺を因数分解する。

2　三角関数の性質

★学習の要点★

❶　三角関数の相互関係

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

❷　周期性，$-\theta$，$\dfrac{\pi}{2}\pm\theta$，$\pi\pm\theta$ の公式

$\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta$　　$\cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta$　　$\tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta$

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$　　$\cos(-\theta)=\cos\theta$　　$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\cos\theta$　　$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\mp\sin\theta$　　$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\mp\dfrac{1}{\tan\theta}$

（複号同順）

$\sin(\pi\pm\theta)=\mp\sin\theta$　　$\cos(\pi\pm\theta)=-\cos\theta$　　$\tan(\pi\pm\theta)=\pm\tan\theta$

（複号同順）

● 基本問題 ●●

9　［**三角関数の相互関係①**］　次のように $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値のうち1つが与えられているとき，他の2つの値を求めよ。

(1)　$\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$　（θ は第3象限の角）　　(2)　$\cos\theta=\dfrac{2}{3}$　（θ は第4象限の角）

10　［**三角関数の相互関係②**］　$\tan\theta=2-\sqrt{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

11　［**三角関数の相互関係③**］　次の等式を証明せよ。

(1)　$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta$　　(2)　$(1-\tan^4\theta)\cos^2\theta+\tan^2\theta=1$

12　［**$-\theta$，$\dfrac{\pi}{2}\pm\theta$，$\pi\pm\theta$ の公式①**］　次の三角関数の値を鋭角の三角関数で表し，その値を求めよ。

(1)　$\sin\dfrac{22}{3}\pi$　　(2)　$\cos\dfrac{19}{4}\pi$　　(3)　$\tan\dfrac{17}{6}\pi$

(4)　$\sin\left(-\dfrac{17}{3}\pi\right)$　　(5)　$\cos\left(-\dfrac{31}{6}\pi\right)$　　(6)　$\tan\dfrac{20}{3}\pi$

13　［**$-\theta$，$\dfrac{\pi}{2}\pm\theta$，$\pi\pm\theta$ の公式②**］　$\sin 50^\circ=a$ のとき，次の三角関数の値を a で表せ。

(1)　$\cos 220^\circ$　　(2)　$\tan(-130^\circ)$　　(3)　$\sin(-230^\circ)$　　(4)　$\cos(-40^\circ)$

例題 2　sin θ，cos θ，tan θ の関係

$\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}+\dfrac{\tan\theta+1}{\tan\theta-1}$ を簡単にし，$\cos\theta$ の式で表せ。

着眼点　まず，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ を用いて与式を$\sin\theta$，$\cos\theta$ で表す。

解　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ であるから

$$\tan\theta+1=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+1=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta},\quad \tan\theta-1=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\cos\theta}$$

よって，（与式）$=\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$

$$=\frac{(\sin\theta-\cos\theta)^2+(\sin\theta+\cos\theta)^2}{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}=\frac{2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}=\frac{2}{1-2\cos^2\theta}$$ ……**答**

14　**類題**　$\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1-\sin\theta}$ を簡単にし，$\cos\theta$ の式で表せ。また，$\tan\theta$ の式で表せ。

▶ 標準問題 ◀◀

15　次の式を簡単にせよ。

(1)　$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\sin(\pi-\theta)-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\cos(\pi-\theta)$

(2)　$\tan(\pi-\theta)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos(\pi+\theta)\tan(\pi+\theta)$

(3)　$\cos^2(-\theta)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos^2(\pi-\theta)+\cos^2\left(\dfrac{3}{2}\pi+\theta\right)$

16　次の問いに答えよ。

(1)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ のとき，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ の値を求めよ。

(2)　$0\leqq\theta\leqq\pi$ で $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta+\cos\theta$ の値，および，$\sin^3\theta-\cos^3\theta$ の値を求めよ。

17　次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

◆ 発展問題 ◆◆

18　次の 2 組の式から，θ を含まない x，y の関係式をつくれ。

$$x=\sin\theta+\cos\theta,\quad y=\sin\theta-\cos\theta$$

ヒント　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を利用する。

第 5 章　指数関数と対数関数

1　指数の拡張

★学習の要点★

❶ **指数法則**　($a \neq 0$, $b \neq 0$, m, n は整数)

$a^m a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $(ab)^n = a^n b^n$

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

❷ **累乗根の性質**　($a>0$, $b>0$, m, n, p は正の整数)

$(\sqrt[n]{a})^n = a$　　$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$　　$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$　　$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$　　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

❸ **指数の拡張**　($a>0$ で, m, n が正の整数, r が正の有理数)

$a^0 = 1$, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$

● 基本問題 ●●

1　［**累乗根**］　次の数を求めよ。

(1)　81の平方根(2乗根)　　(2)　81の4乗根　　(3)　-27の3乗根

(4)　$\sqrt[5]{32}$　　(5)　$\sqrt[3]{-64}$　　(6)　$\sqrt[4]{625}$

2　［**累乗根の性質**］　次の式を簡単にせよ。

(1)　$(\sqrt[3]{2})^3$　　(2)　$\sqrt[3]{2^6}$　　(3)　$\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{54}$

(4)　$\sqrt[4]{64} \div \sqrt[4]{4}$　　(5)　$\sqrt[3]{\sqrt{3^6}}$　　(6)　$(\sqrt[6]{5^4})^3$

3　［**指数の拡張**］　次の式の□に適する数を記入せよ。

(1)　$\sqrt{10} = 10^{\square}$　　(2)　$\dfrac{1}{7^3} = 7^{\square}$　　(3)　$\dfrac{1}{8} = 2^{\square}$

(4)　$0.0001 = 10^{\square}$　　(5)　$\sqrt[3]{9} = 3^{\square}$　　(6)　$\sqrt{\sqrt[4]{a}} = a^{\square}$

4　［**指数法則**］　次の式を簡単にせよ。

(1)　$2^{-\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{6}} \div 2^{\frac{1}{3}}$　　(2)　$3^{\frac{3}{2}} \div 3^{\frac{9}{4}} \times 3^{-\frac{1}{4}}$　　(3)　$\left(8^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{9}}$

例題 ① 指数の計算

次の問いに答えよ。

(1)　$\sqrt{a\sqrt{a}}$ を a^x の形で表せ。

(2)　$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$ のとき，$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}$ の値を求めよ。

着眼点　(1)　$a\sqrt{a}=a\times a^{\frac{1}{2}}$ となる。　(2)　$x^{\frac{1}{2}}=A$ とおくと $x^{\frac{3}{2}}=A^3$

解　(1)　$\sqrt{a\sqrt{a}}=\left(a\times a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{3}{4}}$ ……答

(2)　$x^{\frac{1}{2}}=A$，$x^{-\frac{1}{2}}=B$ とおくと，$A+B=3$，$AB=x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=x^0=1$

よって，(与式)$=A^3+B^3=(A+B)^3-3AB(A+B)=3^3-3\cdot1\cdot3=18$ ……答

5　類題　次の問いに答えよ。

(1)　$\sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$ を a^x の形で表せ。

(2)　$2^x+2^{-x}=3$ のとき，$2^{3x}+2^{-3x}$ の値を求めよ。

▶ 標準問題 ◀◀

6　次の値を求めよ。

(1)　$\sqrt[3]{25}\left(\sqrt[3]{5}\right)^4$　　(2)　$\sqrt[6]{3}\times\sqrt{27}\div\sqrt[3]{9}$　　(3)　$\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{16}-4\sqrt[3]{-2}$

7　次の式を a^x の形で表せ。

(1)　$a\times\sqrt[5]{a}$　　(2)　$\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}$　　(3)　$\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}$　　(4)　$\sqrt[5]{\sqrt{a}\sqrt[3]{a}}$

8　次の式を簡単にせよ。

(1)　$\left(3^{\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}}\right)\left(3^{\frac{1}{2}}-3^{-\frac{1}{2}}\right)$　　(2)　$\left(\sqrt[4]{5^3}\times\sqrt{6^2}\right)^{\frac{4}{3}}$

(3)　$\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)^2$　　(4)　$(a-b)\div\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)$

(5)　$\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{-\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{-\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)$　　(6)　$\left(a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}+1\right)$

9　$a^{2x}=5$ のとき，$\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}$ の値を求めよ。

◆ 発展問題 ◆◆

10　$x=2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}}$ のとき，$2x^3+6x$ の値を求めよ。

ヒント　$2x^3+6x=2x(x^2+3)$ に x の値を代入する。

2　指数関数とそのグラフ

★学習の要点★

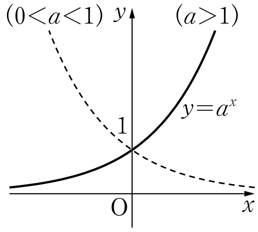
❶　$y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ のグラフ

・定義域(x の変域)…実数全体，値域(y の変域)…正の実数全体

・定点$(0,\ 1)$を通る。

・$a>1$…つねに増加する。　$0<a<1$…つねに減少する。

・漸近線… x 軸



❷　数の大小と指数

$a>1$ のとき，$m<n \iff a^m<a^n$

$0<a<1$ のとき，$m<n \iff a^m>a^n$

● 基本問題 ●●

11　［**指数関数のグラフ①**］　次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y=2^x$　　(2)　$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$　　(3)　$y=-2^x$　　(4)　$y=\dfrac{1}{3^x}$

12　［**指数関数のグラフ②**］　次の$\boxed{}$をうめよ。

(1)　関数 $y=a^x$ は $0<a<1$ のとき， x が増加すると y は$\boxed{}$し，そのグラフは，かぎりなく$\boxed{}$に近づく。

(2)　関数 $y=a^x$ $(a>0)$ は $x=\boxed{}$ のとき， a がどんな値でも $y=\boxed{}$ であるから，$y=a^x$ のグラフは，つねに定点$\boxed{}$を通る。

(3)　関数 $y=a^{x-1}+2$ $(a>0)$ のグラフは， a がどんな値であってもつねに定点$\boxed{}$を通る。

13　［**グラフの移動**］　関数 $y=3^x$ のグラフと次の関数のグラフとの位置関係を答えよ。

(1)　$y=-3^x$　　(2)　$y=3^{-x}$　　(3)　$y=-3^{-x}$

(4)　$y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-x}$　　(5)　$y=3^{x-1}$　　(6)　$y=3^x-1$

14　［**数の大小の比較**］　次の各組の数を小さい順にならべよ。

(1)　$2^2,\ 2^{-1},\ 2^0$　　(2)　$0.5^2,\ 0.5^0,\ 0.5^3$

(3)　$0.9^3,\ 0.9^{-3},\ 0.9^0,\ 0.9^2$　　(4)　$\sqrt{2},\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[5]{4}$

例題 2　指数方程式，不等式

次の方程式，不等式を解け。

(1)　$3^{2x}+3^{x+1}-4=0$　　(2)　$10^{2x}-11\cdot10^{x}+10<0$

着眼点　(1)　$3^{x}=X$ とおく。$3^{2x}=(3^{x})^{2}=X^{2}$，$3^{x+1}=3^{x}\cdot3^{1}=3\cdot3^{x}=3X$

解　(1)　方程式を変形すると，$(3^{x})^{2}+3\cdot3^{x}-4=0$
$3^{x}=X$ とおくと，$X^{2}+3X-4=0$，$(X+4)(X-1)=0$，$X=-4,\ 1$
$X>0$ だから，$X=1$　　すなわち，$3^{x}=1$　　よって，$x=0$ ……答

(2)　$10^{x}=X$ とおくと，$X^{2}-11X+10<0$，$(X-1)(X-10)<0$
よって，$1<X<10$　　すなわち，$1<10^{x}<10$　　よって，$0<x<1$ ……答

15　類題　次の方程式，不等式を解け。

(1)　$3^{2x+1}+2\cdot3^{x}-1=0$　　(2)　$4^{x}-2^{x+1}+16<2^{x+3}$

▶ 標準問題 ◀◀

16　次の各組の数を小さい順にならべよ。

(1)　$\sqrt[3]{0.5}$，$\sqrt[4]{0.5}$　　(2)　$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2}$，$1$，$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}$　　(3)　$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$\sqrt[6]{7}$

17　次の方程式，不等式を解け。

(1)　$3^{x}=27$　　(2)　$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x}=128$　　(3)　$4^{x-1}=2^{7-x}$　　(4)　$2^{x-2}=4\cdot2^{2x-1}$

(5)　$2^{x}<8$　　(6)　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}<\dfrac{1}{27}$　　(7)　$8^{x}\leqq\dfrac{1}{4}$　　(8)　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x}-3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}+2\leqq0$

18　次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1)　$y=2^{-x}+3$　$(0\leqq x\leqq1)$　　(2)　$y=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x-1}$　$(-1\leqq x\leqq2)$

◆ 発展問題 ◆◆

19　次の連立方程式を解け。

$2^{x-1}+3^{y+1}=11$，$2^{x+2}-3^{y-1}=15$

ヒント　$2^{x}=X$，$3^{y}=Y$ などと置き換える。たとえば $2^{x-1}=\dfrac{2^{x}}{2}=\dfrac{X}{2}$ となる。

第 6 章　微分法・積分法

1　極限値，微分係数

★学習の要点★

❶ **極限値の公式**　$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$，$\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ ならば，

$\lim_{x \to a} kf(x) = k\alpha$　（k は定数）　$\lim_{x \to a}\{f(x) \pm g(x)\} = \alpha \pm \beta$　（複号同順）

$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$　$\lim_{x \to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$　$(\beta \neq 0)$

❷ **$\dfrac{0}{0}$ の形の極限値の求め方**

① 分母・分子を因数分解して，共通因数を約分する。　② 分母か分子を有理化する。

❸ **平均変化率**

関数 $f(x)$ において，x が a から b まで変化するとき，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ を x が a から b まで変化するときの**平均変化率**という。

注　図形的には，曲線 $y=f(x)$ 上の 2 点 $(a,\ f(a))$，$(b,\ f(b))$ を結ぶ直線の傾きを表す。

❹ **微分係数 $f'(a)$**

❸で，$b-a=h$（すなわち $b=a+h$）とおき，$b \to a$（すなわち $h \to 0$）を考える。

$$f'(a) = \lim_{b \to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \lim_{h \to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

注　図形的には，$f'(a)$ は，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きを表す。

● 基本問題 ●●

1　［**極限の計算**］　次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x \to 2} 3x$　(2) $\lim_{x \to -2}(2x^2+x-5)$　(3) $\lim_{x \to 0}(x+a)(x^2+3ax-5a^2)$

(4) $\lim_{x \to 2}\dfrac{x^3+x^2-3x-6}{x^2-3x+2}$　(5) $\lim_{x \to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$　(6) $\lim_{x \to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

2　［**平均変化率**］　次の関数 $f(x)$ の［　］内に示された区間における平均変化率を求めよ。

(1) $f(x)=2x^2+1$　$[1,\ 2]$　(2) $f(x)=x-x^2$　$[1,\ 2]$　(3) $f(x)=x^3$　$[1,\ 1+h]$

3　［**微分係数**］　定義に従って，次の関数 $f(x)$ の（　）内の値における微分係数を求めよ。

(1) $f(x)=-2x+1$　$(x=1)$　(2) $f(x)=x^2+x$　$(x=2)$

(3) $f(x)=2x^2-x$　$(x=a)$　(4) $f(x)=x^3-1$　$(x=t)$

例題 ① 極限値が存在するための条件

$\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=5$ が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

着眼点　まず，$x \to 1$ のとき（分母）$\to 0$ であるから，極限値が存在するためには，（分子）$\to 0$

次に，極限値が5であるという条件を考える。条件を2度使うことに注意。

解　$\lim_{x \to 1}(x-1)=0$ であるから，極限値が存在するためには，$\lim_{x \to 1}(x^2+ax+b)=0$

すなわち，$1+a+b=0$ であるから，$a=-(b+1)$ ……①

このとき，$x^2+ax+b=x^2-(b+1)x+b=(x-1)(x-b)$

よって，$\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=\lim_{x \to 1}(x-b)=1-b$

したがって，$1-b=5$　ゆえに，$b=-4$ ……答　①より，$a=3$ ……答

4 類題　$\lim_{x \to 1} \dfrac{ax+b}{x^2+2x-3}=\dfrac{1}{2}$ が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

▶ 標準問題 ◀◀

5　x^3 の係数が1である x の3次式 $f(x)$ が，ある実数 a に対して

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x-a}=-2,\quad \lim_{x \to -a} \frac{f(x)}{x+a}=6$$

を満たしている。$f(x)$ を求めよ。

6　関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，次の極限値を $f'(a)$ を用いて表せ。

(1)　$\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+3h)-f(a)}{h}$　　(2)　$\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a-2h)-f(a-h)}{h}$

7　関数 $f(x)=x^2-2x$ について，次の問いに答えよ。

(1)　x が a から $a+1$ まで変化するときの平均変化率を求めよ。

(2)　(1)の変化率が5に等しくなるときの a の値を求めよ。

◆ 発展問題 ◆◆

8　関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，$\lim_{x \to a} \dfrac{af(x)-xf(a)}{x-a}$ を $f(a)$ と $f'(a)$ で表せ。

ヒント　微分係数の定義 $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ が利用できるように式を変形する。

2　導関数

★学習の要点★

❶　導関数

関数 $y=f(x)$ において，x の各値 a に対して，微分係数 $f'(a)$ を対応させた関数を**導関数**といい，$f'(x)$ で表す。$f'(x)$ を求めることを $f(x)$ を**微分する**という。

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

注　$f'(x)$ を $\dfrac{d}{dx}f(x)$，$\dfrac{df(x)}{dx}$ と書くこともある。

❷　導関数の公式　（c，k は定数）

(1)　$(c)'=0$

(2)　n が自然数のとき　$(x^n)'=nx^{n-1}$

(3)　$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

(4)　$\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

(5)　$\{kf(x)\}'=kf'(x)$

発展　**積 $f(x)\cdot g(x)$ の導関数**　$\{f(x)\cdot g(x)\}'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

$(ax+b)^n$ の導関数　$f(x)=(ax+b)^n$ のとき，$f'(x)=na(ax+b)^{n-1}$

● 基本問題 ●●

9　［**導関数**］　定義に従って，次の関数を微分せよ。

(1)　$f(x)=x^2$　(2)　$f(x)=x^2+2x$　(3)　$f(x)=2x^2+3x$

(4)　$f(x)=x^3+1$　(5)　$f(x)=ax^2+bx+c$　(6)　$f(x)=\dfrac{1}{x}$

10　［**導関数の公式**］　公式を用いて，次の関数を微分せよ。

(1)　$y=x^2-4x+3$　(2)　$y=x^3+2x-1$　(3)　$y=2-x+\dfrac{1}{2}x^2$

(4)　$y=x(x-1)$　(5)　$y=(x+1)(x+2)$　(6)　$y=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$

11　［**微分**］　次の関数を（　）内に示された変数について微分せよ。

(1)　$y=12x-5x^2$　(x)　(2)　$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$　(r)　(3)　$h=v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$　(t)

12　［**関数の決定**］　$f(x)$ が x の 2 次関数で，$x^2f(x)$ の導関数が $-2x^3+3x^2+x$ であるとき，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ を求めよ。

(2)　$f'(-1)$ を求めよ。

例題 ②　関数の決定

3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ において，$f(0)=-4$，$f(2)=f'(1)=f'(-2)=0$ であるとき，$f(x)$を求めよ。

着眼点　$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ である。a，b，c，d について成り立つ条件式を求める。

解　$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ であるから，

$f(0)=d=-4$ ……①　　$f(2)=8a+4b+2c+d=0$ ……②

$f'(1)=3a+2b+c=0$ ……③　　$f'(-2)=12a-4b+c=0$ ……④

①，②，③，④より $a=2$，$b=3$，$c=-12$，$d=-4$　　よって，$f(x)=2x^3+3x^2-12x-4$ ……**答**

13　**類題**　2 次関数 $f(x)$について，$f(2)=2$，$f'(0)=-3$，$f'(-1)=-4$ が成り立つ。このとき，$f(x)$を求めよ。

▶ 標準問題 ◀◀

14　次の関数を微分せよ。

(1)　$y=x^3-2x^2+x-4$　　(2)　$y=(x^2+1)(3x-2)$

(3)　$y=(2x+3)^3$　　(4)　$y=(x^3-2x+1)(x^2+1)$

(5)　$y=(x-1)(x-3)(x-5)$　　(6)　$y=(2x^2-3x+1)(2x^2+3x-1)$

15　$f(x)$は x についての整式であって，$f'(x)f(x)=f'(x)+f(x)+2x^3+2x^2-1$ が成り立つ。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$は何次式か。

(2)　$f(x)$を求めよ。

16　微分することによって，次の等式を満たす定数 a，b，c，d の値を求めよ。

(1)　$x^2+x+1=a(x-2)^2+b(x-2)+c$

(2)　$x^3-4x^2+5x-3=a(x-3)^3+b(x-3)^2+c(x-3)+d$

◆ 発展問題 ◆◆

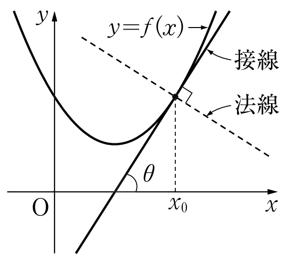
17　x^n-1 を $(x-1)^2$ で割ったときの余りを求めよ。

ヒント　求める余りは 1 次式か定数だから $ax+b$ とおける。$x^n-1=g(x)\cdot(x-1)^2+ax+b$ を利用する。

3　接線の方程式

★学習の要点★

❶　接線



曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(x_0,\ f(x_0))$ における接線について，

接線の傾き m　$m=f'(x_0)$

接線の方程式　$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

接線の方向角 θ　$\tan\theta=f'(x_0)$　$(-90^\circ<\theta<90^\circ)$

❷　法線

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(x_0,\ f(x_0))$ における法線について，

法線の傾き m'　$m'=-\dfrac{1}{f'(x_0)}$

法線の方程式　$f'(x_0)\neq 0$ のとき　$y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$　　$f'(x_0)=0$ のとき　$x=x_0$

●基本問題●●

18　［**接線の方程式**］　次の曲線上の，与えられた点における接線の傾きと接線の方程式を求めよ。

(1)　$y=x^2-2x$　$(2,\ 0)$　　(2)　$y=-x^2+2x+1$　$(0,\ 1)$

(3)　$y=x^3+2x^2$　$(-1,\ 1)$　　(4)　$y=4x-x^3$　$(x=3)$

19　［**接線の方向角**］　次の曲線上の，与えられた点における接線が x 軸の正の向きとのなす角(方向角) θ を求めよ。

(1)　$y=x^2-3x+1$　$(2,\ -1)$　　(2)　$y=-\dfrac{1}{2}x^2+x-1$　$(x=2)$

20　［**法線の方程式**］　放物線 $y=x^2-4x+2$ 上の，次の点における法線の傾きと法線の方程式を求めよ。

(1)　$(0,\ 2)$　　(2)　$(-1,\ 7)$　　(3)　$x=5$ に対応する点

21　［**平行な接線**］　次の問いに答えよ。

(1)　放物線 $y=3x^2-6x-1$ の接線のうち，直線 $y=6x$ に平行なものの方程式を求めよ。

(2)　曲線 $y=x^3-2x^2+5$ の接線で，x 軸に平行なものは何本あるか。

(3)　(2)の接線の方程式を求めよ。

例題 3　曲線外の点から引いた接線の方程式

放物線 $y=-x^2+1$ に点$(-1,\ 4)$から引いた接線の方程式を求めよ。

着眼点　$y=-x^2+1$ 上の点$(x_0,\ -x_0{}^2+1)$における接線が点$(-1,\ 4)$を通ると考える。

解　接点を$(x_0,\ -x_0{}^2+1)$とする。

$y'=-2x$ であるから，接線の方程式は，

$y-(-x_0{}^2+1)=-2x_0(x-x_0)$ ……①

この接線は点$(-1,\ 4)$を通るから，

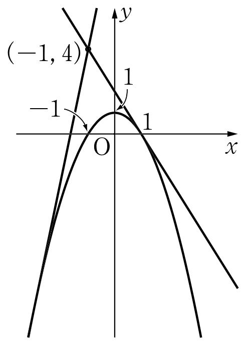
$4-(-x_0{}^2+1)=-2x_0(-1-x_0)$

整理して因数分解すると，$(x_0-1)(x_0+3)=0$

よって，$x_0=1$ または $x_0=-3$

これらを①に代入して，求める接線の方程式は，

$y=-2x+2$，$y=6x+10$ ……**答**



22　**類題**　放物線 $y=x^2$ に点$(1,\ -3)$から引いた接線の方程式を求めよ。

▶ 標準問題 ◀◀

23　点$(0,\ -2)$から，曲線 $y=x^3$ に引いた接線の方程式を求めよ。

24　曲線 $y=x^3+ax^2+bx$ が点$(1,\ 2)$を通り，かつ，この点における接線の傾きが-1であるように a，b の値を定めよ。

25　次の問いに答えよ。

(1)　2つの放物線 $y=x^2+2$，$y=-x^2$ の共通接線の方程式を求めよ。

(2)　2つの放物線 $y=x^2$ と $y=(x-p)^2$ (p は定数) との交点において，それぞれの放物線に引いた接線が直交するように p の値を定めよ。

26　2つの曲線 $y=2x^3$，$y=3x^2+a$ が同じ点Aで同一の直線に接するという。a の値を求めよ。また，共通の接点Aの座標を求めよ。

◆ 発展問題 ◆◆

27　放物線 $y=x^2+2x+1$ に接する2つの直線が点Pで直交するとき，点Pの軌跡を求めよ。

ヒント　2つの接点をA$(a,\ a^2+2a+1)$，B$(b,\ b^2+2b+1)$とおく。

高校ゼミ
Essence

数学Ⅱ

解答編

第 1 章　式と証明

【p. 4】 ❶ 3次式の展開と因数分解

1 (1) $x^3+9x^2+27x+27$

(2) $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$

(3) $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$

(4) $27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3$

2 (1) x^3+1　(2) a^3-8

(3) $8a^3+b^3$　(4) $27x^3-64y^3$

3 (1) $(x+1)^3$　(2) $(a-2b)^3$

4 (1) $(a+2)(a^2-2a+4)$

(2) $(x-1)(x^2+x+1)$

(3) $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$

(4) $-(3a-4)(9a^2+12a+16)$

【p. 5】

5 類題 (1) $(2x+y)(2x-y)$
$\times(4x^2+2xy+y^2)(4x^2-2xy+y^2)$

(2) $(a-1)(a+3)(a^2+a+1)(a^2-3a+9)$

6 (1) $8(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$

(2) $a(a-3b)(a^2+3ab+9b^2)$

(3) $(xy-z)(x^2y^2+xyz+z^2)$

(4) $(a+b+2c)(a^2+b^2+4c^2+2ab-2bc-2ca)$

(5) $(x-1)^2(x^2+x+1)^2$

(6) $(x+y+1)(x^2+y^2-xy-x+2y+1)$

7 (1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$=(-2)^2-2\times(-1)=\mathbf{6}$

(2) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=(-2)^3-3\times(-1)\times(-2)=\mathbf{-14}$

(3) $x^6+y^6=(x^3+y^3)^2-2x^3y^3=(x^3+y^3)^2-2(xy)^3$
$=(-14)^2-2\times(-1)^3=\mathbf{198}$

8 $a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$
$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)$
$=(a+b+c)\{(a+b)^2-c(a+b)+c^2\}$
$-3ab(a+b+c)$
$=(a+b+c)\{(a+b)^2-c(a+b)+c^2-3ab\}$
$\boldsymbol{=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$

【p. 6】 ❷ 二項定理

9 (1) $(x+2)^5={}_5C_0x^5+{}_5C_1x^4\cdot2+{}_5C_2x^3\cdot2^2$
$+{}_5C_3x^2\cdot2^3+{}_5C_4x\cdot2^4+{}_5C_52^5$
$\boldsymbol{=x^5+10x^4+40x^3+80x^2+80x+32}$

(2) $(x-1)^6={}_6C_0x^6+{}_6C_1x^5(-1)^1+{}_6C_2x^4(-1)^2$
$+{}_6C_3x^3(-1)^3+{}_6C_4x^2(-1)^4+{}_6C_5x(-1)^5$
$+{}_6C_6(-1)^6$
$\boldsymbol{=x^6-6x^5+15x^4-20x^3+15x^2-6x+1}$

(3) $(2x+y)^4={}_4C_0(2x)^4+{}_4C_1(2x)^3y$
$+{}_4C_2(2x)^2y^2+{}_4C_32xy^3+{}_4C_4y^4$
$\boldsymbol{=16x^4+32x^3y+24x^2y^2+8xy^3+y^4}$

(4) $\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^5={}_5C_0x^5+{}_5C_1x^4\cdot\dfrac{y}{2}+{}_5C_2x^3\left(\dfrac{y}{2}\right)^2$
$+{}_5C_3x^2\left(\dfrac{y}{2}\right)^3+{}_5C_4x\left(\dfrac{y}{2}\right)^4+{}_5C_5\left(\dfrac{y}{2}\right)^5$
$\boldsymbol{=x^5+\dfrac{5}{2}x^4y+\dfrac{5}{2}x^3y^2+\dfrac{5}{4}x^2y^3+\dfrac{5}{16}xy^4+\dfrac{y^5}{32}}$

10 (1) 一般項は ${}_5C_r(3x)^{5-r}2^r$
$5-r=2$ とすると，$r=3$
よって，x^2 の係数は，${}_5C_33^22^3=\mathbf{720}$

(2) 一般項は ${}_8C_rx^{8-r}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^r$
$8-r=4$ とすると，$r=4$
よって，x^4 の係数は，${}_8C_4\left(-\dfrac{1}{3}\right)^4=\mathbf{\dfrac{70}{81}}$

(3) 一般項は ${}_7C_r(2x)^{7-r}(3y)^r$
$r=4$ の場合で，係数は，${}_7C_42^33^4=\mathbf{22680}$

(4) 一般項は
${}_6C_r(x^2)^{6-r}(-2y)^r={}_6C_r(-2)^rx^{12-2r}y^r$
$r=2$ の場合で，係数は，${}_6C_2(-2)^2=\mathbf{60}$

11 (1) $a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4$
$+6ab^5+b^6$

(2) $x^8-8x^7y+28x^6y^2-56x^5y^3+70x^4y^4$
$-56x^3y^5+28x^2y^6-8xy^7+y^8$

12 (1) 一般項は $\dfrac{6!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$
$p=2$，$q=3$，$r=1$ の場合で，
係数は，$\dfrac{6!}{2!3!1!}=\mathbf{60}$

(2) 一般項は，$\dfrac{7!}{p!q!r!}1^p(2a)^q(3b)^r$
$q=2$，$r=3$，$p=7-2-3=2$ の場合で，
係数は，$\dfrac{7!}{2!2!3!}2^23^3=\mathbf{22680}$

【p. 7】

13 類題 一般項は
$\dfrac{10!}{p!q!r!}1^px^q(x^2)^r=\dfrac{10!}{p!q!r!}x^{q+2r}$
x の係数は，0 以上の整数 p，q，r が
$p+q+r=10$，$q+2r=1$ を満たす場合で，
よって，求める係数は，$\dfrac{10!}{9!1!0!}=\mathbf{10}$
また，x^4 の係数は，0 以上の整数 p，q，r が
$p+q+r=10$，$q+2r=4$ を満たす場合で，
$(p,\ q,\ r)=(6,\ 4,\ 0)$，$(7,\ 2,\ 1)$，$(8,\ 0,\ 2)$
よって，求める係数は，
$\dfrac{10!}{6!4!0!}+\dfrac{10!}{7!2!1!}+\dfrac{10!}{8!0!2!}=\mathbf{615}$

14 (1) 二項定理の公式で $a=1$，$b=x$ とおくと，
$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n$ ……①
①に $x=1$ を代入すると，
${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_n=2^n$

(2) ①に $x=-1$ を代入すると，
${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$

(3) 二項定理の公式で，$a=2$，$b=-1$ とすると，

$(2-1)^n={}_nC_0 2^n+{}_nC_1 2^{n-1}(-1)^1$
$+{}_nC_2 2^{n-2}(-1)^2+\cdots\cdots+{}_nC_n(-1)^n$
よって，$2^n{}_nC_0-2^{n-1}{}_nC_1+2^{n-2}{}_nC_2-\cdots\cdots$
$+(-1)^n{}_nC_n=1$

(4) $k{}_nC_k=k\cdot\dfrac{n!}{(n-k)!k!}=\dfrac{n!}{(n-k)!(k-1)!}$

$=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{\{(n-1)-(k-1)\}!(k-1)!}=n{}_{n-1}C_{k-1}$

よって，${}_nC_1+2{}_nC_2+3{}_nC_3+\cdots\cdots+n{}_nC_n$
$=n{}_{n-1}C_0+n{}_{n-1}C_1+n{}_{n-1}C_2+\cdots\cdots+n{}_{n-1}C_{n-1}$
$=n({}_{n-1}C_0+{}_{n-1}C_1+{}_{n-1}C_2+\cdots\cdots+{}_{n-1}C_{n-1})$
ここで，(　)の中の式は，(1)の等式でnが$n-1$の場合だから，2^{n-1}と等しい。
ゆえに，
${}_nC_1+2{}_nC_2+3{}_nC_3+\cdots\cdots+n{}_nC_n=n\cdot 2^{n-1}$

15 (1) 一般項は ${}_7C_r(3x^2)^{7-r}(-y)^r$
$={}_7C_r3^{7-r}(-1)^r\cdot x^{14-2r}y^r$
x^8y^3 の係数は，$r=3$ の場合で，
${}_7C_33^4(-1)^3=\mathbf{-2835}$
逆に，係数が $21=7\cdot3$ となるのは，
${}_7C_r=7$，$3^{7-r}=3$ の場合だから，$r=6$
よって，y の次数は **6**

(2) 一般項は，${}_5C_r(2x)^{5-r}(-y)^r\times{}_7C_sx^{7-s}z^s$
$={}_5C_r\cdot{}_7C_s2^{5-r}(-1)^rx^{5-r+7-s}y^rz^s$
$x^5y^3z^4$ の係数は，$r=3$，$s=4$ の場合で，
${}_5C_3\cdot{}_7C_42^2(-1)^3=\mathbf{-1400}$

16 (1) 一般項は

${}_{12}C_r(2x)^{12-r}\left(-\dfrac{1}{x^3}\right)^r={}_{12}C_r2^{12-r}(-1)^rx^{12-4r}$

ここで，$12-4r=7$ を満たす整数 r はない。
したがって，**$\boldsymbol{x^7}$ の項は存在しない。**
次に，$12-4r=8$ とすると，$r=1$
よって，x^8 の係数は，${}_{12}C_12^{11}(-1)^1=\mathbf{-24576}$

(2) 一般項は

$\dfrac{7!}{p!q!r!}1^p(2a^2)^q\left(\dfrac{3}{a}\right)^r=\dfrac{7!2^q3^r}{p!q!r!}a^{2q-r}$

a の係数は，0 以上の整数 p，q，r が
$p+q+r=7$，$2q-r=1$ を満たす場合で，
$(q,\ p,\ r)=(5,\ 1,\ 1)$，$(2,\ 2,\ 3)$
よって，求める係数は

$\dfrac{7!2^13^1}{5!1!1!}+\dfrac{7!2^23^3}{2!2!3!}=\mathbf{22932}$

【p. 8】 ❸ 整式の除法

17 (1) $4x^2z$　(2) $-6ab$
(3) $-4x^2+3x+5$　(4) $2a^2-4a-1$

18 (1) 商 $x-1$，余り 0
(2) 商 $2x^2+3x+3$，余り 7
(3) 商 $2x-2$，余り $x-7$
(4) 商 $2x-1$，余り $-5x+2$
(5) 商 $x-3$，余り $11x-2$
(6) 商 $x+2$，余り $-x-5$

19 (1) 商 x^2-x-1，余り -2
(2) 商 x^2-4x+6，余り -5
(3) 商 $2x^2-3x+1$，余り -1
(4) 商 $2x^2+x-3$，余り -4

【p. 9】

20 類題 $\{2x^3+7x^2+5x-6-(-4)\}$
$\div(2x^2+3x-1)=\boldsymbol{x+2}$

21 (1) $-6a^2-10b^2$　(2) $2b-4a$

22 (1) 商 $x+1$，余り 6
(2) 商 x^2+4，余り -16
(3) 商 $5x^2-10x+35$，余り $-103x+111$
(4) 商 x^4-x^3+x-1，余り 1

23 (1) x^2-ax-a^2
(2) $x+3y-2$

24 (1) $P=(x+1)(2x^2-x+1)+5$
$=\boldsymbol{2x^3+x^2+6}$
(2) $P=(6x^3+11x^2-x+8-11)\div(3x^2+7x+3)$
$=\boldsymbol{2x-1}$
(3) $\{x^4-7x^3+5x-3-(9x+13)\}\div(x^2-x+2)$
$=\boldsymbol{x^2-6x-8}$

25 $x^4+ax^2+bx+1=(x-1)^2(x^2+2x+a+3)$
$+(2a+b+4)x-(a+2)$
となるので，$2a+b+4=0$ かつ $a+2=0$
よって，$\boldsymbol{a=-2}$，$\boldsymbol{b=0}$

【p. 10】 ❹ 分数式の計算

26 (1) $\dfrac{b}{3a}$　(2) $\dfrac{2a^2+4b^2}{3a}$
(3) $2x-2$

27 (1) $2b^2c$　(2) $\dfrac{x+1}{(x+2)(x-3)}$
(3) $\dfrac{a+1}{2(a-1)}$　(4) $\dfrac{x+1}{x-1}$

28 (1) $x+1$　(2) $\dfrac{4}{(x-2)(x+2)}$

(3) 与式$=\dfrac{1}{x(x-2)}-\dfrac{1}{(x-2)(x+1)}$

$=\dfrac{x+1-x}{x(x-2)(x+1)}=\boldsymbol{\dfrac{1}{x(x-2)(x+1)}}$

(4) 与式$=\dfrac{x+1}{(3x+1)(x-1)}+\dfrac{2x+1}{(3x+1)(x+1)}$

$=\dfrac{(x+1)^2+(2x+1)(x-1)}{(3x+1)(x-1)(x+1)}=\boldsymbol{\dfrac{x}{(x-1)(x+1)}}$

【p. 11】

29 類題 (1) $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+4}+\dfrac{1}{x+5}$

$=\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}-\dfrac{1}{(x+4)(x+5)}$

$=\dfrac{(x+4)(x+5)-(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{2(2x+7)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}}$

(2) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+2}{x+3}-\dfrac{x-3}{x-2}-\dfrac{x-5}{x-4}$

$=\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)+\left(1-\dfrac{1}{x+3}\right)-\left(1-\dfrac{1}{x-2}\right)$

$\sqrt{a-b}>0$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$ だから
$(\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=a-b-a-b+2\sqrt{ab}$
$=2\sqrt{ab}-2b=2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})>0$
よって，$(\sqrt{a-b})^2>(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$
したがって，$\sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$

(2) $|x|+|y|\geqq 0$, $|x+y|\geqq 0$ だから，
$(|x|+|y|)^2-(|x+y|)^2$
$=x^2+2|x||y|+y^2-x^2-2xy-y^2$
$=2(|xy|-xy)\geqq 0$ $(|xy|\geqq xy$ より$)$
よって，$(|x|+|y|)^2\geqq(|x+y|)^2$
したがって，$|x|+|y|\geqq|x+y|$
等号は，$xy\geqq 0$ のとき成り立つ。

【p. 17】

56 類題 $a^2+b^2-a(b+1)-b+1$
$=a^2-(b+1)a+b^2-b+1$
$=a^2-(b+1)a+\left(\dfrac{b+1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{b+1}{2}\right)^2+b^2-b+1$
$=\left(a-\dfrac{b+1}{2}\right)^2+\dfrac{3(b-1)^2}{4}\geqq 0$
よって，$a^2+b^2\geqq a(b+1)+b-1$
等号は，$a-\dfrac{b+1}{2}=0$ かつ $b=1$ のとき，すなわち，$a=1$, $b=1$ のとき成り立つ。

57 (1) $x^2+2xy+y^2+y^2=(x+y)^2+y^2\geqq 0$
等号は，$x=y=0$ のとき成り立つ。

(2) $x^2+y^2-2(x-y-1)$
$=(x^2-2x+1)+(y^2+2y+1)$
$=(x-1)^2+(y+1)^2\geqq 0$
よって，$x^2+y^2\geqq 2(x-y-1)$
等号は，$x=1$, $y=-1$ のとき成り立つ。

(3) $(a+b+c)^2-4(ab+bc)$
$=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$
$=a^2-2(b-c)a+(b-c)^2$
$=(a-b+c)^2\geqq 0$
よって，$(a+b+c)^2\geqq 4(ab+bc)$
等号は，$a-b+c=0$ のとき成り立つ。

(4) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$
$=(a^2y^2-2abxy+b^2x^2)+(c^2x^2-2acxz+a^2z^2)$
$\quad+(c^2y^2-2bcyz+b^2z^2)$
$=(ay-bx)^2+(cx-az)^2+(cy-bz)^2\geqq 0$
よって，
$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(ax+by+cz)^2$
等号は，$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ のとき成り立つ。

58 $a>0$, $b>0$, $c>0$ である。

(1) (相加平均)$\geqq$(相乗平均) であるから
$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$ ……① $b+c\geqq 2\sqrt{bc}$ ……②
$a+c\geqq 2\sqrt{ac}$ ……③
①，②，③の辺々をかけて，
$(a+b)(b+c)(a+c)\geqq 8\sqrt{a^2b^2c^2}$
よって，$(a+b)(b+c)(c+a)\geqq 8abc$
等号は，$a=b=c$ のとき成り立つ。

(2) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2=2\sqrt{ab}>0$
よって，$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{a+b})^2$ であり
$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$, $\sqrt{a+b}>0$ より
$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$

(3) $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{1}{a}\right)-4$
$=ab+\dfrac{1}{ab}-2=\left(\sqrt{ab}-\dfrac{1}{\sqrt{ab}}\right)^2\geqq 0$
よって，$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{1}{a}\right)\geqq 4$
等号は，$ab=1$ のとき成り立つ。

(4) $(\sqrt{2(a+b)})^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$
$=2a+2b-a-b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqq 0$
$\sqrt{2(a+b)}>0$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$ より，
$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqq\sqrt{2(a+b)}$
等号は，$a=b$ のとき成り立つ。

59 (1) $a\geqq 2$, $b\geqq 2$ より
$a-1\geqq 1$, $b-1\geqq 1$ 辺々かける。
$(a-1)(b-1)\geqq 1$ $ab-(a+b)+1\geqq 1$
よって，$ab\geqq a+b$
等号は，$a=2$, $b=2$ のとき成り立つ。

(2) $a>0$, $b>0$, $a+b=1$ のとき
$ax^2+by^2-(ax+by)^2$
$=(a-a^2)x^2+(b-b^2)y^2-2abxy$
$=a(1-a)x^2+b(1-b)y^2-2abxy$
$=abx^2+aby^2-2abxy=ab(x-y)^2\geqq 0$
よって，$ax^2+by^2\geqq(ax+by)^2$
等号は，$x=y$ のとき成り立つ。

(3) $(|a|+|b|+|c|)^2-(|a+b+c|)^2$
$=a^2+b^2+c^2+2|a||b|+2|b||c|+2|c||a|$
$\quad-a^2-b^2-c^2-2ab-2bc-2ca$
$=2(|ab|-ab)+2(|bc|-bc)+2(|ca|-ca)\geqq 0$
よって，$|a+b+c|\leqq|a|+|b|+|c|$
等号は，a, b, c が同符号のとき成り立つ。

60 $a>0$, $b>0$, $c>0$ より
$\left(\sqrt{\dfrac{a+b+c}{3}}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}\right)^2$
$=\dfrac{a+b+c}{3}-\dfrac{a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}}{9}$
$=\dfrac{1}{9}(2a+2b+2c-2\sqrt{ab}-2\sqrt{bc}-2\sqrt{ca})$
$=\dfrac{1}{9}\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2+(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2\}$
$\geqq 0$
よって，$\left(\sqrt{\dfrac{a+b+c}{3}}\right)^2\geqq\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}\right)^2$
したがって，$\sqrt{\dfrac{a+b+c}{3}}\geqq\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}$
等号は，$a=b=c$ のとき成り立つ。

【p. 18】 **章末問題**

1 (1) $a^6-64=(a^3)^2-8^2$
$=(a^3+8)(a^3-8)$

$=(a+2)(a^2-2a+4)(a-2)(a^2+2a+4)$

$=\boldsymbol{(a+2)(a-2)(a^2+2a+4)(a^2-2a+4)}$

(2) $x^3+y^3+3xy-1=x^3+y^3+(-1)^3-3xy\cdot(-1)$

$=(x+y-1)\{x^2+y^2+(-1)^2-xy-y\cdot(-1)$
$-(-1)x\}$

$=\boldsymbol{(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)}$

2 (1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$

$=(-3)^2-2=\mathbf{7}$

(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=(-3)^3-3\cdot(-3)=\mathbf{-18}$

3 (1) 二項定理により，

$\{1+(-1)\}^{2n}={}_{2n}C_0 1^{2n}+{}_{2n}C_1 1^{2n-1}(-1)$
$+{}_{2n}C_2 1^{2n-2}(-1)^2+\cdots\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}1\cdot(-1)^{2n-1}$
$+{}_{2n}C_{2n}(-1)^{2n}$

すなわち，

$0={}_{2n}C_0-{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2-\cdots\cdots-{}_{2n}C_{2n-1}+{}_{2n}C_{2n}$

よって，${}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+\cdots\cdots+{}_{2n}C_{2n}$
$={}_{2n}C_1+{}_{2n}C_3+\cdots\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}$

(2) 二項定理により，

$(1+1)^{2n}={}_{2n}C_0+{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2+\cdots\cdots+{}_{2n}C_{2n}$

したがって，

$4^n=({}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+\cdots\cdots+{}_{2n}C_{2n})$
$+({}_{2n}C_1+{}_{2n}C_3+\cdots\cdots+{}_{2n}C_{2n-1})$

(1)を利用すると，

$4^n=2({}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+\cdots\cdots+{}_{2n}C_{2n})$

よって，$\dfrac{{}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+\cdots\cdots+{}_{2n}C_{2n}}{4^n}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

4 (1) 商　$x+3y+2$，余り　0

(2) $\{3x^4-5x^2+1-(8x+6)\}\div(3x^2-3x-5)$

$=x^2+x+1$　よって，$P=\boldsymbol{x^2+x+1}$

5 (1) 与式$=\dfrac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-2)}\times\dfrac{(6x+1)(x-2)}{(x+3)(x-1)}$

$\div\dfrac{x(6x+1)}{(x-1)(x-3)}$

$=\dfrac{(x+2)(x+3)\times(6x+1)(x-2)\times(x-1)(x-3)}{(x+2)(x-2)\times(x+3)(x-1)\times x(6x+1)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{x-3}{x}}$

(2) 与式$=\dfrac{2}{(2x+1)(x-4)}-\dfrac{4}{(2x+1)(3x-2)}$

$-\dfrac{1}{(3x-2)(x-4)}$

$=\dfrac{2(3x-2)-4(x-4)-(2x+1)}{(2x+1)(x-4)(3x-2)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{11}{(2x+1)(x-4)(3x-2)}}$

6 (1) 数値代入法を用いる。

$x=0$ のとき，$37=-27+9a-3b+c$

$x=1$ のとき，$21=-8+4a-2b+c$

$x=3$ のとき，$7=c$

よって，$\boldsymbol{a=8}$，$\boldsymbol{b=5}$，$\boldsymbol{c=7}$

(2) 数値代入法を用いる。

$x=1$ のとき　$1=a$

$x=2$ のとき　$8=a+b$

$x=3$ のとき　$27=a+2b+2c$

$x=0$ のとき　$0=a-b+2c-6d$

$\boldsymbol{a=1}$，$\boldsymbol{b=7}$，$\boldsymbol{c=6}$，$\boldsymbol{d=1}$

7 (1) $y=1-x$ のとき，

左辺$=x^2+x+(1-x)(2-x)$
$=2x^2-2x+2$

右辺$=2-2x(1-x)=2x^2-2x+2$

よって，左辺＝右辺

(2) $a:b=c:d$ より，$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$

$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}=k$ とおくと，$a=ck$，$b=dk$

左辺$=\dfrac{c^2k^2-d^2k^2}{cdk^2}=\dfrac{c^2-d^2}{cd}=$右辺

8 $\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{y+z}{3}=\dfrac{z+x}{7}=k$ とおくと，

$x+y=2k$ ……①　$y+z=3k$ ……②

$z+x=7k$ ……③

①，②，③より $x=3k$，$y=-k$，$z=4k$

よって，$\boldsymbol{x:y:z=3:(-1):4}$

9 (1) $2x^2+8xy+9y^2=2(x+2y)^2+y^2\geqq0$

等号は，$x=y=0$ のとき成り立つ。

(2) $x^4+y^4-x^3y-xy^3=x^3(x-y)-y^3(x-y)$

$=(x-y)(x^3-y^3)=(x-y)^2(x^2+xy+y^2)$ ……①

$x^2+xy+y^2=\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3y^2}{4}\geqq0$ となるので

①については $(x-y)^2(x^2+xy+y^2)\geqq0$

よって，$x^4+y^4\geqq x^3y+xy^3$

等号は，$x=y$ のとき成り立つ。

(3) $(x^4+y^4)(x^2+y^2)-(x^3+y^3)^2$

$=x^6+x^4y^2+x^2y^4+y^6-x^6-2x^3y^3-y^6$

$=x^4y^2-2x^3y^3+x^2y^4$

$=x^2y^2(x^2-2xy+y^2)=x^2y^2(x-y)^2\geqq0$

等号は，$x=y$ のとき成り立つ。

(4) $a^2+b^2+2-2a-2b$

$=(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)$

$=(a-1)^2+(b-1)^2\geqq0$

等号は，$a=1$，$b=1$ のとき成り立つ。

【p. 19】

10 x^3+ax^2+bx+6

$=(x^2+x+2)(x+a-1)+(b-a-1)x+(8-2a)$

割り切れるので，$b-a-1=0$ かつ $8-2a=0$

よって，$\boldsymbol{a=4}$，$\boldsymbol{b=5}$

11 $a^3+b^3=c^3k$ ……①　　$b^3+c^3=a^3k$ ……②

$c^3+a^3=b^3k$ ……③

①＋②＋③ より，

$2(a^3+b^3+c^3)=k(a^3+b^3+c^3)$ ……④

④において，

・$\boldsymbol{a^3+b^3+c^3\neq0}$ **のとき，**$\boldsymbol{k=2}$

・$\boldsymbol{a^3+b^3+c^3=0}$ **のとき**，$a^3+b^3=-c^3$

これを①へ代入すると，$-c^3=c^3k$

よって，$c\neq 0$ であるから，

両辺 c^3 で割って，$\boldsymbol{k=-1}$

12 $x=\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$

$(x-2)^2=(\sqrt{3})^2$ より，$x^2-4x+1=0$

$2x^3-9x^2+10x+8$

$=(x^2-4x+1)(2x-1)+4x+9$

$=4(2+\sqrt{3})+9=\boldsymbol{17+4\sqrt{3}}$

13 (1) $a+b=1$ より，$b=1-a$

$a^3+b^3=a^3+(1-a)^3$

$\qquad =a^3+1-3a+3a^2-a^3$

$\qquad =3a^2-3a+1$

$1-3ab=1-3a(1-a)$

$\qquad =3a^2-3a+1$

よって，$a^3+b^3=1-3ab$

(2) $y+z=-x$，$x+z=-y$，$x+y=-z$ より，

$yz(y^2-z^2)+zx(z^2-x^2)+xy(x^2-y^2)$

$=yz(y+z)(y-z)+zx(z+x)(z-x)$

$\quad +xy(x+y)(x-y)$

$=-yzx(y-z)-zxy(z-x)-xyz(x-y)$

$=-xy^2z+xyz^2-xyz^2+x^2yz-x^2yz+xy^2z$

$=0$

14 (1) $a^3+b^3-ab(a+b)$

$=a^3+b^3-a^2b-ab^2$

$=a^2(a-b)-b^2(a-b)=(a-b)(a^2-b^2)$

$=(a-b)(a+b)(a-b)$

$=(a+b)(a-b)^2\geqq 0$

よって，$a^3+b^3\geqq ab(a+b)$

等号は，$a=b$ のとき成り立つ。

(2) $\left(a+\dfrac{2}{b}\right)\left(\dfrac{8}{a}+b\right)=8+2+ab+\dfrac{16}{ab}$

$\geqq 10+2\sqrt{ab\cdot\dfrac{16}{ab}}=10+2\sqrt{16}=18$

よって，$\left(a+\dfrac{2}{b}\right)\left(\dfrac{8}{a}+6\right)\geqq 18$

等号は，$ab=4$ のとき成り立つ。

(3) $ax^2+by^2+cz^2-(ax+by+cz)^2$

$=ax^2+by^2+cz^2-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$

$\quad +2abxy+2bcyz+2cazx)$

$=a(1-a)x^2+b(1-b)y^2+c(1-c)z^2$

$\quad -2abxy-2bcyz-2cazx$

$=a(b+c)x^2+b(c+a)y^2+c(a+b)z^2$

$\quad -2abxy-2bcyz-2cazx$

$=ab(x^2-2xy+y^2)+bc(y^2-2yz+z^2)$

$\quad +ca(z^2-2zx+x^2)$

$=ab(x-y)^2+bc(y-z)^2+ca(z-x)^2\geqq 0$

よって，$ax^2+by^2+cz^2\geqq(ax+by+cz)^2$

等号は，$x=y=z$ のとき成り立つ。

15 (1) $|a|<1$，$|b|<1$ より，

$-1<a<1$，$-1<b<1$

$ab+1-(a+b)=(1-a)(1-b)>0$

よって，$ab+1>a+b$

(2) $|ab|<1$，$|c|<1$ であるから(1)における a を ab に，b を c に置き換えると，

$(ab)\cdot c+1>(ab)+c$

よって，$abc+1>ab+c$

両辺に 1 を加えて，$abc+2>ab+c+1$

よって，$abc+2>ab+c+1>a+b+c$

となり，成り立つ。

16 $|b-c|<a$ より，$a>0$ である。

$-a<b-c<a$，$c-a<b<a+c$ ……①

また，$a<b+c$ より，$a-c<b$ ……②

①，②より，$|a-c|<b<a+c$ が成り立つ。

つぎに，$|b-c|<a$ より，$-a<b-c<a$

両辺に -1 をかけて，$a>c-b>-a$

両辺に b を加えて，$a+b>c>b-a$

$a<b+c$ より，$c>a-b$

よって，$|b-a|<c<b+a$ が成り立つ。

第 2 章　複素数と方程式

【p. 20】 ❶ 複素数

1 (1)　$3i$　(2)　$\sqrt{2}i$　(3)　$4\sqrt{2}i$

2 (1)　$\pm i$　(2)　$\pm 2i$　(3)　$\pm\sqrt{10}i$

3 (1)　$x=3$，$y=2$

(2)　$(x-2y)+(2x+y)i=3+i$ より，

$\boldsymbol{x=1,\ y=-1}$

4 (1)　$5+2i$　(2)　$5+5i$

(3)　$-2-3i$　(4)　i

【p. 21】

5 類題　$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=1$ より

与式$=\dfrac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\dfrac{1^3-3\cdot1\cdot1}{1}=\boldsymbol{-2}$

6 (1)　25　(2)　$4+25i^2-20i=\boldsymbol{-21-20i}$

(3)　$1+3i+3i^2+i^3=1+3i-3-i=\boldsymbol{-2+2i}$

(4)　$\dfrac{(2+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)}=\dfrac{2-2i^2-\sqrt{2}i}{1-2i^2}$

$=\boldsymbol{\dfrac{4-\sqrt{2}i}{3}}$

(5)　$9-6\sqrt{2}i+2i^2-15+5\sqrt{2}i=\boldsymbol{-8-\sqrt{2}i}$

(6)　$\dfrac{(4-i)^2-(4+i)^2}{(4+i)(4-i)}=\dfrac{8(-2i)}{16-i^2}=\boldsymbol{-\dfrac{16}{17}i}$

7 (1)　$\overline{\alpha}=3-2i$ より，$\alpha+\overline{\alpha}=\boldsymbol{6}$

(2)　$\alpha\overline{\alpha}=(3+2i)(3-2i)=9-4i^2=\boldsymbol{13}$

8 (1)　$5x+y-1=0$，$x-y-11=0$ を解いて，

$\boldsymbol{x=2,\ y=-9}$

(2)　$(-x+2y+5)+(x-y-1)i=0$

$-x+2y+5=0$，$x-y-1=0$

これを解いて，$\boldsymbol{x=-3,\ y=-4}$

9 $2\alpha-1=\sqrt{7}i$　平方して，$\alpha^2-\alpha+2=0$

与式$=(\alpha^2-\alpha+2)(\alpha^2+2\alpha+1)+(-3\alpha-2)$

$=-3\cdot\dfrac{1+\sqrt{7}i}{2}-2=\boldsymbol{\dfrac{-7-3\sqrt{7}i}{2}}$

【p. 22】 ❷ 2次方程式

10 (1)　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$　(2)　$x=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$

(3)　$x=-2\pm\sqrt{6}i$　(4)　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{6}}{5}$

(5)　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{23}}{2}$　(6)　$x=\dfrac{5\pm\sqrt{23}i}{6}$

11 (1)　$D=5>0$ より，**異なる 2 つの実数解**

(2)　$D=-7<0$ より，**異なる 2 つの虚数解**

(3)　$\dfrac{D}{4}=7>0$ より，**異なる 2 つの実数解**

(4)　$\dfrac{D}{4}=0$ より，**重解**

12 (1)　$x^2-4x+a=0$

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot a=4-a$

$D>0$ より，$4-a>0$　よって，$\boldsymbol{a<4}$

(2)　$3x^2+6x+2-a=0$

$\dfrac{D}{4}=3^2-3\cdot(2-a)=3a+3$

$D<0$ より，$3a+3<0$　よって，$\boldsymbol{a<-1}$

【p. 23】

13 類題　与式を x についてまとめると，

$(a+3)x^2+(2a+1)x+2a+1=0$　$(a\neq-3)$

重解をもつので判別式 $D=0$ より，

$D=(2a+1)^2-4(a+3)(2a+1)=0$

$4a^2+24a+11=0$　$(2a+1)(2a+11)=0$

$a=-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{11}{2}$ のとき，重解 $x=-\dfrac{2a+1}{2(a+3)}$

$\boldsymbol{a=-\dfrac{1}{2}}$ **のとき** $\boldsymbol{x=0}$，$\boldsymbol{a=-\dfrac{11}{2}}$ **のとき** $\boldsymbol{x=-2}$

14 (1)　$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}i}{2}$　(2)　$x=\dfrac{2\pm\sqrt{19}}{3}$

(3)　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{33}}{2}$　(4)　$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

15 (1)　判別式 $D=(-3)^2-4\cdot3(4-k^2)$

$=3(4k^2-13)>0$ より，

$(2k+\sqrt{13})(2k-\sqrt{13})>0$

よって，$\boldsymbol{k<-\dfrac{\sqrt{13}}{2},\ \dfrac{\sqrt{13}}{2}<k}$

(2)　判別式 $D=k^2+4(k-3)=0$ より，

$(k+6)(k-2)=0$　よって，$\boldsymbol{k=-6,\ 2}$

(3)　判別式 $\dfrac{D}{4}=(-2)^2-2\cdot k<0$ より，$\boldsymbol{k>2}$

16 (1)　$x^2-5x-3a+1=0$

$D=(-5)^2-4\cdot1\cdot(-3a+1)=12a+21$

$D>0$ のとき，

すなわち，$\boldsymbol{a>-\dfrac{7}{4}}$ **のとき，異なる 2 つの実数解**

$D=0$ のとき

すなわち，$\boldsymbol{a=-\dfrac{7}{4}}$ **のとき，重解**

$D<0$ のとき

すなわち，$\boldsymbol{a<-\dfrac{7}{4}}$ **のとき，異なる 2 つの虚数解**

(2)　$2x^2+(a-3)x+3-a=0$

$D=(a-3)^2-4\cdot2(3-a)=(a-3)(a+5)$

$D>0$ のとき，すなわち

$\boldsymbol{a<-5,\ 3<a}$ **のとき，異なる 2 つの実数解**

$D=0$ のとき，すなわち

$\boldsymbol{a=-5,\ 3}$ **のとき，重解**

$D<0$ のとき，すなわち

$\boldsymbol{-5<a<3}$ **のとき，異なる 2 つの虚数解**

17 $a^2+b^2=c$ とおいて，x についてまとめると，

$x^2-(m+3)x+(cm+2)=0$

すべての m に対して実数解をもつので，

判別式 $D_1\geqq0$ より，

$D_1=(m+3)^2-4(cm+2)\geqq0$

$m^2-2(2c-3)m+1\geqq0$

これがすべての m の値について成り立つには，

判別式 $\dfrac{D_2}{4}=(2c-3)^2-1\leqq 0$

よって，$1\leqq c\leqq 2$

ゆえに，$\boldsymbol{1\leqq a^2+b^2\leqq 2}$

【p. 24】 ❸ 解と係数の関係

18 (1) (和)-2，(積)3

(2) (和)$\dfrac{5}{2}$，(積)$-\dfrac{7}{2}$

19 (1) $\alpha+\beta=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

(2) $\alpha\beta=-2$ より，

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-2(-2)=\boldsymbol{\dfrac{25}{4}}$

(3) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-4(-2)$

$=\boldsymbol{\dfrac{41}{4}}$

20 (1) $x^2-(2-4)x+2(-4)=0$ より，

$\boldsymbol{x^2+2x-8=0}$

(2) $x^2-(1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5})x$

$+(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})=0$ より，

$\boldsymbol{x^2-2x-4=0}$

(3) $x^2-(3+i+3-i)x+(3+i)(3-i)=0$ より，

$\boldsymbol{x^2-6x+10=0}$

21 $\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=\dfrac{1}{2}$

(1) $x^2-(-\alpha-\beta)x+(-\alpha)(-\beta)=0$

$x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

$x^2+2x+\dfrac{1}{2}=0$

よって，$\boldsymbol{2x^2+4x+1=0}$

(2) $x^2-(\alpha+\beta+\alpha\beta)x+\alpha\beta(\alpha+\beta)=0$

$x^2-\left(2+\dfrac{1}{2}\right)x+2\cdot\dfrac{1}{2}=0$

よって，$\boldsymbol{2x^2-5x+2=0}$

(3) $x^2-(2\alpha+1+2\beta+1)x+(2\alpha+1)(2\beta+1)=0$

$x^2-(2\cdot 2+2)x+4\cdot\dfrac{1}{2}+2\cdot 2+1=0$

よって，$\boldsymbol{x^2-6x+7=0}$

22 (1) $x^2+4x+5=0$ とおいて，

$x=-2\pm\sqrt{2^2-5}=-2\pm i$ より，

与式$=\boldsymbol{(x+2+i)(x+2-i)}$

(2) $2x^2-5x+6=0$ とおいて，

$x=\dfrac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 2\cdot 6}}{4}=\dfrac{5\pm\sqrt{23}\,i}{4}$ より，

与式$=\boldsymbol{2\left(x-\dfrac{5+\sqrt{23}\,i}{4}\right)\left(x-\dfrac{5-\sqrt{23}\,i}{4}\right)}$

【p. 25】

23 類題 2解を α，$\alpha+2$ とおくと，解と係数の関係より，$\alpha+(\alpha+2)=-2m$ ……①

$\alpha(\alpha+2)=m^2-2m+3$ ……②

①より，$\alpha=-m-1$

②に代入して，m についてまとめると，

$2m-4=0$ よって，$\boldsymbol{m=2}$

24 解と係数の関係より，$\alpha+\beta=-\dfrac{1}{2}$，$\alpha\beta=-2$

(1) 与式$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2-2(-2)$

$=\boldsymbol{\dfrac{17}{4}}$

(2) 与式$=\dfrac{\alpha+\beta-2}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}=\dfrac{-\frac{1}{2}-2}{-2-\left(-\frac{1}{2}\right)+1}$

$=\boldsymbol{5}$

(3) 与式$=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3-3(-2)\left(-\frac{1}{2}\right)}{-2}=\boldsymbol{\dfrac{25}{16}}$

25 (1) $x=-3$ を方程式に代入して，

$(a^2+1)\cdot(-3)^2+5\cdot(-3)-3a=0$

整理して，$3a^2-a-2=0$

$(3a+2)(a-1)=0$ よって，$a=-\dfrac{2}{3}$，1

$\boldsymbol{a=-\dfrac{2}{3}}$ **のとき，他の解は** $\boldsymbol{-\dfrac{6}{13}}$

$\boldsymbol{a=1}$ **のとき，他の解は** $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(2) 2解を 3α，4α とおく。

$3\alpha+4\alpha=a+1$ ……① $3\alpha\cdot 4\alpha=2a$ ……②

①，②より，a を消去して，$6\alpha^2-7\alpha+1=0$

$(6\alpha-1)(\alpha-1)=0$ よって，$\alpha=\dfrac{1}{6}$，1

$\alpha=\dfrac{1}{6}$ のとき $\boldsymbol{a=\dfrac{1}{6}}$，$\alpha=1$ のとき $\boldsymbol{a=6}$

(3) ① 和は $2\sqrt{3}$，積は 1 より，

$\boldsymbol{x^2-2\sqrt{3}\,x+1=0}$

② 和は 2，積は 4 より，

$\boldsymbol{x^2-2x+4=0}$

(4) ① $x^2-2x+4=0$ として，$x=1\pm\sqrt{3}\,i$ より，

与式$=\boldsymbol{(x-1+\sqrt{3}\,i)(x-1-\sqrt{3}\,i)}$

② $x^2+(5y-1)x+6y^2-y-2=0$ として，

$x=\dfrac{-5y+1\pm\sqrt{(y-3)^2}}{2}=\dfrac{-5y+1\pm|y-3|}{2}$

より，

$x=-2y-1$，$-3y+2$

よって，与式$=\boldsymbol{(x+2y+1)(x+3y-2)}$

別解 $x^2+(5y-1)x+(3y-2)(2y+1)$

$=(x+2y+1)(x+3y-2)$ (たすきがけ)

26 判別式 $D=(2a+1)^2-4(a+2)=4a^2-7<0$

より，$-\dfrac{\sqrt{7}}{2}<a<\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ ……①

虚数解を $p\pm qi\ (q\neq 0)$ とすると，$(p\pm qi)^3$ が実数より，虚部$=0$ なので，

$3p^2q-q^3=q(3p^2-q^2)=0$，$q^2=3p^2$ ……②

第 3 章　図形と方程式

【p. 32】 ❶ 点と座標

1　(1)　5　(2)　$\sqrt{13}$　(3)　$2\sqrt{5}$　(4)　$\sqrt{26}$

2　(1)　$\left(\dfrac{2+4}{2},\ \dfrac{1+3}{2}\right)=\mathbf{(3,\ 2)}$

(2)　$\left(\dfrac{1\cdot2+2\cdot4}{2+1},\ \dfrac{1\cdot1+2\cdot3}{2+1}\right)=\left(\mathbf{\dfrac{10}{3},\ \dfrac{7}{3}}\right)$

(3)　$\left(\dfrac{(-1)\cdot2+2\cdot4}{2-1},\ \dfrac{(-1)\cdot1+2\cdot3}{2-1}\right)=\mathbf{(6,\ 5)}$

(4)　$\left(\dfrac{(-2)\cdot2+1\cdot4}{1-2},\ \dfrac{(-2)\cdot1+1\cdot3}{1-2}\right)=\mathbf{(0,\ -1)}$

3　$AB^2=(3-7)^2+(-2-1)^2=25$,
$BC^2=(4-3)^2+(5+2)^2=50$,
$CA^2=(7-4)^2+(1-5)^2=25$,
$AB=CA$，$BC^2=AB^2+CA^2$ だから，**$\angle A=90°$ の直角二等辺三角形。**

また，重心の座標は$\left(\mathbf{\dfrac{14}{3},\ \dfrac{4}{3}}\right)$

【p. 33】

4　類題　3点の座標をA$(a_1,\ a_2)$，B$(b_1,\ b_2)$，C$(c_1,\ c_2)$とおく。ABの中点を$(1,\ -1)$とすると，

$\dfrac{a_1+b_1}{2}=1$，$\dfrac{a_2+b_2}{2}=-1$ より，

$a_1+b_1=2$ ……①　$a_2+b_2=-2$ ……②

以下同様にして求めると，

$b_1+c_1=8$ ……③　$b_2+c_2=-4$ ……④

$c_1+a_1=4$ ……⑤　$c_2+a_2=6$ ……⑥

①＋③＋⑤より，$2(a_1+b_1+c_1)=14$

$a_1+b_1+c_1=7$　よって，③から $a_1=-1$，①から $b_1=3$，⑤から $c_1=5$

②＋④＋⑥より，$a_2+b_2+c_2=0$

同様にして求めると，$a_2=4$，$b_2=-6$，$c_2=2$

以上から，**$(-1,\ 4)$，$(3,\ -6)$，$(5,\ 2)$**

5　(1)　x軸，y軸上の点をそれぞれ，P$(a,\ 0)$，Q$(0,\ b)$とおくと，

$AP^2=BP^2$ より，$(a-1)^2+1=(a-5)^2+3^2$

よって，$a=4$　したがって，**$(4,\ 0)$**

$AQ^2=BQ^2$ より，$1+(b-1)^2=5^2+(b-3)^2$

よって，$b=8$　したがって，**$(0,\ 8)$**

(2)　求める点は，$(t,\ 2t)$とおける。

$(t-2)^2+(2t+1)^2=(t-4)^2+(2t-4)^2$

よって，$t=\dfrac{9}{8}$　したがって，$\left(\mathbf{\dfrac{9}{8},\ \dfrac{9}{4}}\right)$

6　(1)　点Cの座標を$(c_1,\ c_2)$とすると，

$c_1=\dfrac{(-3)\times3+2\times4}{2-3}=1$,

$c_2=\dfrac{(-3)\times1+2\times(-3)}{2-3}=9$

線分BCを$2:1$に内分する点Dを$(d_1,\ d_2)$とすると，

$d_1=\dfrac{1\times4+2\times1}{2+1}=2$，$d_2=\dfrac{1\times(-3)+2\times9}{2+1}=5$

よって，**D$(2,\ 5)$**

(2)　外心の座標をP$(a,\ b)$とする。

$PA=PB=PC$ より，

$$\begin{cases}(a-2)^2+(b+2)^2=(a-3)^2+(b-5)^2\\(a-2)^2+(b+2)^2=(a+6)^2+(b-2)^2\end{cases}$$

よって，$a+7b=13$，$2a-b=-4$

これを解いて $a=-1$，$b=2$ より，**$(-1,\ 2)$**

(3)　C$(a,\ b)$とおくと，

$\dfrac{-3+1+a}{3}=2$，$\dfrac{2-2+b}{3}=1$ より，

$a=8$，$b=3$　よって，**C$(8,\ 3)$**

(4)　C$(a,\ b)$とおくと，OA∥BC より，

$\dfrac{2}{1}=\dfrac{b-1}{a-3}$　　$b=2a-5$ ……①

また，$OA^2=OC^2$ より，$a^2+b^2=5$

①を代入してまとめると，$(a-2)^2=0$

よって，$a=2$　このとき，$b=-1$ より，

C$(2,\ -1)$

7　M$(0,\ 0)$とすると，B$(-a,\ 0)$，C$(a,\ 0)$，A$(m,\ n)$とおける。

$AB^2+AC^2=(-a-m)^2+n^2+(a-m)^2+n^2$
$\qquad=2(a^2+m^2+n^2)$

$2(AM^2+BM^2)=2\{(m^2+n^2)+a^2\}$
$\qquad=2(a^2+m^2+n^2)$

よって，$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$ が成り立つ。

【p. 34】 ❷ 直線の方程式(1)

8　(1)　$y-2=3(x-1)$ より，$\boldsymbol{y=3x-1}$

(2)　x軸に平行なので，$\boldsymbol{y=4}$

(3)　$y-3=\dfrac{-1-3}{2-(-4)}(x+4)$ より，

$\boldsymbol{y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}}$

(4)　$y-5=\dfrac{-3-5}{7-3}(x-3)$ より，$\boldsymbol{y=-2x+11}$

(5)　ともに，x座標が-2だから，$\boldsymbol{x=-2}$

(6)　$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$ より，$\boldsymbol{y=-\dfrac{3}{2}x+3}$

9　(1)　平行な直線の傾きは1より，

$y-3=x-8$　よって，$\boldsymbol{y=x-5}$

(2)　$y-(-5)=-4\{x-(-3)\}$ より

$\boldsymbol{y=-4x-17}$

(3)　垂直な直線の傾きは$\dfrac{1}{2}$より，

$y-(-1)=\dfrac{1}{2}(x-2)$

よって，$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}x-2}$

(4)　$y-(-2)=-\dfrac{1}{3}(x-6)$ より，

$\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{3}x}$

10　(1)　ABの中点の座標は$(2,\ -1)$，ABの傾き

は $\frac{-4-2}{3-1}=-3$ より，求める直線の方程式は，

$y-(-1)=\frac{1}{3}(x-2)$ より，$\boldsymbol{y=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}}$

(2) ABの垂直二等分線は $y=\frac{3}{2}$

ACの中点は $\left(\frac{3}{2},\ 1\right)$，ACの傾きは $\frac{2}{3}$ だから，

ACの垂直二等分線は，$y-1=-\frac{3}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)$

より，$y=-\frac{3}{2}x+\frac{13}{4}$

これに $y=\frac{3}{2}$ を代入して，$x=\frac{7}{6}$

よって，**外心の座標は** $\boldsymbol{\left(\frac{7}{6},\ \frac{3}{2}\right)}$

CからABにおろした垂線の方程式は $y=2$
BからACにおろした垂線の方程式は，

ACの傾きが $\frac{2}{3}$ より，$y=-\frac{3}{2}x+3$

これに $y=2$ を代入して，$x=\frac{2}{3}$

よって，**垂心の座標は** $\boldsymbol{\left(\frac{2}{3},\ 2\right)}$

【p. 35】

11 **類題** 点Bの座標を $(p,\ q)$ とする。

線分ABの中点 $\left(\frac{p+2}{2},\ \frac{q+6}{2}\right)$ が直線

$2x-4y+3=0$ 上にあるから，x，y を代入して，

$2\cdot\frac{p+2}{2}-4\cdot\frac{q+6}{2}+3=0$

よって，$p-2q=7$ ……①

直線 $2x-4y+3=0$ の傾きは $\frac{1}{2}$ で，この直線と線分ABとは垂直だから，

$\frac{q-6}{p-2}\times\frac{1}{2}=-1$

よって，$2p+q=10$ ……②

①，②を解いて，$p=\frac{27}{5}$，$q=-\frac{4}{5}$

ゆえに，$\mathbf{B}\boldsymbol{\left(\frac{27}{5},\ -\frac{4}{5}\right)}$

12 (1) 線分ABを $2:1$ に内分する点を
$\mathrm{C}(c_1,\ c_2)$ とすると，

$c_1=\frac{1\times(-2)+2\times4}{2+1}=2$，$c_2=\frac{1\times0+2\times4}{2+1}=\frac{8}{3}$

線分ABの傾きは，$\frac{4-0}{4-(-2)}=\frac{2}{3}$

よって，$\left(2,\ \frac{8}{3}\right)$ を通り，傾き $-\frac{3}{2}$ の直線が求める直線となる。

$y-\frac{8}{3}=-\frac{3}{2}(x-2)$ より，$\boldsymbol{9x+6y=34}$

(2) $x-y=3-2a$ ……①，$2x+y=5-a$ ……②，
$x+2y=8-2a$ ……③とする。

①，②より，$x=\frac{8}{3}-a$，$y=-\frac{1}{3}+a$

これらを③に代入して解いて，$\boldsymbol{a=2}$

13 (1) $2x-1=-x+5$ より，$x=2$
このとき，$y=3$　よって，**(2，3)**

(2) 2式より，y を消去して，$x=-2$
このとき，$y=-1$　よって，**(−2，−1)**

14 $x+ay+1=0$ ……①
$(a-3)x+(a+5)y+2=0$ ……②

(1) ①と②が平行であるためには，
$1\cdot(a+5)-(a-3)a=0$ かつ $1\cdot2-(a-3)\cdot1\neq0$
よって，$a^2-4a-5=0$，$(a+1)(a-5)=0$
また，$a\neq5$ より，$\boldsymbol{a=-1}$

(2) ①と②が垂直であるためには，
$1\cdot(a-3)+a(a+5)=0$，$a^2+6a-3=0$
よって，$\boldsymbol{a=-3\pm2\sqrt{3}}$

(3) ①と②が一致するためには，(1)において，
$1\cdot2-(a-3)\cdot1=0$　よって，$\boldsymbol{a=5}$

(4) ①と②が交わるためには，(1)において，
$1\cdot(a+5)-a(a-3)\neq0$
よって，$\boldsymbol{a\neq-1}$，$\boldsymbol{a\neq5}$ **であるすべての実数。**

15 (1) $(1,\ -1)$，$(2,\ 1)$ を通る直線の傾きは，

$\frac{1-(-1)}{2-1}=2$ ……①

$(2,\ 1)$，$(-3,\ a)$ を通る直線の傾きは，

$\frac{1-a}{2-(-3)}=\frac{1-a}{5}$ ……②

①と②が等しいのだから，

$2=\frac{1-a}{5}$ を解いて，$\boldsymbol{a=-9}$

(2) $\frac{0-(-8)}{-1-1}=\frac{a^2-(-8)}{a-1}$ を解いて，

$(a+2)^2=0$　よって，$\boldsymbol{a=-2}$

【p. 36】 **3 直線の方程式(2)**

16 (1) 求める直線の方程式は，
$x-2y-4+k(2x+y-1)=0$ ……①
原点を通るから，①に $x=y=0$ を代入して，
$k=-4$　①に代入して，$\boldsymbol{7x+6y=0}$

(2) $x+y+1+k(x+2y+3)=0$ ……①

$x=2$，$y=-1$ を代入して，$k=-\frac{2}{3}$

これを①に代入して，$\boldsymbol{x-y-3=0}$

17 (1) $\frac{|-10|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\boldsymbol{2}$

(2) $\frac{|3+4-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\boldsymbol{3\sqrt{2}}$

(3) $\frac{|2\cdot(-1)-2-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\boldsymbol{\frac{7\sqrt{5}}{5}}$

(4) $\frac{|1\cdot5+0\cdot(-3)+2|}{\sqrt{1^2+0^2}}=\boldsymbol{7}$

18 (1) $S=\frac{1}{2}|2\cdot4-(-3)\cdot(-1)|=\boldsymbol{\frac{5}{2}}$

直線Q_1Q_2の方程式は$k=-1$を代入して,
$ax+by=1$
この式と$x^2+y^2=1$とからyを消去して,
$b^2x^2+(1-ax)^2=b^2$ ……①
点Qを$(X,\ Y)$とすると,Xは,①の2つの解の和の半分であるから,

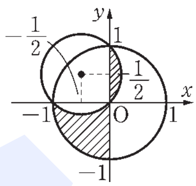
$X=\dfrac{a}{a^2+b^2}$　また,$Y=\dfrac{b}{a^2+b^2}$

よって,$a=\dfrac{X}{X^2+Y^2}$,$b=\dfrac{Y}{X^2+Y^2}$ ……②

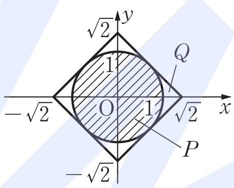
点Pは円Cの外部の点だから,$a^2+b^2>1$,また,条件より$a(a-b+1)<0$
これらに②を代入して

$$\begin{cases} X^2+Y^2<1 \\ X(X^2+Y^2+X-Y)<0 \end{cases}$$

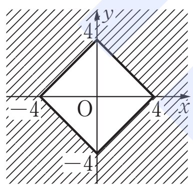
よって,右の図の斜線部分で境界を含まない。



11 (1) $x^2+y^2\leqq1$の表す領域をP,$|x|+|y|\leqq\sqrt{2}$の表す領域をQとする。
P,Qの表す領域は右図のようになり,
図より,$P\subset Q$
よって,
$x^2+y^2\leqq1$ならば
$|x|+|y|\leqq\sqrt{2}$



(2) $|x|+|y|\geqq4$の表す領域をP,
$x^2+y^2-4y\geqq k^2-4$の表す領域をQとする。
Qは,$x^2+(y-2)^2\geqq k^2$ ……①
と変形できるので,中心$(0,\ 2)$,半径$|k|$の円の外部及び周上の領域。Pは,直線$x+y=4$,$-x+y=4$,$x-y=4$,$-x-y=4$で囲まれる四角形の外部及び周上の領域。

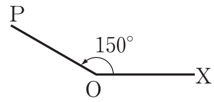


①が,直線$x+y=4$及び直線$-x+y=4$に接するとき,$|k|=\dfrac{|0+2-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$
よって,図より,$P\subset Q$が成り立つとき,
$|k|\leqq\sqrt{2}$
したがって,求めるkの範囲は $\boldsymbol{-\sqrt{2}\leqq k\leqq\sqrt{2}}$

第4章 三角関数

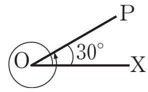
【p. 52】 ❶ 一般角と三角関数

1 (1)



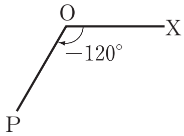
$150°+360°\times n$
(nは整数)
第2象限

(2)



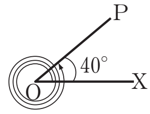
$30°+360°\times n$
(nは整数)
第1象限

(3)



$-120°+360°\times n$
(nは整数)
第3象限

(4)



$40°+360°\times n$
(nは整数)
第1象限

2 (1) $\dfrac{7}{6}\pi$　(2) $\dfrac{5}{3}\pi$

(3) $-\dfrac{3}{4}\pi$　(4) $\dfrac{\pi}{8}$

3 弧の長さl,面積Sとする。

(1) $l=\dfrac{\pi}{3}$,$S=\dfrac{\pi}{3}$　(2) $l=\dfrac{5\sqrt{5}}{4}\pi$,$S=\dfrac{25}{8}\pi$

4 $\sin\theta$,$\cos\theta$,$\tan\theta$の順

(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$-\dfrac{1}{2}$,$-\sqrt{3}$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,-1

(3) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$\dfrac{1}{2}$,$-\sqrt{3}$　(4) -1,0,なし

【p. 53】

5 類題 (1) $\theta=\dfrac{\pi}{6}$,$\dfrac{11}{6}\pi$

(2) $\theta=\dfrac{5}{4}\pi$,$\dfrac{7}{4}\pi$　(3) $\theta=0$,$\dfrac{2}{3}\pi$

(4) $\sin3\theta=-1$を満たす3θは,nを整数として
$3\theta=\dfrac{3}{2}\pi+2n\pi$
これより,範囲内のθは,
$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi}$

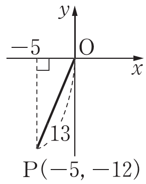
6 動径OPが始線OXとなす角の1つをαとすると,OPの表す一般角は$\alpha+2n\pi$ (nは整数)

(1) $\dfrac{3}{4}\pi+2n\pi$ (nは整数)

(2) $-\dfrac{2}{3}\pi+2n\pi$ (nは整数)

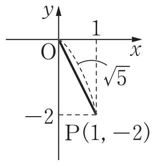
(3) $-\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ (nは整数)

7 (1) 第 3 象限に右の図のように点Pをとると，点Pの y 座標は -12



$\boldsymbol{\sin\theta=-\frac{12}{13}}$，$\boldsymbol{\tan\theta=\frac{12}{5}}$

(2) 第 4 象限に点P(1，-2)をとると，$\mathrm{OP}=\sqrt{5}$



$\boldsymbol{\sin\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}}$，

$\boldsymbol{\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}}$

8 $\sqrt{2}\sin^2 x-\sin x=0$

$\sin x(\sqrt{2}\sin x-1)=0$

$\sin x=0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\boldsymbol{x=0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \pi}$

【p. 54】 ❷ 三角関数の性質

9 (1) θ は第 3 象限の角だから $\cos\theta<0$

よって，$\boldsymbol{\cos\theta}=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=\boldsymbol{-\frac{4}{5}}$

$\boldsymbol{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$

(2) $\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$，$\tan\theta=-\frac{\sqrt{5}}{2}$

10 $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ に代入して，

$\cos^2\theta=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ これより，$\boldsymbol{\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

$\boldsymbol{\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$ **(複号同順)**

11 (1) 左辺$=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta=$右辺

(2) $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ だから

左辺$=(1+\tan^2\theta)(1-\tan^2\theta)\cos^2\theta+\tan^2\theta$

$=\frac{1}{\cos^2\theta}(1-\tan^2\theta)\cos^2\theta+\tan^2\theta$

$=(1-\tan^2\theta)+\tan^2\theta=1=$右辺

12 (1) $-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$　(4) $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(5) $-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$　(6) $-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$

13 (1) $\cos 220^\circ=\cos(\pi+40^\circ)=-\cos 40^\circ$

$=-\sin 50^\circ=\boldsymbol{-a}$

(2) $\tan(-130^\circ)=-\tan 130^\circ=\tan 50^\circ$

$=\frac{\sin 50^\circ}{\cos 50^\circ}=\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}=\boldsymbol{\frac{a\sqrt{1-a^2}}{1-a^2}}$

(3) $\sin(-230^\circ)=-\sin 230^\circ=-\sin(\pi+50^\circ)$

$=\sin 50^\circ=\boldsymbol{a}$

(4) $\cos(-40^\circ)=\cos 40^\circ=\sin 50^\circ=\boldsymbol{a}$

【p. 55】

14 類題 与式$=\frac{(1-\sin\theta)+(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$=\frac{2}{1-\sin^2\theta}=\boldsymbol{\frac{2}{\cos^2\theta}}$

$\boldsymbol{=2(1+\tan^2\theta)}$

15 (1) 与式$=\sin\theta\sin\theta-\cos\theta(-\cos\theta)$

$=\sin^2\theta+\cos^2\theta=\boldsymbol{1}$

(2) 与式$=-\tan\theta\cos\theta+(-\cos\theta)\tan\theta$

$=-\sin\theta-\sin\theta=\boldsymbol{-2\sin\theta}$

(3) 与式$=\cos^2\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta$

$=\boldsymbol{2}$

16 (1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2$

$=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{16}$ より

$\sin\theta\cos\theta=-\frac{15}{32}$

$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$=\left(\frac{1}{4}\right)^3-3\times\left(-\frac{15}{32}\right)\times\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{47}{128}}$

(2) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$ より

$\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$

これより，$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+\frac{8}{9}=\frac{17}{9}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，$\sin\theta\geqq 0$

また，$\sin\theta\cos\theta>0$ であるから，$\cos\theta>0$

よって，$\sin\theta+\cos\theta>0$ より，$\sin\theta+\cos\theta=\boldsymbol{\frac{\sqrt{17}}{3}}$

$\sin^3\theta-\cos^3\theta$

$=(\sin\theta-\cos\theta)^3+3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)$

$=\left(\frac{1}{3}\right)^3+3\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{13}{27}}$

17 左辺$=\frac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}$

$=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$

(分母，分子を $\cos\theta$ で割って)

$=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=$右辺

18 $x+y=2\sin\theta$ より，$\sin\theta=\frac{1}{2}(x+y)$

$x-y=2\cos\theta$ より，$\cos\theta=\frac{1}{2}(x-y)$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入して

$\frac{1}{4}(x+y)^2+\frac{1}{4}(x-y)^2=1$ よって，$\boldsymbol{x^2+y^2=2}$

別解 $x^2+y^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2$

$=2$

【p. 70】 ❶ 指数の拡張

1 (1) ± 9　(2) ± 3　(3) -3　(4) 2
(5) -4　(6) 5

2 (1) 2　(2) 4　(3) 6　(4) 2
(5) 3　(6) 25

3 (1) $\dfrac{1}{2}$　(2) -3　(3) -3
(4) -4　(5) $\dfrac{2}{3}$　(6) $\dfrac{1}{8}$

4 (1) 1　(2) $\dfrac{1}{3}$　(3) 4

【p. 71】

5 類題 (1) $a^{\frac{7}{12}}$　(2) 18

6 (1) 25　(2) 3　(3) $9\sqrt[3]{2}$

7 (1) $a^{\frac{6}{5}}$　(2) $a^{-\frac{1}{6}}$　(3) $a^{\frac{5}{12}}$　(4) $a^{\frac{1}{6}}$

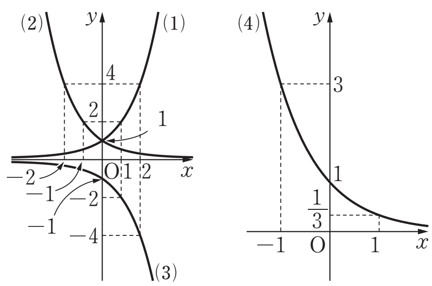
8 (1) $\dfrac{8}{3}$　(2) $30\sqrt[3]{6}$　(3) $\dfrac{(a-1)^2}{a}$
(4) $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$　(5) $a-\dfrac{1}{b}$
(6) $a-\dfrac{1}{a}$

9 分子は $(a^x+a^{-x})(a^{2x}-1+a^{-2x})$
ゆえに，(与式)$=a^{2x}-1+\dfrac{1}{a^{2x}}=\boldsymbol{\dfrac{21}{5}}$

10 $2x^3+6x=2x(x^2+3)$ に x の値を代入すると，
$\left(2^{\frac{4}{3}}-2^{\frac{2}{3}}\right)\left(2^{\frac{2}{3}}+2^{-\frac{2}{3}}+1\right)=\mathbf{3}$

【p. 72】 ❷ 指数関数とそのグラフ

11 (1)，(2)は y 軸に関して対称，(1)，(3)は x 軸に関して対称



12 (1) 減少，x 軸　(2) $x=0$，1，$(0,\ 1)$
(3) $(1,\ 3)$

13 (1) x 軸に関して対称
(2) y 軸に関して対称
(3) 原点に関して対称　(4) 一致する
(5) x 軸方向に 1 平行移動
(6) y 軸方向に -1 平行移動

14 (1) 2^{-1}，2^0，2^2　(2) 0.5^3，0.5^2，0.5^0
(3) 0.9^3，0.9^2，0.9^0，0.9^{-3}
(4) $\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[5]{4}$，$\sqrt{2}$

【p. 73】

15 類題 (1) $3^x=X$ とすると，
$3X^2+2X-1=0$，$(3X-1)(X+1)=0$
$X>0$ より，$X=\dfrac{1}{3}$，$3^x=\dfrac{1}{3}$，$\boldsymbol{x=-1}$
(2) $2^x=X$ とすると，$X^2-2X+16<8X$
$(X-8)(X-2)<0$，$2<2^x<8$
したがって，$\boldsymbol{1<x<3}$

16 (1) $\sqrt[3]{0.5}$，$\sqrt[4]{0.5}$　(2) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^2$，$1$，$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}$
(3) それぞれ 6 乗すると，$2^{\frac{1}{2}\times 6}=2^3=8$
$3^{\frac{1}{3}\times 6}=3^2=9$，$7^{\frac{1}{6}\times 6}=7$　よって，小さい順に，
$\boldsymbol{\sqrt[6]{7}}$，$\boldsymbol{\sqrt{2}}$，$\boldsymbol{\sqrt[3]{3}}$

17 (1) $x=3$　(2) $x=-\dfrac{7}{2}$　(3) $x=3$
(4) $x=-3$　(5) $x<3$　(6) $x>3$
(7) $x\leqq -\dfrac{2}{3}$
(8) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=X$ とおくと，
$1\leqq X\leqq 2$　よって，$\boldsymbol{-1\leqq x\leqq 0}$

18 (1) $\begin{cases}\text{最大値 } 4 & (x=0\text{ のとき})\\ \text{最小値 } \dfrac{7}{2} & (x=1\text{ のとき})\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\text{最大値 } \dfrac{3}{2} & (x=2\text{ のとき})\\ \text{最小値 } \dfrac{4}{9} & (x=-1\text{ のとき})\end{cases}$

19 $2^x=X$，$3^y=Y$ とすると，
$\begin{cases}\dfrac{X}{2}+3Y=11\\ 4X-\dfrac{Y}{3}=15\end{cases}$　これを解いて，$\begin{cases}X=4\\ Y=3\end{cases}$
よって，$\boldsymbol{x=2}$，$\boldsymbol{y=1}$

【p. 74】 ❸ 対数とその性質

20 (1) $\log_8 64=2$　(2) $\log_2 0.25=-2$
(3) $\log_3 1=0$　(4) $5^2=25$
(5) $3^{-4}=\dfrac{1}{81}$　(6) $(\sqrt{2})^6=8$

21 (1) $p+q+r$　(2) $2p-q-r$
(3) $\dfrac{1}{2}(2p+q+r)$
(4) 底を a に変換する。(与式)$=\dfrac{\log_a y}{\log_a x}=\boldsymbol{\dfrac{q}{p}}$

22 (1) $\log_a \dfrac{x}{y}$　(2) $\log_a x^2y$　(3) $\log_a x$

23 (1) $\log_{10}10=\mathbf{1}$　(2) $\log_2 2=\mathbf{1}$
(3) $\log_3 \dfrac{4\times 108}{2^4}=\log_3 3^3=\mathbf{3}$　(4) 2
(5) 底を 2 に変換する。
(与式)$=\log_2 3\times\dfrac{\log_2 4}{\log_2 3}=\log_2 4=\mathbf{2}$
(6) 底を 2 に変換する。

第6章　微分法・積分法

【p. 84】 ❶ 極限値，微分係数

1 (1) 6　(2) 1　(3) $-5a^3$　(4) 13

(5) 1

(6) 分子を有理化する。

$$\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

2 (1) $\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=\boldsymbol{6}$

(2) $\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=\boldsymbol{-2}$

(3) $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1}=\dfrac{(1+h)^3-1}{h}$

$=\boldsymbol{h^2+3h+3}$

3 (1) $f'(1)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\{-2(1+h)+1\}-(-2+1)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{-2h}{h}=\boldsymbol{-2}$

(2) $f'(2)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\boldsymbol{5}$

(3) $f'(a)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\boldsymbol{4a-1}$

(4) $f'(t)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}=\boldsymbol{3t^2}$

【p. 85】

4 類題 $\lim\limits_{x\to1}(ax+b)=a+b=0$ より，$b=-a$

(与式)$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{ax-a}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{a(x-1)}{(x+3)(x-1)}$

$=\dfrac{a}{4}=\dfrac{1}{2}$

ゆえに，$\boldsymbol{a=2}$，$\boldsymbol{b=-2}$

5 2つの極限値は異なるから，$a\neq0$

$f(x)=(x-a)(x+a)(x-p)$ と表せる。

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}(x+a)(x-p)=2a(a-p)$ より，

$2a(a-p)=-2$ ……①

$\lim\limits_{x\to-a}\dfrac{f(x)}{x+a}=\lim\limits_{x\to-a}(x-a)(x-p)=2a(a+p)$ より，

$2a(a+p)=6$ ……②

①+②より，$4a^2=4$，$a=\pm1$

$a=1$ のとき，①より，$p=2$

$a=-1$ のとき，①より，$p=-2$

よって，$f(x)=(x-1)(x+1)(x-2)$

$=\boldsymbol{x^3-2x^2-x+2}$

または，$f(x)=(x+1)(x-1)(x+2)$

$=\boldsymbol{x^3+2x^2-x-2}$

6 (1) $3f'(a)$　(2) $-f'(a)$

7 (1) $\dfrac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a}=\boldsymbol{2a-1}$

(2) $2a-1=5$，$\boldsymbol{a=3}$

8 与式$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{af(x)-af(a)+af(a)-xf(a)}{x-a}$

$=a\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-f(a)\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{x-a}$

$=\boldsymbol{af'(a)-f(a)}$

【p. 86】 ❷ 導関数

9 (1) $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to0}(2x+h)=\boldsymbol{2x}$

(2) $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\boldsymbol{2x+2}$

(3) $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\boldsymbol{4x+3}$

(4) $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\boldsymbol{3x^2}$

(5) $f'(x)=2ax+b$

(6) $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}\cdot\dfrac{-h}{x(x+h)}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{-1}{x(x+h)}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{x^2}}$

10 (1) $y'=2x-4$

(2) $y'=3x^2+2$

(3) $y'=-1+x$

(4) $y'=2x-1$

(5) $y=x^2+3x+2$ より $\boldsymbol{y'=2x+3}$

または，積の導関数の公式により

$y'=(x+1)'\cdot(x+2)+(x+1)\cdot(x+2)'$

$=1\cdot(x+2)+(x+1)\cdot1=\boldsymbol{2x+3}$

(6) $y'=2x-1$

11 (1) $\dfrac{dy}{dx}=12-10x$　(2) $\dfrac{dV}{dr}=4\pi r^2$

(3) $\dfrac{dh}{dt}=v_0-gt$

12 (1) $f(x)=ax^2+bx+c$ とおく。

$x^2f(x)=ax^4+bx^3+cx^2$

微分して，$(x^2f(x))'=4ax^3+3bx^2+2cx$

よって，$4ax^3+3bx^2+2cx=-2x^3+3x^2+x$

両辺の係数を比較して，

$4a=-2$，$3b=3$，$2c=1$

よって，$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=1$，$c=\dfrac{1}{2}$

$\boldsymbol{f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{1}{2}}$

(2) $f'(x)=-x+1$

$f'(-1)=\boldsymbol{2}$

【p. 87】

13 類題 $f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと，

$f(2)=4a+2b+c=2$ ……①

$f'(x)=2ax+b$ より

$f'(0)=b=-3$

$f'(-1)=-2a-3=-4 \quad a=\frac{1}{2}$

①に $a=\frac{1}{2}$，$b=-3$ を代入して，$c=6$

これより，$\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+6}$

14 (1) $y'=3x^2-4x+1$ (2) $y'=9x^2-4x+3$

(3) $y'=6(2x+3)^2$

(4) $y'=5x^4-3x^2+2x-2$

(5) $y'=3x^2-18x+23$

(6) $y'=16x^3-18x+6$

15 (1) $f(x)$ を n 次式とする。$n\geqq 4$ とすると，

左辺は $2n-1$ 次，右辺は n 次

よって，$2n-1=n$ とすると，$n=1$ より，矛盾。

よって，$n\leqq 3$ であるから，両辺の次数を比較して，$2n-1=3$，$n=2$　よって，$f(x)$ は **2 次式**。

(2) $f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと，

$f'(x)=2ax+b$

$(ax^2+bx+c)(2ax+b)$

$=2ax+b+ax^2+bx+c+2x^3+2x^2-1$

$2a^2x^3+3abx^2+(b^2+2ac)x+bc$

$=2x^3+(a+2)x^2+(2a+b)x+b+c-1$

係数を比較して，$a=1$，$b=1$，$c=1$

よって，$\boldsymbol{f(x)=x^2+x+1}$

16 (1) $a=1$，$b=5$，$c=7$

(2) $a=1$，$b=5$，$c=8$，$d=3$

17 2 次式 $(x-1)^2$ で割った余りは 1 次式か定数であるから，それを $ax+b$ とし，商を $g(x)$ とおくと，

$x^n-1=g(x)\cdot(x-1)^2+ax+b$ ……①

両辺を x で微分して

$nx^{n-1}=g'(x)\cdot(x-1)^2+g(x)\cdot 2(x-1)+a$ ……②

①，②で，$x=1$ を代入すると

$a+b=0$，$a=n$

よって，$a=n$，$b=-n$

ゆえに，求める余りは $\boldsymbol{n(x-1)}$

【p. 88】 ❸ 接線の方程式

18 (1) **接線の傾きは** $f'(2)=\boldsymbol{2}$

接線の方程式は　$y-0=2(x-2)$

よって，$\boldsymbol{y=2x-4}$

(2) 傾き：$f'(0)=2$　接線　$y=2x+1$

(3) 傾き：$f'(-1)=-1$　接線　$y=-x$

(4) 傾き：$f'(3)=\boldsymbol{-23}$　接点は $(3,\ -15)$

接線は，$\boldsymbol{y=-23x+54}$

19 (1) $\tan\theta=f'(2)=1$　よって，$\boldsymbol{\theta=45^\circ}$

(2) $\tan\theta=f'(2)=-1$　よって，$\boldsymbol{\theta=-45^\circ}$

20 接線の傾きは $f'(x_0)$，法線の傾きは $-\frac{1}{f'(x_0)}$

(1) $f'(x)=2x-4$ より，$f'(0)=-4$

よって，**法線の傾きは** $\boldsymbol{\frac{1}{4}}$，法線の方程式は

$y-2=\frac{1}{4}(x-0)$，$\boldsymbol{y=\frac{1}{4}x+2}$

(2) $f'(-1)=-6$

法線の傾き $\boldsymbol{\frac{1}{6}}$，法線の方程式　$\boldsymbol{y=\frac{1}{6}x+\frac{43}{6}}$

(3) $x=5$ のとき，$y=7$　$f'(5)=6$

よって，**法線の傾き** $\boldsymbol{-\frac{1}{6}}$，

法線の方程式　$\boldsymbol{y=-\frac{1}{6}x+\frac{47}{6}}$

21 (1) $y'=6x-6$，$6x-6=6$ より，$x=2$

よって，接点は $(2,\ -1)$，接線は　$\boldsymbol{y=6x-13}$

(2) $y'=3x^2-4x=3x\left(x-\frac{4}{3}\right)=0$

よって，$x=0$，$\frac{4}{3}$ に対応する接線で接点は

$(0,\ 5)$，$\left(\frac{4}{3},\ \frac{103}{27}\right)$ で **2 本**

(3) (2)より　$\boldsymbol{y=5}$，$\boldsymbol{y=\frac{103}{27}}$

【p. 89】

22 類題　接点を $(x_0,\ x_0{}^2)$ とする。

$y'=2x$ であるから，接線の方程式は，

$y-x_0{}^2=2x_0(x-x_0)$ ……①

この接線は $(1,\ -3)$ を通るから，

$-3-x_0{}^2=2x_0(1-x_0)$

これを解いて，$x_0=3$，-1

これらを①に代入して，求める接線の方程式は

$\boldsymbol{y=-2x-1}$，$\boldsymbol{y=6x-9}$

23 接点を $(x_0,\ x_0{}^3)$ とする。

$y'=3x^2$ であるから，接線の方程式は，

$y-x_0{}^3=3x_0{}^2(x-x_0)$ ……①

この接線は $(0,\ -2)$ を通るから，

$-2-x_0{}^3=3x_0{}^2(-x_0)$

これを解いて，実数の x_0 は，$x_0=1$

これを①に代入して，求める接線の方程式は，

$\boldsymbol{y=3x-2}$

24 $(1,\ 2)$ を通るから　$1+a+b=2$ ……①

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

よって，$f'(1)=3+2a+b=-1$ ……②

①，②から，$\boldsymbol{a=-5}$，$\boldsymbol{b=6}$

25 (1) $y=x^2+2$ 上の点 $(p,\ p^2+2)$ における接線は　$y=2px-p^2+2$ ……①

$y=-x^2$ 上の点 $(q,\ -q^2)$ における接線は

$y=-2qx+q^2$ ……②

①，②が一致するから，

$2p=-2q$，$-p^2+2=q^2$

よって，$p=\pm 1$，$q=\mp 1$　(複号同順)

共通接線は　$\boldsymbol{y=\pm 2x+1}$

(2) 2 つの放物線の交点の x 座標は

$x^2=(x-p)^2$ より $x=\frac{1}{2}p$

$y'=2x$，$y'=2(x-p)$ より，2 つの放物線の

$x=\frac{1}{2}p$ における接線の傾きはそれぞれ

$2\times\frac{1}{2}p=p,\ 2\left(\frac{1}{2}p-p\right)=-p$

よって，$p(-p)=-1$　ゆえに，$\boldsymbol{p=\pm1}$

26　$y=2x^3$ から $y'=6x^2$，$y=3x^2+a$ から

$y'=6x$　よって，$6x^2=6x$ より，$x=0$，$x=1$

点Aの座標は $(0,\ 0)$，$(1,\ 2)$

これらの点の座標を $y=3x^2+a$ に代入すれば

$a=0$，$a=-1$

以上から　$\boldsymbol{a=0}$，**A(0，0)；**$\boldsymbol{a=-1}$，**A(1，2)**

27　2つの接点を $\mathrm{A}(a,\ a^2+2a+1)$

$\mathrm{B}(b,\ b^2+2b+1)$ とする。接線は直交するから，

$(2a+2)(2b+2)=-1$

$4(a+1)(b+1)=-1$ より，

$ab+a+b+1=-\frac{1}{4}$ ……①

2つの接線は，

$y-(a^2+2a+1)=(2a+2)(x-a)$

$y-(b^2+2b+1)=(2b+2)(x-b)$

より　$y=(2a+2)x-a^2+1$ ……② と，

$y=(2b+2)x-b^2+1$

この交点の x 座標は，

$(2a+2)x-a^2+1=(2b+2)x-b^2+1$

より，$x=\frac{a+b}{2}$ ……③

③を②に代入すると，$y=a+b+ab+1$ ……④

①より，④の値は $-\frac{1}{4}$

求める交点の軌跡の方程式は　$\boldsymbol{y=-\frac{1}{4}}$

【p. 90】　❹ 関数の増減と極大・極小

28　$y'=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

(1)　$y'=0$ より　$\boldsymbol{x=-1,\ 3}$

(2)　$y'>0$ より　$\boldsymbol{x<-1,\ 3<x}$

(3)　$y'<0$ より　$\boldsymbol{-1<x<3}$

29　(1)　つねに減少　　(2)　つねに増加

30　(1)　$y=x^3-3x+4$，$y'=3x^2-3$

$y'=0$ より　$\boldsymbol{x=\pm1}$

増減表は右のようになる。

x	…	-1	…	1	…
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大	↘	極小	↗

(2)　(1)より

$x<-1$，$1<x$ のとき，増加する

$-1<x<1$ のとき，減少する

(3)　$x=-1$ のとき，極大値 6

$x=1$ のとき，極小値 2

31　$f(-1)=4$ より　$-1+a-b+c=4$ ……①

$x=-1$，$x=3$ のとき極値をとるから

$f'(-1)=0$，$f'(3)=0$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$ で

$f'(-1)=3-2a+b=0$ ……②

$f'(3)=27+6a+b=0$ ……③

①，②，③より　$a=-3$，$b=-9$，$c=-1$

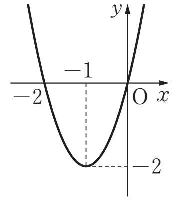
よって，$f(x)=x^3-3x^2-9x-1$

$x=3$ のとき極小値をとり，極小値 $f(3)=\boldsymbol{-28}$

32　(1)　$y=4x+2x^2$

$y'=4+4x$

x	…	-1	…
y'	$-$	0	$+$
y	↘	-2	↗

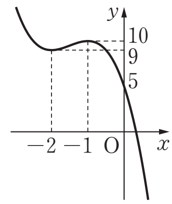


(2)　$y=-2x^3-9x^2-12x+5$

$y'=-6x^2-18x-12=-6(x+1)(x+2)$

$y'=0$ より　$x=-2$，-1

x	…	-2	…	-1	…
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小	↗	極大	↘



極大値 10　$(x=-1)$

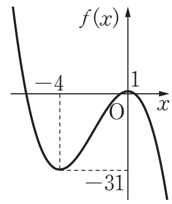
極小値 9　$(x=-2)$

(3)　$f(x)=-x^3-6x^2+1$

$f'(x)=-3x^2-12x=-3x(x+4)$

$f'(x)=0$ より　$x=0$，-4

x	…	-4	…	0	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘



極大値 1　$(x=0)$

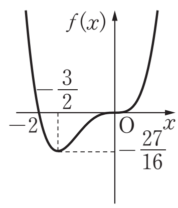
極小値 -31　$(x=-4)$

(4)　$f(x)=2x^3+x^4$

$f'(x)=6x^2+4x^3=2x^2(3+2x)$

$f'(x)=0$ より　$x=0$，$-\frac{3}{2}$

x	…	$-\frac{3}{2}$	…	0	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗	0	↗



極小値 $-\frac{27}{16}$　$\left(x=-\frac{3}{2}\right)$

【p. 91】

33　類題　$f(x)=x^3+3x^2-kx+2$

$f'(x)=3x^2+6x-k$

(1)　$f(x)$ が極値をもつのは $f'(x)=0$ が異なる 2 実数解をもつときであるから，

$\frac{D}{4}=9+3k>0$　よって，$\boldsymbol{k>-3}$

(2)　$f(x)$ が極値をもたないのは $f'(x)=0$ が重解か 2 つの虚数解をもつときであるから，

$\frac{D}{4}\leqq0$ より　$\boldsymbol{k\leqq-3}$