数学Ⅲ

数学Ⅲ

特　色

本書は，学習指導要領をふまえ，各単元の標準的なレベルの問題を，年間を通じてじっくり完全マスターし，あわせて，受験への基礎対策用としても使用できるように編集されています。

数学は体系が整然としている学問ですから，１つの単元を把握するためには，それを構成している基本事項を正確に理解し，さらに，その単元における典型的な問題の解法パターンを習得することが必要です。

そこで本書では，各単元において，基本事項や重要事項を習得するための基本レベルの問題を取り上げ，それらを反復練習することでまず基礎を固め，続いて，単元の内容をより深く理解する上で必須となる標準レベルの問題を精選して，その解き方をパターンとして学ぶことによって，幅広い応用力が定着するようにしました。

構　成

○数学Ⅲで学習する事項を，５章35セクションに分けました。
○各セクションは原則として見開き２ページ構成で，年間計画がたてやすいよう配慮されています。

☆１セクションの構成

（セクション）

学習の要点	言葉による基本事項の説明。 公式や計算法則の例示。
基本問題	新しく学習する内容についての理解度をチェックする。 基本レベルの問題で構成。
例　　題	単元を代表する標準レベルの問題を，解き方のパターンも含めて学習する。
標準問題 発展問題	例題の関連問題を解きながら，応用範囲の広い実戦力の養成をめざす。
章末問題	章全体のまとめと，程度の高い問題で応用力を養う。

もくじ

第 1 章　極　限

1　分数関数，無理関数

★学習の要点★

❶ **分数関数**

分数関数 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ のグラフは，関数 $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した直角双曲線で，漸近線は 2 直線 $x=p$，$y=q$ である。

❷ **無理関数**

(1)　無理関数 $y=\sqrt{ax}$ のグラフは，放物線 $y^2=ax$ の x 軸より上側の部分である。原点を含む。定義域は，$a>0$ のとき $x\geqq 0$，$a<0$ のとき $x\leqq 0$

(2)　無理関数 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ のグラフは，関数 $y=\sqrt{ax}$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものである。

● 基本問題 ●●

1　［**分数関数のグラフ**］　次の関数のグラフをかけ。また，その漸近線の方程式を求めよ。

(1)　$y=\dfrac{3}{x-2}$　　(2)　$y=\dfrac{1}{x-1}+3$

(3)　$y=\dfrac{x+1}{x-1}$　　(4)　$y=\dfrac{2x+1}{x+2}$

2　［**分数関数のグラフと直線の共有点**］　次の 2 つの関数のグラフの共有点の座標を求めよ。

(1)　$y=\dfrac{x-2}{x+3}$，$y=2$　　(2)　$y=\dfrac{2}{x-2}$，$y=x-1$

(3)　$y=\dfrac{5}{x+1}$，$y=x-3$　　(4)　$y=\dfrac{2x-1}{x+3}$，$y=x-3$

3　［**無理関数のグラフ①**］　次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y=\sqrt{2x}$　　(2)　$y=-\sqrt{x}$　　(3)　$y=\sqrt{-x}$

4　［**無理関数のグラフ②**］　次の関数のグラフをかけ。また，その定義域と値域を求めよ。

(1)　$y=\sqrt{x-1}$　　(2)　$y=\sqrt{2x+2}$　　(3)　$y=\sqrt{6-3x}$

例題 1　無理関数のグラフと直線との共有点

次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=\sqrt{x+6}$ のグラフと直線 $y=x$ の共有点の座標を求めよ。

(2)　不等式 $\sqrt{x+6}>x$ を解け。

着眼点　(1)　共有点の x 座標は，等式 $\sqrt{x+6}=x$ ……① を満たす x の値である。両辺を 2 乗し 2 次方程式を導いて解くが，得られた解を吟味する必要がある。①の右辺より，$x\geqq 0$ である。

(2)　グラフを利用する。

解　(1)　共有点の x 座標は，$\sqrt{x+6}=x$ の解である。

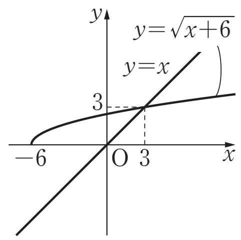
両辺を 2 乗して，$x+6=x^2$　　$(x+2)(x-3)=0$

$x\geqq 0$ より，$x=3$

これを $y=x$ に代入して，共有点は$(3,\ 3)$ ……答

(2)　$y=\sqrt{x+6}$ のグラフが直線 $y=x$ の上側にある x の値の範囲は，

$-6\leqq x<3$ ……答



5　**類題**　次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=\sqrt{x+1}$ のグラフと直線 $y=x-1$ の共有点の座標を求めよ。

(2)　不等式 $\sqrt{x+1}>x-1$ を解け。

▶ 標準問題 ◀◀

6　次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y=\dfrac{1}{2-x}+3$　　(2)　$y=\dfrac{3x+2}{2x+1}$　　(3)　$y=\dfrac{3-2x}{x-3}$

7　次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y=-\sqrt{x+2}-1$　　(2)　$y=\sqrt{3-x}+2$　　(3)　$y=-\sqrt{6-2x}+1$

8　次の不等式を解け。

(1)　$\dfrac{1}{x-2}>1$　　(2)　$\dfrac{3x+2}{x+4}\leqq x$

◆ 発展問題 ◆◆

9　曲線 $y=\sqrt{x+1}$ と直線 $y=x+k$ の共有点の個数を求めよ。ただし，k は定数とする。

ヒント　グラフを利用する。$\sqrt{x+1}=x+k$ の両辺を 2 乗して 2 次方程式を導き，その判別式を調べる。

2　逆関数，合成関数

★学習の要点★

❶　**逆関数**

関数 $y=f(x)$ で，x が y の関数として $x=g(y)$ と表されるとき，$g(x)$ を $f(x)$ の**逆関数**といい，$f^{-1}(x)$ で表す。

(1)　**$y=f(x)$ の逆関数の求め方**　x と y を入れかえて $x=f(y)$ とし，これを y について解いて，$y=f^{-1}(x)$ を求める。

(2)　関数とその逆関数とでは，定義域と値域が入れかわり，２つのグラフは直線 $y=x$ に関して対称である。

❷　**指数関数の逆関数**　$(a>0,\ a\neq 1)$

指数関数 $y=a^x$ の逆関数は，対数関数 $y=\log_a x$

対数関数 $y=\log_a x$ の逆関数は，指数関数 $y=a^x$

❸　**合成関数**

２つの関数 $y=f(x)$，$z=g(y)$ について，$f(x)$ の値域が $g(y)$ の定義域に含まれるとき，関数 $z=g(f(x))$ を，$f(x)$ と $g(x)$ の**合成関数**という。

$g(f(x))$ を $(g\circ f)(x)$ とも書く。

注　一般に，$(g\circ f)(x)\neq(f\circ g)(x)$

● 基本問題 ●●

10　［逆関数］　次の関数の逆関数を求めよ。また，それぞれの２つの関数のグラフをかけ。

(1)　$y=2x+2$　　(2)　$y=\dfrac{4}{x-3}$　　(3)　$y=x^2\quad(x\geqq 0)$

11　［逆関数の定義域・値域］　次の関数の逆関数の定義域，値域を求めよ。

(1)　$y=\sqrt{x+1}$　　(2)　$y=\dfrac{1}{x-2}\quad(x>2)$

12　［合成関数］　次の関数 $f(x)$，$g(x)$ について，合成関数 $(g\circ f)(x)$，$(f\circ g)(x)$ をそれぞれ x の式で表せ。

(1)　$f(x)=x-2$，$g(x)=x^2+1$　　(2)　$f(x)=\dfrac{2}{x}$，$g(x)=2x^2+1$

(3)　$f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$，$g(x)=\log_2 x$　　(4)　$f(x)=\log_{10}x$，$g(x)=\sqrt{x^2+3}$

例題 2 合成関数

$f(x)=-ax+3$，$g(x)=2x+1$ について，$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$ が成り立つように，定数 a の値を定めよ。

着眼点 一般に $(f\circ g)(x)\neq(g\circ f)(x)$ である。条件式から x についての恒等式をつくる。

解
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+1)=-a(2x+1)+3=-2ax+3-a$ ……①
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-ax+3)=2(-ax+3)+1=-2ax+7$ ……②

①，②より，$-2ax+3-a=-2ax+7$
これが x の恒等式だから，係数を比較して，$3-a=7$
よって，$a=-4$ ……答

13 **類題** $f(x)=-3x+p$，$g(x)=4x-6$ について，$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$ が成り立つように，定数 p の値を定めよ。

▶ 標準問題 ◀◀

14 次の関数の逆関数を求め，そのグラフをかけ。

(1) $y=-\dfrac{1}{2}x+2$　$(-4\leqq x\leqq 4)$　　(2) $y=4-x^2$　$(x\geqq 0)$

(3) $y=\dfrac{3x-3}{x-2}$　$(x>2)$　　(4) $y=\sqrt{2x-4}-1$

(5) $y=3^{-x}$　　(6) $y=\log_2(x-1)$

15 関数 $f(x)=ax+b$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ について，$f^{-1}(1)=2$，$f^{-1}(3)=-1$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

16 $f(x)=x+2$，$g(x)=x^2+1$，$h(x)=1-x$ のとき，$(h\circ(g\circ f))(x)=((h\circ g)\circ f)(x)$ が成り立つことを示せ。

◆ 発展問題 ◆◆

17 関数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ の逆関数が $f^{-1}(x)=\dfrac{4x-3}{-x+2}$ であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

ヒント $f^{-1}(x)=\dfrac{4x-3}{-x+2}$ の逆関数が $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ であると考えると求めやすい。

章末問題

A

1　関数 $y=\dfrac{-4x+6}{2x+1}$ のグラフの漸近線は，$x=\boxed{\quad}$，$y=\boxed{\quad}$ である。この関数が $y\leqq-6$ を満たすとき，x の値の範囲は $\boxed{\quad}$ である。

2　次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\sqrt{x+2}=x$　　(2)　$\dfrac{6}{x+4}+x\leqq1$

3　次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)=\dfrac{3x-1}{x-2}$，$g(x)=\dfrac{2x-1}{x-3}$ のとき，$g(f(x))$ を簡単にせよ。

(2)　関数 $f(x)=\dfrac{ax+1}{2x+b}$ の逆関数を $g(x)$ とする。$f(2)=9$，$g(1)=-2$ のとき，定数 a，b の値を求めよ。

4　第 n 項が次の式で与えられる数列の極限を調べよ。

(1)　$\dfrac{1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots\cdots+2n}$　　(2)　$\dfrac{4^n-3^n}{2^n+4^n}$

(3)　$\sqrt{n}\,(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\,)$　　(4)　$\log_{10}(n+1)-\log_{10}n$

5　次の極限を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to3-0}\frac{x^2-2x-3}{x^2-6x+9}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-x+1}{x^3+2}$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}}$　　(4)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\cos x-1}$

6　次の無限級数の和を求めよ。

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}\right)+\left(\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}\right)+\left(\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{3^7}\right)+\cdots\cdots$$

7　$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+1$　$(n\geqq1)$ によって帰納的に定義された数列を $\{a_n\}$ とする。一般項 a_n および極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^n}$ を求めよ。

B

8　$y=ax+1$ が $y=-\sqrt{x-1}$ と異なる2つの交点をもつような a の値の範囲を求めよ。

9　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{4x^2-12x+1}-(ax+b)\}=0$　(a，b は定数) が成り立つとき，$a=$ $\boxed{}$，$b=$ $\boxed{}$ である。また，このとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\{\sqrt{4x^2-12x+1}-(ax+b)\}=$ $\boxed{}$ である。

10　$a_n=\dfrac{2}{9n^2-1}+\dfrac{4}{9n^2-4}$　($n=1$，2，3，……) のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ を求めよ。

11　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-4}}{(x^2+2)^{n-1}}$ が収束するような実数 x の値の範囲を求めよ。

12　数列$\{a_n\}$は，$a_1=p$，$a_2=q$，$2a_{n+2}=(r+2)a_{n+1}-ra_n$　($n=1$，2，3，……) で定義されている。次の問いに答えよ。

(1)　一般項 a_n を求めよ。

(2)　数列$\{a_n\}$の収束，発散を調べ，収束する場合はその極限値を求めよ。

13　$a>0$，$b>0$ とし，x 軸上に定点A$(a,\ 0)$を，y 軸上に定点B$(0,\ b)$をとる。x 軸上に動点P$(p,\ 0)$，y 軸上に動点Q$(0,\ q)$があって，$p+q=a+b$ を満たすものとする。また，直線AB，PQの交点をRとする。点P，Qがそれぞれ点A，Bに近づくとき，点Rはどんな点に近づくか。

14　点Oを端点とする半直線OX，OYのなす角を 2θ　$\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。次の条件(A)，(B)を満たす円の列 C_1，C_2，C_3，……，C_n，……を作り，その面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3，……，S_n，……とする。

(A)　C_1 はOX，OYに接し，半径は1である。

(B)　各自然数 n に対して，C_{n+1} はOX，OYおよび C_n に接する。

(1)　図1のように円の列$\{C_n\}$をとるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_k$ を求めよ。

(2)　図2のように円の列$\{C_n\}$をとるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{9^n}\sum_{k=1}^{n}S_k$ が0以外の実数値になるように θ の値を定めよ。

図1

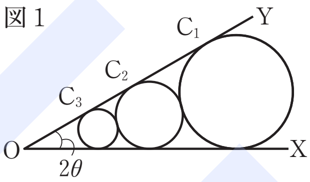
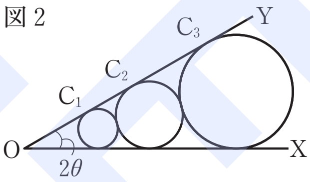


図2



ヒント　**8** グラフをかいて考える。$y=ax+1$ は点$(0,\ 1)$を通る直線である。　**9** $a>0$ であることに注意する。
10 $a_n=\left(\dfrac{1}{3n-1}-\dfrac{1}{3n+2}\right)+\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)$　**11** 公比は $\dfrac{x^4}{x^2+2}$　**12** (1)与えられた漸化式は $2(a_{n+2}-a_{n+1})=r(a_{n+1}-a_n)$ と変形できる。r の値によって場合分けする。　**13** 2直線AB，PQの方程式はそれぞれ $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$，$\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}=1$　**14** (1)円 C_n の半径を r_n とすると，$\sin\theta=\dfrac{r_n-r_{n+1}}{r_n+r_{n+1}}$　(2)$\sin\theta=\dfrac{r_{n+1}-r_n}{r_{n+1}+r_n}$

第2章 微分法

1 微分係数と導関数

★学習の要点★

❶ **微分係数の定義**

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

❷ **微分可能性**

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分係数をもつ(微分可能)ならば，関数 $f(x)$ は $x=a$ で連続である。
ただし，この逆は成り立たない。

❸ **導関数の定義**

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

● 基本問題 ●●

1 ［**微分係数**］ 次の関数 $f(x)$ について，〔　〕内の x の値における微分係数を定義に従って求めよ。

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$　〔$x=2$〕　　(2) $f(x)=\sqrt{x+2}$　〔$x=-1$〕

2 ［**微分可能性**］ 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=|x^2-2x|$ は，$x=2$ において微分係数をもたない(微分不可能である)ことを示せ。

(2) 次の関数は，$x=-1$ で連続かつ微分可能であることを示せ。

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\geqq -1\text{ のとき}) \\ -2x-1 & (x\leqq -1\text{ のとき}) \end{cases}$$

3 ［**導関数**］ 定義に従って，次の関数の導関数を求めよ。

(1) $f(x)=\sqrt{x-1}$　　(2) $f(x)=-\dfrac{1}{x}$

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$　　(4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

例題 1 微分係数の定義の応用

$f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{a^2f(x)-x^2f(a)}{x-a}$ を a，$f(a)$，$f'(a)$ を用いて表せ。

着眼点 $a^2f(x)-x^2f(a)=a^2f(x)-a^2f(a)+a^2f(a)-x^2f(a)=a^2\{f(x)-f(a)\}-(x^2-a^2)f(a)$ と変形する。

解

$$\lim_{x\to a}\frac{a^2f(x)-x^2f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{a^2\{f(x)-f(a)\}-(x^2-a^2)f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\left\{a^2\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-(x+a)f(a)\right\}$$

$$=a^2f'(a)-2af(a)$$ ……**答**

4 **類題** $f(x)$ が $x=a$ で微分可能のとき，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$ を $f'(a)$ で表せ。

▶ 標準問題 ◀◀

5 定義に従って，次の微分係数を求めよ。

(1) $f(x)=-\dfrac{1}{x}$ のとき，$f'(a)$　　(2) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ のとき，$f'(1)$

6 定義に従って，次の関数の導関数を求めよ。

(1) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$　　(2) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

7 次の関数の $x=0$ における連続性，微分可能性を調べよ。

(1) $f(x)=\sqrt{x^2}$　　(2) $f(x)=\begin{cases} x^3+x & (x\geqq 0) \\ x & (x\leqq 0)\end{cases}$

◆ 発展問題 ◆◆

8 $y=f(x)$ において，$f(0)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=1$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)f(1-x)}{x}$ の値を求めよ。

ヒント 微分係数の定義式 $f'(a)=\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ を使える形に式を変形する。

2　導関数の計算

★学習の要点★

❶ **導関数の公式**　k，l は定数，$f(x)$，$g(x)$ は微分可能とする。

$\{kf(x)\}'=kf'(x)$

$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

$\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

$\{kf(x)+lg(x)\}'=kf'(x)+lg'(x)$

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$　　$\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}'=-\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

❷ **x^n の導関数**

$(x^n)'=nx^{n-1}$　　（n は整数）

$(k)'=0$　　（k は定数）

● 基本問題 ●●

9　［**和・差の微分法**］　次の関数を微分せよ。

(1)　$y=3x^4-x^3+x$　　(2)　$y=x^7-x^3+x+3$

10　［**積の微分法**］　次の関数を微分せよ。

(1)　$y=(x+1)(x+3)$　　(2)　$y=(x+1)(x^2-x+1)$

(3)　$y=(x^2+x+1)(x^2-1)$　　(4)　$y=(x-1)(x-2)(x+3)$

11　［**商の微分法**］　次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\dfrac{x}{x+1}$　　(2)　$y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$

(3)　$y=\dfrac{1}{x}$　　(4)　$y=\dfrac{x^2-2x+4}{x^2-x+3}$

12　［**x^n の導関数**］　次の関数を微分せよ。

(1)　$y=x^{-3}$　　(2)　$y=\dfrac{1}{x^2}$

例題 2 整式の除法への応用

$f(x)$を2次以上の整式とする。$f(x)$を$(x-a)^2$で割ったときの余りをa，$f(a)$，$f'(a)$を用いて表せ。

着眼点 $f(x)=(x-a)^2g(x)+px+q$とおき，両辺をxについて微分する。

解 $f(x)$を$(x-a)^2$で割ったときの商を$g(x)$，余りを$px+q$とすると，

$$f(x)=(x-a)^2g(x)+px+q$$

両辺をxで微分して，

$$f'(x)=2(x-a)g(x)+(x-a)^2g'(x)+p$$

よって，$f(a)=pa+q$ ……①　　$f'(a)=p$ ……②

①，②より，$p=f'(a)$，$q=f(a)-af'(a)$

求める余りは，$f'(a)x+f(a)-af'(a)$ ……**答**

13 **類題** ある整式$f(x)$に対し，恒等式$x^3+ax+b=(x-1)^2f(x)$が成り立つとき，定数a，bの値を求めよ。

▶ 標準問題 ◀◀

14 次の関数を微分せよ。

(1) $y=5x^4-3x^3+x^2-x+2$　　(2) $y=x^2(x+3)$

(3) $y=(x+2)(3x-2)$　　(4) $y=(1-x^3)(x^2-x+1)$

(5) $y=(x-1)(x-2)(x-3)$　　(6) $y=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

15 関数$f(x)=\dfrac{ax+b}{x-1}$において，$f(0)=3$，$f'(2)=1$であるとき，定数a，bの値を求めよ。

16 次の関数を微分せよ。

(1) $y=x+\dfrac{1}{x}$　　(2) $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2}$

(3) $y=\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+x+2}$　　(4) $y=\dfrac{1-x^n}{1+x}$　(nは自然数)

◆ 発展問題 ◆◆

17 微分を使って，$x^4-3x+1=a(x-1)^4+b(x-1)^3+c(x-1)^2+d(x-1)+e$が成り立つように定数$a$，$b$，$c$，$d$，$e$の値を定めよ。

ヒント 両辺をxで微分することを3回繰り返す。

第 3 章　微分法の応用

1　接線と法線，平均値の定理

★学習の要点★

❶　接線，法線の方程式

(1)　**接線**　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(x_1,\ f(x_1))$ における接線の方程式は，

$$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$$

(2)　**法線**　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(x_1,\ f(x_1))$ における法線の方程式は，

$$y-f(x_1)=-\frac{1}{f'(x_1)}(x-x_1)\qquad \text{ただし，} f'(x_1)\neq 0$$

❷　平均値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\quad a<c<b$$

を満たす実数 c が存在する。

とくに，$f(a)=f(b)$ ならば，$f'(c)=0$，$a<c<b$ を満たす実数 c が存在する。(**ロルの定理**)

● 基本問題 ●●

1　［**接線と法線の方程式①**］　次の曲線上の点Pにおける接線と法線の方程式を求めよ。

(1)　$y=x^3-x$　　P$(1,\ 0)$

(2)　$y=e^x$　　P$(0,\ 1)$

(3)　$y=\sin x$　　P$\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{1}{2}\right)$

(4)　$y=\log x$　　P$(e,\ 1)$

2　［**接線と法線の方程式②**］　次の曲線上の点Pにおける接線と法線の方程式を求めよ。

(1)　$xy=16$　　P$(2,\ 8)$

(2)　$x=2\cos\theta$，$y=3\sin\theta$　　Pは $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ に対応する点

3　［**平均値の定理①**］　次の関数において，$f'(c)=\dfrac{1}{2}$ を満たす与えられた区間の c の値を求めよ。

(1)　$f(x)=x^2$　　$(0,\ 1)$

(2)　$f(x)=\sin x$　　$(0,\ \pi)$

4　［**平均値の定理②**］　次の関数と，与えられた a，b の値に対して，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$，$a<c<b$ を満たす c の値を求めよ。

(1)　$f(x)=x^3$　　$a=-1$，$b=2$

(2)　$f(x)=\sqrt{x}+1$　　$a=1$，$b=4$

例題 1 曲線上にない点から引いた接線

原点から曲線 $y=e^x$ に引いた接線の方程式を求めよ。

着眼点　$y=e^x$ 上の点 $(a,\ e^a)$ における接線を求め，それが点 $(0,\ 0)$ を通ることから a の値を求める。

解　$f(x)=e^x$ とすると，$f'(x)=e^x$

接点の座標を $(a,\ e^a)$ とすると，接線の方程式は，

$y-e^a=e^a(x-a)$ より，$y=e^ax+e^a(1-a)$ ……①

これが点 $(0,\ 0)$ を通るから，$0=e^a(1-a)$

$e^a>0$ より，$a=1$

これを①に代入して，$y=ex$ ……**答**

5　**類題**　次の曲線の接線のうち，与えられた点を通るものの方程式を求めよ。

(1)　$y=e^x$　$(1,\ 0)$

(2)　$y=\sqrt{x-1}$　$(0,\ 0)$

▶ 標準問題 ◀◀

6　次の曲線上の点Pにおける接線と法線の方程式を求めよ。

(1)　$y=\sqrt{x+3}$　$\mathrm{P}(6,\ 3)$

(2)　$y=\cos x$　$\mathrm{P}\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(3)　$y=2^x$　$\mathrm{P}(1,\ 2)$

(4)　$y=\log_2 x$　$\mathrm{P}(2,\ 1)$

7　次の曲線上の点Pにおける接線と法線の方程式を求めよ。

(1)　$x=2t-3,\ y=t^2-2t-4$　Pは $t=0$ に対応する点

(2)　$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$　$\mathrm{P}(2,\ -1)$

(3)　$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{9}=1$　$\mathrm{P}(-2,\ -3)$

(4)　$y^2=-4x$　$\mathrm{P}(-9,\ 6)$

8　$f(x)=x^3$ のとき，$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)$　$(0<\theta<1)$ を満たす θ の値を求めよ。ただし，$a>0,\ h>0$ とする。

9　$x>0$ のとき，不等式 $1<\dfrac{e^x-1}{x}<e^x$ を証明せよ。

◆ 発展問題 ◆◆

10　曲線 $f(x)=e^{-x^2}$ に x 軸上の点 $(a,\ 0)$ から接線を引くとき，次の問いに答えよ。

(1)　異なる2本の接線が引けるような a の値の範囲を求めよ。

(2)　ただ1本の接線が引けるときの a の値，および接点の座標を求めよ。

ヒント　接点の x 座標を α とおき，α についての方程式の実数解の個数を考える。

2 関数の増減と極大・極小

★学習の要点★

❶ **関数の増減**

(1) $f'(x)>0$ となる区間で $f(x)$ は増加する。

(2) $f'(x)<0$ となる区間で $f(x)$ は減少する。

❷ **関数の極大・極小**

(1) $x<a$ のとき $f'(x)>0$，$x>a$ のとき $f'(x)<0$ ならば，$x=a$ で極大，$f(a)$ が極大値

(2) $x<a$ のとき $f'(x)<0$，$x>a$ のとき $f'(x)>0$ ならば，$x=a$ で極小，$f(a)$ が極小値

❸ **第 2 次導関数による極値の判定**

(1) $f'(a)=0$，$f''(a)<0$ ならば，$f(x)$ は $x=a$ で極大

(2) $f'(a)=0$，$f''(a)>0$ ならば，$f(x)$ は $x=a$ で極小

● 基本問題 ●●

11 ［**関数の増減①**］　次の関数の増減を調べよ。

(1) $y=(x^2-1)(x^2+1)$　　(2) $y=\sqrt{x^2-1}$

(3) $y=xe^x$　　(4) $y=\dfrac{\log x}{x}$

12 ［**関数の増減②**］　次の関数の増減を調べよ。

(1) $y=2x+\cos x$　　(2) $y=\sin x-x\quad(0<x\leqq\pi)$

13 ［**関数の極大・極小**］　次の関数の増減を調べ，極値を求めよ。

(1) $y=x+2\sqrt{3-x}$　　(2) $y=\dfrac{x+1}{x^2+3}$

(3) $y=x\log x$　　(4) $y=-\sin^2 x\quad(0<x<\pi)$

14 ［**第 2 次導関数による極値の判定**］　第 2 次導関数を用いて，次の関数の極値を求めよ。

(1) $y=2x+\dfrac{1}{x^2}$　　(2) $y=(x^2-8)e^x$

例題 ② 分数関数の極値

関数 $f(x)=\dfrac{x^2+x+a}{x-1}$ が $x=2$ で極値をとるように定数 a の値を定め，そのときの極値を求めよ。

着眼点 $y=f(x)$ が $x=\alpha$ で極値をとるとき，$f'(\alpha)=0$ である。

解 $f'(x)=\dfrac{(2x+1)(x-1)-(x^2+x+a)}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-1-a}{(x-1)^2}$

$f(x)$ は $x=2$ で微分可能だから，$x=2$ で極値をとるためには，$f'(2)=0$

$-1-a=0$ より，$a=-1$

$a=-1$ のとき，$f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$　　$f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘		↘	極小	↗

$a=-1$ のとき $x=2$ で極値をとるから，$a=-1$ ……**答**

$x=0$ のとき極大値 1，$x=2$ のとき極小値 5 ……**答**

15 **類題** 関数 $f(x)=\dfrac{2(x+a)}{bx^2+c}$　(a，b，c は定数) は，$x=1$ のとき極大値 1 をとり，そのグラフは点 $(-3,\ 0)$ を通る。このとき，a，b，c の値およびこの関数の極小値を求めよ。

▶ 標準問題 ◀◀

16 次の関数の増減を調べ，極値を求めよ。

(1) $f(x)=x\cdot\sqrt[3]{1-x}$　　(2) $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x^2+3}$

(3) $f(x)=x^2e^x$　　(4) $f(x)=\dfrac{\log x-x}{\log x}$

(5) $f(x)=2\sin x+\cos 2x$　$(0\leqq x<2\pi)$

17 $f(x)=\dfrac{\sin x}{a+\cos x}$　$(0<x<\pi)$ が極値をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

◆ 発展問題 ◆◆

18 関数 $f(x)=(x^2+ax+a)e^{-x}$　$(a\leqq 2)$ において，極小値が 0 になるとき，a の値を求めよ。

ヒント $a=2$，$a<2$ と分けて考える。

第 4 章　積分法

1　不定積分

★学習の要点★

❶ **不定積分の定義**

$$F'(x)=f(x) \iff F(x)=\int f(x)\,dx+C \quad (C\text{ は積分定数})$$

❷ **不定積分の基本公式**

(1) $\displaystyle\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$　（k は定数）

(2) $\displaystyle\int\{f(x)\pm g(x)\}\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$　（複号同順）

❸ **不定積分の公式**　（C は積分定数）

(1) $\displaystyle\int x^{\alpha}\,dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$　$(\alpha\neq-1)$　　(2) $\displaystyle\int\frac{1}{x}\,dx=\log|x|+C$

(3) $\displaystyle\int\sin x\,dx=-\cos x+C$　　$\displaystyle\int\cos x\,dx=\sin x+C$

$\displaystyle\int\frac{1}{\cos^2 x}\,dx=\tan x+C$　　$\displaystyle\int\frac{1}{\sin^2 x}\,dx=-\frac{1}{\tan x}+C$

(4) $\displaystyle\int e^x\,dx=e^x+C$　　$\displaystyle\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\log a}+C$　$(a>0,\ a\neq1)$

● 基本問題 ●●

1　［x^{α} の不定積分］　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x^4\,dx$　　(2) $\displaystyle\int x^{-3}\,dx$

(3) $\displaystyle\int\sqrt[3]{x}\,dx$　　(4) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt[4]{x^2}}\,dx$

2　［定数倍，和・差の不定積分］　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\sqrt{x}\,(x+1)^2\,dx$　　(2) $\displaystyle\int(4\sqrt[3]{x}-5\sqrt[4]{x}\,)\,dx$

(3) $\displaystyle\int\frac{2x+3}{\sqrt{x}}\,dx$　　(4) $\displaystyle\int\left(2x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$

3　［指数関数・三角関数の不定積分］　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int 2^x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int(3+2e^x)\,dx$

(3) $\displaystyle\int(1-5\sin x)\,dx$　　(4) $\displaystyle\int(4\sin x-3\cos x)\,dx$

例題 1 式の変形による不定積分

次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sin^2\frac{x}{2}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}dx$

着眼点 (1)　1次の三角関数の式に変形する。　(2)　式を部分分数に分解する。

解 (1)　半角の公式により，$\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{2}$

よって，$\displaystyle\int \sin^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1-\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}(x-\sin x)+C$　（Cは積分定数）……答

(2)　$\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

よって，$\displaystyle\int\frac{1}{x^2-1}dx=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2}(\log|x-1|-\log|x+1|)+C$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$ ……答

4 類題　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \cos^2\frac{x}{2}dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-x-2}dx$

▶ 標準問題 ◀◀

5　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\left(x^2+4x-\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}\right)dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{2x^3+3x-1}{x^2}dx$

6　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{x^2+2}{\sqrt{x}}dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{(\sqrt[3]{t^2}+\sqrt[3]{t}\,)^2}{\sqrt[3]{t}}dt$

(3) $\displaystyle\int(2e^x-x^2)dx$　　(4) $\displaystyle\int(3\sin x+\cos x+e^x)dx$

◆ 発展問題 ◆◆

7　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\tan^2 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}dx$

ヒント (1)　$\tan^2 x=\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$　　(2)　$\dfrac{\cos^2 x}{1-\sin x}=\dfrac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}$

2 置換積分法，部分積分法

★学習の要点★

❶ 置換積分法

(1) ① $\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$　　ただし，$x=g(t)$

② $\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(t)dt$　　ただし，$g(x)=t$

(2) ① $f(x)$の不定積分の１つを$F(x)$とすると，

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C\quad(a\neq 0,\ C\text{は積分定数})$$

② $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C$$

❷ 部分積分法

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

● 基本問題 ●●

8 ［**置換積分法①**］〔　〕内に示した置換によって，次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(2x+3)^3dx$　〔$2x+3=t$〕　　(2) $\int\sqrt{x+1}\,dx$　〔$x+1=t$〕

(3) $\int\frac{1}{(x+6)^2}dx$　〔$x+6=t$〕　　(4) $\int\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}dx$　〔$x+1=t$〕

9 ［**置換積分法②**］〔　〕内に示した置換によって，次の不定積分を求めよ。

(1) $\int\frac{x}{x^2+1}dx$　〔$x^2+1=t$〕　　(2) $\int\frac{e^x}{e^x-2}dx$　〔$e^x-2=t$〕

10 ［**置換積分法③**］〔　〕内に示した置換によって，次の不定積分を求めよ。

(1) $\int\sin x\cos^2x\,dx$　〔$\cos x=t$〕　　(2) $\int\sin^3x\cos x\,dx$　〔$\sin x=t$〕

(3) $\int\frac{1}{x}(\log x)^3dx$　〔$\log x=t$〕　　(4) $\int xe^{x^2+1}dx$　〔$x^2+1=t$〕

11 ［**部分積分法**］次の不定積分を求めよ。

(1) $\int xe^x dx$　　(2) $\int\log x\,dx$

(3) $\int x\sin x\,dx$　　(4) $\int x\log x\,dx$

例題 ② 部分積分法

不定積分 $I=\int e^x \sin x\,dx$ を求めよ。

着眼点　部分積分法を 2 度利用すると，I が再び現れる。

解　$I=\int e^x(-\cos x)'dx=-e^x\cos x+\int e^x\cos x\,dx$

$=-e^x\cos x+\int e^x(\sin x)'dx=-e^x\cos x+\left(e^x\sin x-\int e^x\sin x\,dx\right)$

$I=e^x(\sin x-\cos x)-I$ より，$2I=e^x(\sin x-\cos x)$

よって，$I=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$　（C は積分定数）……答

12　類題　不定積分 $J=\int e^x\cos x\,dx$ を求めよ。

▶ 標準問題 ◀◀

13　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx$　　(2) $\int xe^{x^2}dx$

(3) $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$　　(4) $\int \cos^3 x\,dx$

(5) $\int \frac{1}{x}\log x\,dx$　　(6) $\int \sin 2x\cos x\,dx$

14　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{1}{\tan x}dx$　　(2) $\int \frac{1}{\sin x}dx$　　(3) $\int \frac{1}{\cos x}dx$

15　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int xe^{2x}dx$　　(2) $\int (x+1)\log x\,dx$

(3) $\int x\sin 2x\,dx$　　(4) $\int x^2\sin x\,dx$

◆ 発展問題 ◆◆

16　$I_n=\int \sin^n x\,dx$ とおくとき，$nI_n=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)I_{n-2}$ が成り立つことを示せ。

ヒント　$\sin^n x=(\sin^{n-1}x)\sin x$ とみて部分積分をする。

第 5 章　積分法の応用

1　面　積 (1)

★学習の要点★

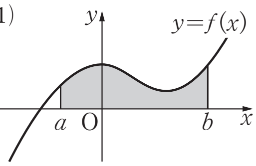
❶　曲線と軸の間の面積

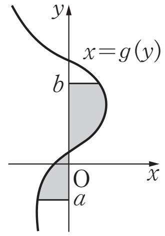
(1)　$y=f(x)$ と x 軸の間の図形の面積 S は，

$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx \quad (a \leqq x \leqq b)$$

(2)　$x=g(y)$ と y 軸の間の図形の面積 S は，

$$S=\int_a^b |g(y)|\,dy \quad (a \leqq y \leqq b)$$

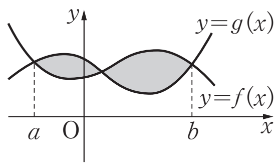
(1)


(2)


❷　2 曲線の囲む図形の面積　（区間 $a \leqq x \leqq b$ において）

2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ の囲む図形の面積 S は，

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$



● 基本問題 ●●

1　［**曲線と軸の間の面積①**］　次の曲線または直線によって囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1)　$y=\sqrt{x}$，$x=4$，$x=9$，$y=0$　　(2)　$y=e^x$，$x=0$，$x=1$，$y=0$

(3)　$y=\sin x$　$(0 \leqq x \leqq \pi)$，x 軸　　(4)　$y=\log x$，$x=\dfrac{1}{2}$，x 軸

2　［**曲線と軸の間の面積②**］　次の曲線または直線によって囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1)　$y=\sqrt{x+2}$，$y=1$，y 軸　　(2)　$y=\dfrac{1}{x-1}$，$y=1$，$y=e$，y 軸

(3)　$y=e^x$，$x=0$，$y=e$，$y=e^2$　　(4)　$y=\log x$，$x=0$，$y=0$，$y=2$

3　［**2 曲線の囲む図形の面積**］　次の曲線または直線によって囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^3$，$y=x$　　(2)　$y=\sin x$，$y=\cos x$　$(0 \leqq x \leqq 2\pi)$

例題 ① 曲線と接線で囲まれた図形の面積

曲線 $y=e^x$ 上の2点A(0，1)，B(1，e)における接線と，この曲線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

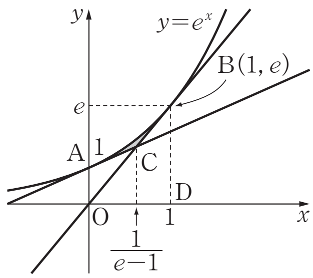
着眼点 点A，Bにおける接線を求め，更に2接線の交点の x 座標を求める。

解 $y=e^x$ より，$y'=e^x$

点Aにおける接線の方程式は，$y=x+1$ ……①

点Bにおける接線の方程式は，$y=ex$ ……②

①，②の交点Cの x 座標は $x+1=ex$ より，$x=\dfrac{1}{e-1}$



右の図で，$S=\displaystyle\int_0^1 e^x dx-\triangle\mathrm{OAC}-\triangle\mathrm{ODB}$

$$=\Big[e^x\Big]_0^1-\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{e-1}-\frac{1}{2}\cdot1\cdot e$$

$$=\frac{e^2-3e+1}{2(e-1)}$$ ……**答**

4 **類題** 曲線 $y=\log x$ に原点から引いた接線と曲線および x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

▶ 標準問題 ◀◀

5 次の曲線または直線と，x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1) $y=\dfrac{1}{x}$，$x=1$，$x=e$　　(2) $y=\sqrt[3]{x^2}$，$x=-8$，$x=8$

(3) $y=e^{-x}$，$x=0$，$x=1$　　(4) $y=x\sin x$　$(0\leqq x\leqq 2\pi)$

6 次の曲線または直線によって囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1) $2x=y^2$，$2y=x^2$　　(2) $y=x-4\sqrt{x}$，$y=x(3-x)$

(3) $y=\sin x$，$y=\sin 2x$　$(0\leqq x\leqq \pi)$　　(4) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，$x=2$，$x=-2$，x 軸

◆ 発展問題 ◆◆

7 次の問いに答えよ。

(1) 曲線 $y=xe^{-x}$ の変曲点における接線の方程式を求めよ。

(2) (1)の曲線とその変曲点における接線と y 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

ヒント y' および y'' を求める。曲線の概形をかき，接線を引く。

高校ゼミ
Essence

数学Ⅲ

解答編

【p. 4】　❶ 分数関数，無理関数

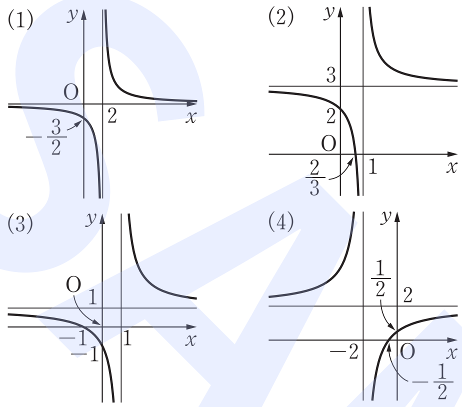
1 (1)　$y=\dfrac{3}{x-2}$　　**漸近線 $x=2$，$y=0$**

(2)　$y=\dfrac{1}{x-1}+3$　　**漸近線 $x=1$，$y=3$**

(3)　$y=\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+1$　　**漸近線 $x=1$，$y=1$**

(4)　$y=\dfrac{2x+1}{x+2}=-\dfrac{3}{x+2}+2$

漸近線 $x=-2$，$y=2$



2 (1)　$\dfrac{x-2}{x+3}=2$ より，$x=-8$

共有点は$(-8,\ 2)$

(2)　$\dfrac{2}{x-2}=x-1$ より，$x(x-3)=0$

$x=0,\ 3$

共有点は$(0,\ -1)$，$(3,\ 2)$

(3)　$\dfrac{5}{x+1}=x-3$ より，$(x+2)(x-4)=0$

$x=-2,\ 4$

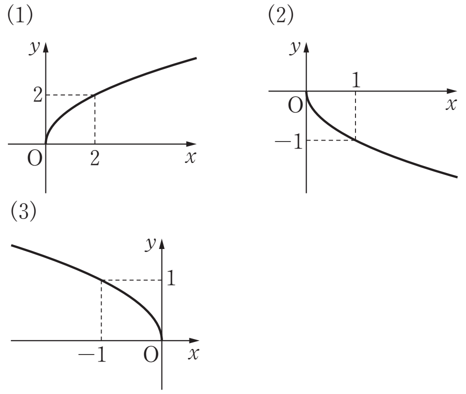
共有点は$(-2,\ -5)$，$(4,\ 1)$

(4)　$\dfrac{2x-1}{x+3}=x-3$ より，$(x+2)(x-4)=0$

$x=-2,\ 4$

共有点は$(-2,\ -5)$，$(4,\ 1)$

3



4 (1)　**定義域**　$x-1\geqq 0$ を解いて，$\boldsymbol{x\geqq 1}$

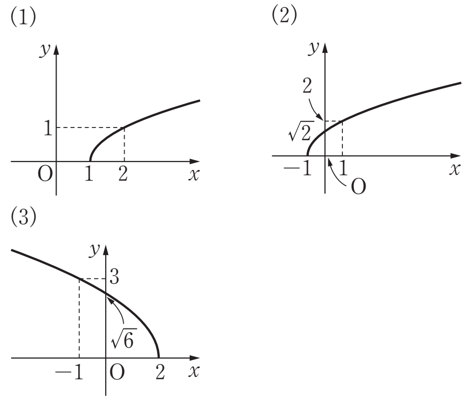
値域　$\boldsymbol{y\geqq 0}$

(2)　**定義域**　$2x+2\geqq 0$ を解いて，$\boldsymbol{x\geqq -1}$

値域　$\boldsymbol{y\geqq 0}$

(3)　**定義域**　$6-3x\geqq 0$ を解いて，$\boldsymbol{x\leqq 2}$

値域　$\boldsymbol{y\geqq 0}$



【p. 5】

5 類題 (1)　$\sqrt{x+1}=x-1$ ……① の両辺を 2 乗して整理すると，

$x^2-3x=0$　　$x(x-3)=0$

①の右辺より $x\geqq 1$ だから，$x=3$

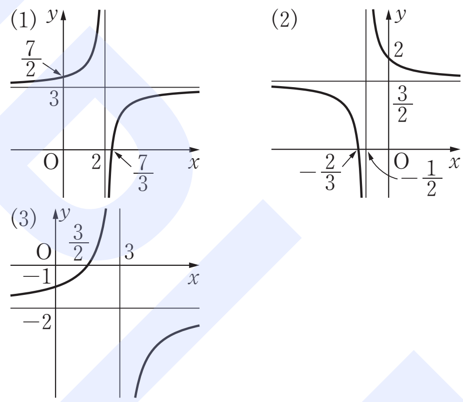
共有点は$(3,\ 2)$

(2)　$-1\leqq x<3$

6 (1)　$y=-\dfrac{1}{x-2}+3$

(2)　$y=\dfrac{1}{2(2x+1)}+\dfrac{3}{2}$

(3)　$y=-\dfrac{2x-3}{x-3}=-2-\dfrac{3}{x-3}$

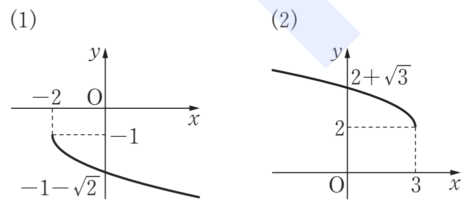


7 (1)　$y=-\sqrt{x}$ のグラフを x 軸方向に -2，y 軸方向に -1 だけ平行移動したもの。

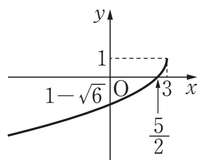
(2)　$y=\sqrt{-x}$ のグラフを x 軸方向に 3，y 軸方向に 2 だけ平行移動したもの。

(3)　$y=-\sqrt{-2(x-3)}+1$ より，

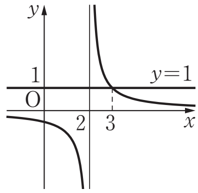
$y=-\sqrt{-2x}$ のグラフを x 軸方向に 3，y 軸方向に 1 だけ平行移動したもの。



(3)



8 (1) $y=\dfrac{1}{x-2}$ のグラフは図のようになる。



$\dfrac{1}{x-2}=1$ より，$x=3$

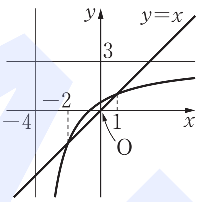
$y=\dfrac{1}{x-2}$ のグラフが

$y=1$ より上側にあるの

は，$\boldsymbol{2<x<3}$

(2) $y=\dfrac{3x+2}{x+4}$

$=-\dfrac{10}{x+4}+3$ ……①



$\dfrac{3x+2}{x+4}=x$ のとき，

$x^2+x-2=0$

よって，$x=1,\ -2$

①のグラフが $y=x$ より

下側にあるか重なるのは，

$\boldsymbol{-4<x\leqq-2,\ x\geqq1}$

9 $\sqrt{x+1}=x+k$ の両辺を 2 乗して整理すると，

$x^2+(2k-1)x+k^2-1=0$

重解をもつとき，

$D=(2k-1)^2-4(k^2-1)=0$

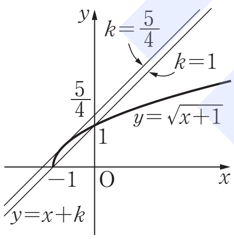
より，$k=\dfrac{5}{4}$

直線 $y=x+k$ が点$(-1,\ 0)$を通るとき，

$0=-1+k$ より，$k=1$

以上のことと，図より，

共有点の個数は，



$\boldsymbol{k>\dfrac{5}{4}}$ **のとき 0 個**

$\boldsymbol{k=\dfrac{5}{4},\ k<1}$ **のとき 1 個**

$\boldsymbol{1\leqq k<\dfrac{5}{4}}$ **のとき 2 個**

【p. 6】 **❷ 逆関数，合成関数**

10 (1) $y=2x+2$ ……①

x と y を入れかえて，$x=2y+2$

y について解いて，$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}x-1}$ ……②

(2) $y=\dfrac{4}{x-3}$ ……①

x と y を入れかえて，$x=\dfrac{4}{y-3}$

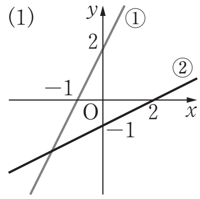
y について解いて，$\boldsymbol{y=\dfrac{4}{x}+3}$ ……②

(3) $y=x^2\quad(x\geqq0)$ ……①

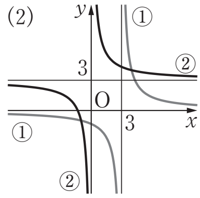
x と y を入れかえて，$x=y^2\quad(y\geqq0)$

y について解いて，$\boldsymbol{y=\sqrt{x}}$ ……②

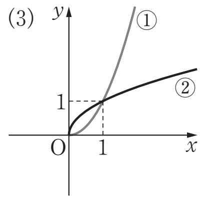
(1)



(2)



(3)



11 (1) $y=\sqrt{x+1}$ において，$x\geqq-1$ より，

$y\geqq0$

両辺を 2 乗して，$y^2=x+1$

x と y を入れかえて，$y=x^2-1$

定義域は $\boldsymbol{x\geqq0}$，値域は $\boldsymbol{y\geqq-1}$

(2) $y=\dfrac{1}{x-2}\quad(x>2)$

このとき，$y>0$

分母をはらって x について解くと，$x=\dfrac{1}{y}+2$

x と y を入れかえて，$y=\dfrac{1}{x}+2$

定義域は $\boldsymbol{x>0}$，値域は $\boldsymbol{y>2}$

12 (1) $(\boldsymbol{g\circ f})(\boldsymbol{x})=(x-2)^2+1$

$\boldsymbol{=x^2-4x+5}$

$(\boldsymbol{f\circ g})(\boldsymbol{x})=(x^2+1)-2\boldsymbol{=x^2-1}$

(2) $(\boldsymbol{g\circ f})(\boldsymbol{x})=2\left(\dfrac{2}{x}\right)^2+1\boldsymbol{=\dfrac{8}{x^2}+1}$

$(\boldsymbol{f\circ g})(\boldsymbol{x})\boldsymbol{=\dfrac{2}{2x^2+1}}$

(3) $(\boldsymbol{g\circ f})(\boldsymbol{x})=\log_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\boldsymbol{=-x}$

$(\boldsymbol{f\circ g})(\boldsymbol{x})=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_2 x}=(2^{-1})^{\log_2 x}\boldsymbol{=\dfrac{1}{x}}$

(4) $(\boldsymbol{g\circ f})(\boldsymbol{x})\boldsymbol{=\sqrt{(\log_{10}x)^2+3}}$

$(\boldsymbol{f\circ g})(\boldsymbol{x})=\log_{10}\sqrt{x^2+3}\boldsymbol{=\dfrac{1}{2}\log_{10}(x^2+3)}$

【p. 7】

13 **類題** $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(4x-6)$

$=-3(4x-6)+p=-12x+18+p$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-3x+p)$

$=4(-3x+p)-6=-12x+4p-6$

$18+p=4p-6$ を解いて，$\boldsymbol{p=8}$

14 (1) $y=-\dfrac{1}{2}x+2\quad(-4\leqq x\leqq4)$

$x=-2y+4$

x と y を入れかえて，$\boldsymbol{y=-2x+4}$

定義域は $\boldsymbol{0\leqq x\leqq4}$，値域は $-4\leqq y\leqq4$

(2) $y=4-x^2\quad(x\geqq0,\ y\leqq4)$

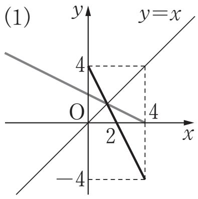
$x^2=4-y$

$x\geqq0$ より，$x=\sqrt{4-y}$

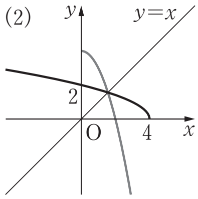
x と y を入れかえて，$\boldsymbol{y=\sqrt{4-x}}$

定義域は $x\leqq4$，値域は $y\geqq0$

(1)



(2)



(3) $y=\dfrac{3x-3}{x-2}=3+\dfrac{3}{x-2}$ $(x>2,\ y>3)$

分母をはらって x について解くと，

$x=\dfrac{2y-3}{y-3}$

x と y を入れかえて，$\boldsymbol{y=\dfrac{2x-3}{x-3}}$

定義域は $\boldsymbol{x>3}$，値域は $y>2$

(4) $y=\sqrt{2x-4}-1$ $(x\geqq 2,\ y\geqq -1)$

$y+1=\sqrt{2x-4}$

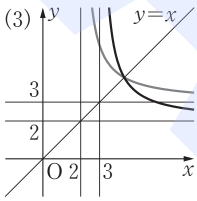
両辺を 2 乗して x について解くと，

$x=\dfrac{1}{2}(y+1)^2+2$

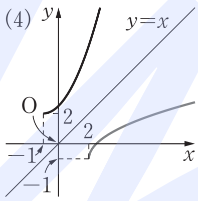
x と y を入れかえて，$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}(x+1)^2+2}$

定義域は $\boldsymbol{x\geqq -1}$，値域は $y\geqq 2$

(3)



(4)



(5) $y=3^{-x}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ より，逆関数は，$\boldsymbol{y=\log_{\frac{1}{3}}x}$

定義域は $x>0$，値域はすべての実数

(6) $y=\log_2(x-1)$ より，$\log_2 2^y=\log_2(x-1)$

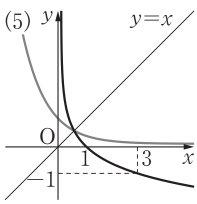
$2^y=x-1$

よって，$x=2^y+1$

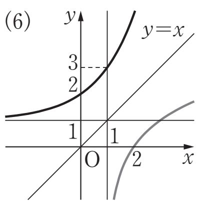
x と y を入れかえて，$\boldsymbol{y=2^x+1}$

定義域はすべての実数，値域は $y>1$

(5)



(6)



15 $y=ax+b$ の x と y を入れかえて，

$x=ay+b$ より，$ay=x-b$

$f^{-1}(1)=2$ より，$2a=1-b$ ……①

$f^{-1}(3)=-1$ より，$-a=3-b$ ……②

①，②より，$\boldsymbol{a=-\dfrac{2}{3}}$，$\boldsymbol{b=\dfrac{7}{3}}$

16 $(g\circ f)(x)=(x+2)^2+1=x^2+4x+5$

$(h\circ(g\circ f))(x)=1-(x^2+4x+5)=-x^2-4x-4$

$(h\circ g)(x)=1-(x^2+1)=-x^2$

$((h\circ g)\circ f)(x)=-(x+2)^2=-x^2-4x-4$

よって，$(h\circ(g\circ f))(x)=((h\circ g)\circ f)(x)$

17 $y=\dfrac{4x-3}{-x+2}$ を x について解くと，$x=\dfrac{2y+3}{y+4}$

x と y を入れかえて，$y=\dfrac{2x+3}{x+4}$

これが $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ と一致するから，

$\boldsymbol{a=2,\ b=3,\ c=4}$

【p. 8】 ❸ 数列の極限

18 (1) $\dfrac{1}{1}$，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{4}$，……

一般項 $\boldsymbol{a_n=\dfrac{1}{n}}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ **（収束）**

(2) 2^0，2^1，2^2，2^3，……

一般項 $\boldsymbol{a_n=2^{n-1}}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^{n-1}=\infty$ **（発散）**

19 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)=\boldsymbol{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{2}{n}}=\boldsymbol{\infty}$

20 (1) 与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\dfrac{2}{n}}{4-\dfrac{3}{n}}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$

(2) 与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)=\boldsymbol{\infty}$

(3) 与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{1+\dfrac{1}{n}}=\boldsymbol{5}$

(4) ∞

【p. 9】

21 類題 (1) n でくくり出して，

与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{\frac{1}{n}}\right)=\boldsymbol{\infty}$

(2) 分母と分子を $\sqrt{n}$ で割って，

与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{n}}-\dfrac{2}{\sqrt{n}}}=\boldsymbol{\infty}$

22 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{n}}{3+\dfrac{4}{n}}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{n^2}}{1-\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}}=\boldsymbol{2}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(2-\dfrac{1}{n}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(3+\dfrac{1}{n}\right)}=\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n-\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{2}{n^2}-1}=\boldsymbol{-\infty}$

23 (1) 与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}=\boldsymbol{1}$

(2) 与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{\sqrt{n^2+n-1}+n}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{1+1}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

80 (1) $\mathrm{BQ}_n=\dfrac{1}{2}x_n$, $\mathrm{AQ}_n=a-\dfrac{1}{2}x_n$,

$\mathrm{AR}_n=\dfrac{1}{2}\left(a-\dfrac{1}{2}x_n\right)$, $\mathrm{CR}_n=a-\dfrac{1}{2}\left(a-\dfrac{1}{2}x_n\right)$,

$\mathrm{CP}_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left\{a-\dfrac{1}{2}\left(a-\dfrac{1}{2}x_n\right)\right\}$

よって，$\boldsymbol{x_{n+1}}=a-\mathrm{CP}_{n+1}\boldsymbol{=\dfrac{3}{4}a-\dfrac{1}{8}x_n}$

(2) 漸化式を変形して，

$x_{n+1}-\dfrac{2}{3}a=-\dfrac{1}{8}\left(x_n-\dfrac{2}{3}a\right)$ これは

初項 $x_1-\dfrac{2}{3}a=-\dfrac{1}{6}a$，公比 $-\dfrac{1}{8}$ の等比数列である。

よって，$\boldsymbol{x_n=\dfrac{2}{3}a-\dfrac{a}{6}\left(-\dfrac{1}{8}\right)^{n-1}}$

(3) $\dfrac{2}{3}a$

【p. 24】 章末問題

1 $y=\dfrac{-4x+6}{2x+1}=\dfrac{8}{2x+1}-2$

漸近線は，$x=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$，$y=\boldsymbol{-2}$

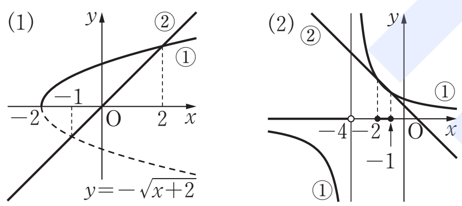
x の値の範囲は，$\boldsymbol{-\dfrac{3}{2}\leqq x<-\dfrac{1}{2}}$

2 (1) $y=\sqrt{x+2}$ ……①，$y=x$ ……② のグラフの交点の x 座標は，$\boldsymbol{x=2}$

(2) $\dfrac{6}{x+4}\leqq -x+1$

$y=\dfrac{6}{x+4}$ ……① が $y=-x+1$ ……② の下側にある，または，共有点をもつのは，

$\boldsymbol{x<-4,\ -2\leqq x\leqq -1}$



別解 (1) 両辺を 2 乗して，$x+2=x^2$

$x^2-x-2=0$ $(x+1)(x-2)=0$

$x=-1,\ 2$ $x=-1$ は適さない。$\boldsymbol{x=2}$

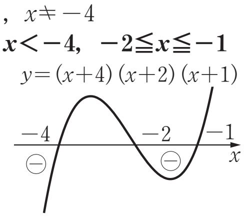
(2) 両辺に $(x+4)^2$を掛けて整理すると，

$(x+4)(x+2)(x+1)\leqq 0$

$x\leqq -4$，$-2\leqq x\leqq -1$

与式から，$x\neq -4$

よって，$\boldsymbol{x<-4,\ -2\leqq x\leqq -1}$



3 (1) $\boldsymbol{g(f(x))}=\dfrac{2f(x)-1}{f(x)-3}\boldsymbol{=x}$

(2) $g(x)=\dfrac{1-bx}{2x-a}$，$f(2)=9$，$g(1)=-2$

より式を連立させて，$\boldsymbol{a=4,\ b=-3}$

4 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{k=1}^{n}2k}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n}{2\cdot\frac{n(n+1)}{2}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\boldsymbol{1}$ **（収束）**

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-3^n}{2^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}=\boldsymbol{1}$ **（収束）**

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\,)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ **（収束）**

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{\log_{10}(n+1)-\log_{10}n\}=\lim_{n\to\infty}\log_{10}\frac{n+1}{n}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\log_{10}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\log_{10}1=\boldsymbol{0}$ **（収束）**

5 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 3-0}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)^2}=\lim_{x\to 3-0}\frac{x+1}{x-3}=\boldsymbol{-\infty}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}}=\boldsymbol{2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+1})}{(x+1)-(x^2+1)}=\boldsymbol{2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left\{-(\cos x+1)\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\right\}=\boldsymbol{-2}$

6 第 k 項は，$a_k=\dfrac{1}{3^k}+\dfrac{1}{3^{k+1}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{3^{2k-1}}$

$\displaystyle=\frac{\frac{1}{3^k}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^k\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^k-\left(\frac{1}{3}\right)^{2k}\right\}$

初項から第 n 項までの和 S_n は，

$\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^k-\left(\frac{1}{3}\right)^{2k}\right\}$

$\displaystyle=\frac{3}{2}\left[\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{\frac{1}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\right\}}{1-\frac{1}{9}}\right]$

$\displaystyle=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}-\frac{1}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\right\}\right]$

$\displaystyle=\frac{3}{16}\left\{3-4\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\right\}$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\boldsymbol{\frac{9}{16}}$

7 $a_{n+1}+\dfrac{1}{2}=3\left(a_n+\dfrac{1}{2}\right)$

よって，$\boldsymbol{a_n=\dfrac{3^n}{2}-\dfrac{1}{2}}$，$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{2}}$

【p. 25】

8 $ax+1=-\sqrt{x-1}$ の両辺を 2 乗して整理すると，

$a^2x^2+(2a-1)x+2=0$

判別式 $D=-(4a^2+4a-1)>0$ のとき，

$\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}<a<\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$

交点は $y \leqq 0$ だから，$\boldsymbol{\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}<a\leqq -1}$

9　与式$=\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(4-a^2)x-2(6+ab)+\dfrac{1-b^2}{x}}{\sqrt{4-\dfrac{12}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+a+\dfrac{b}{x}}$

から，$4-a^2=0$，$6+ab=0$ であることが必要である。

$a>0$より，$\boldsymbol{a=2,\ b=-3}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\{\sqrt{4x^2-12x+1}-(2x-3)\}$

$=\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{-8}{\sqrt{4-\dfrac{12}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+2-\dfrac{3}{x}}=\boldsymbol{-2}$

10　$a_n=\left(\dfrac{1}{3n-1}-\dfrac{1}{3n+2}\right)+\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$

11　与式$=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^4}{x^2+2}\right)^{n-1}$

これは初項 1，公比$\dfrac{x^4}{x^2+2}$の無限等比級数である。

収束するためには，$\left|\dfrac{x^4}{x^2+2}\right|<1$

よって，$\boldsymbol{-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}}$

12　(1)　$2(a_{n+2}-a_{n+1})=r(a_{n+1}-a_n)$

$d_k=a_{k+1}-a_k$ とすると，$d_k=(q-p)\left(\dfrac{r}{2}\right)^{k-1}$

$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}d_k=p+(q-p)\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{r}{2}\right)^{k-1}$

$\boldsymbol{r=2}$ **のとき，**$\boldsymbol{a_n=(q-p)n+2p-q}$

$\boldsymbol{r\fallingdotseq 2}$ **のとき，**$\boldsymbol{a_n=p+\dfrac{2(q-p)}{2-r}\left\{1-\left(\dfrac{r}{2}\right)^{n-1}\right\}}$

(2)　$p=q$ のとき収束して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=p$

$p\fallingdotseq q$ かつ $|r|<2$ のとき収束して，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{pr-2q}{r-2}$

$p\fallingdotseq q$ かつ $|r|\geqq 2$ のとき発散

13　2 直線AB，PQの方程式はそれぞれ

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$，$\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}=1$ であり，その交点Rの座標は $p+q=a+b$ より，

$\left(\dfrac{ap}{a+b},\ \dfrac{bq}{a+b}\right)$，$p\longrightarrow a$，$q\longrightarrow b$ だから，

点Rは点$\left(\dfrac{a^2}{a+b},\ \dfrac{b^2}{a+b}\right)$　すなわち，

線分 AB を $\boldsymbol{b:a}$ に内分する点に近づく。

14　(1)　円C_nの半径をr_nとする。

$\sin\theta=\dfrac{r_n-r_{n+1}}{r_n+r_{n+1}}$ より，$r_{n+1}=\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}r_n$

$r_1=1$ より，$r_n=\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^{n-1}$

$S_n=\pi r_n{}^2$ で $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<r_n{}^2<1$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_k=\boldsymbol{\frac{\pi(1+\sin\theta)^2}{4\sin\theta}}$

(2)　$\sin\theta=\dfrac{r_{n+1}-r_n}{r_{n+1}+r_n}$ より，$r_{n+1}=\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}r_n$

$r_1=1$ より，$r_n=\left(\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)^{n-1}$

$\displaystyle\frac{1}{9^n}\sum_{k=1}^{n}S_k=\frac{\pi(1-\sin\theta)^2}{4\sin\theta}\left[\left\{\frac{1+\sin\theta}{3(1-\sin\theta)}\right\}^{2n}-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right]$

右辺が 0 以外の値に収束するためには，

$\dfrac{1+\sin\theta}{3(1-\sin\theta)}=\pm1$ でなければならない。

よって，$1+\sin\theta=3(1-\sin\theta)$

　または $1+\sin\theta=-3(1-\sin\theta)$

$0<\sin\theta<1$ より，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

ゆえに，$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{6}}$

第2章 微分法

【p. 26】 ❶ 微分係数と導関数

1 (1) $f'(2)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\dfrac{1}{2+h}-\dfrac{1}{2}}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{-h}{2h(2+h)}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{-1}{2(2+h)}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{4}}$

(2) $f'(-1)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sqrt{(-1+h)+2}-\sqrt{-1+2}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(\sqrt{h+1}-1)(\sqrt{h+1}+1)}{h(\sqrt{h+1}+1)}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{\sqrt{h+1}+1}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

2 (1) $y=f(x)=x^2-2x\quad(x\leqq0,\ 2\leqq x)$

また，$f(x)=-x^2+2x\quad(0\leqq x\leqq2)$ より，

$\lim\limits_{x\to2+0}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2+0}\dfrac{x(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2+0}x=2$

$\lim\limits_{x\to2-0}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2-0}\dfrac{-x(x-2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2-0}(-x)=-2$

つまり，$x\longrightarrow2$ のとき，右側極限と左側極限が一致しないので，$x=2$ で微分不可能。

(2) $x\geqq-1$ のとき，$f(-1)=(-1)^2=1$，

$\lim\limits_{x\to-1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to-1+0}x^2=1$

$x\leqq-1$ のとき，$f(-1)=-2\times(-1)-1=1$，

$\lim\limits_{x\to-1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to-1-0}(-2x-1)=1$

$f(-1)=\lim\limits_{x\to-1}f(x)$ より，$x=-1$ で $f(x)$ は連続。

$x\geqq-1$ のとき，

$f'(-1)=\lim\limits_{x\to-1+0}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$

$=\lim\limits_{x\to-1+0}\dfrac{x^2-1}{x+1}=-2$

$x\leqq-1$ のとき，

$f'(-1)=\lim\limits_{x\to-1-0}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$

$=\lim\limits_{x\to-1-0}\dfrac{-2x-1-(2-1)}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to-1-0}(-2)=-2$

右側極限と左側極限が一致するので，$f(x)$ は $x=-1$ で微分可能。

よって，$f(x)$ は $x=-1$ で連続かつ微分可能。

3 (1) $\boldsymbol{f'(x)}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sqrt{(x+h)-1}-\sqrt{x-1}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h-1)-(x-1)}{h(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1})}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}}$

(2) $\boldsymbol{f'(x)}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{-\dfrac{1}{x+h}-\left(-\dfrac{1}{x}\right)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{x(x+h)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{x^2}}$

(3) $\boldsymbol{f'(x)}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{-(2x+h)}{x^2(x+h)^2}=\boldsymbol{-\dfrac{2}{x^3}}$

(4) $\boldsymbol{f'(x)}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x+h}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}\cdot h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{-h}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}$

$=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}}$

【p. 27】

4 類題 $k=-h$ とおく。

$h\longrightarrow0$ のとき $k\longrightarrow0$

与式$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}-\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a-h)-f(a)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim\limits_{k\to0}\dfrac{f(a+k)-f(a)}{k}$

$=f'(a)+f'(a)=\boldsymbol{2f'(a)}$

5 (1) $f'(a)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}\left\{-\dfrac{1}{a+h}-\left(-\dfrac{1}{a}\right)\right\}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}\cdot\dfrac{h}{a(a+h)}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{a(a+h)}=\boldsymbol{\dfrac{1}{a^2}}$

(2) $f'(1)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sqrt{h^2+2h+2}-\sqrt{2}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h(h+2)}{h(\sqrt{h^2+2h+2}+\sqrt{2})}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

6 (1) $\boldsymbol{f'(x)}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sqrt{(x+h)^2-1}-\sqrt{x^2-1}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{2xh+h^2}{h(\sqrt{(x+h)^2-1}+\sqrt{x^2-1})}=\boldsymbol{\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}$

(2) $\boldsymbol{f'(x)}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}\left\{\dfrac{(x+h)-1}{(x+h)+1}-\dfrac{x-1}{x+1}\right\}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{2}{(x+1)(x+h+1)}=\boldsymbol{\dfrac{2}{(x+1)^2}}$

7 (1) $f(x)=\sqrt{x^2}=\begin{cases}x & (x\geqq0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x^2}=0=f(0)$ より，$x=0$ で**連続**。

$\lim\limits_{h\to+0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to+0}\dfrac{h}{h}=1$

$\lim\limits_{h\to-0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to-0}\dfrac{-h}{h}=-1$

両者は一致しないから，$f(x)$ は $x=0$ で**微分可能ではない**。

(2) $f(0)=0\qquad\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\lim\limits_{x\to+0}(x^3+x)=0$

$\lim\limits_{x\to-0}f(x)=\lim\limits_{x\to-0}x=0$　　よって，$x=0$ で**連続**。

$\lim\limits_{h\to+0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to+0}\dfrac{h^3+h}{h}$

$=\lim\limits_{h\to+0}(h^2+1)=1$

$$\lim_{h\to -0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{h}{h}=1$$

両者は一致するから，$x=0$ で**微分可能。**

8 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot f(1-x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\cdot f(1-x)$

$=f'(0)\cdot f(1)=1\cdot 1=\mathbf{1}$

【p. 28】 ❷ 導関数の計算

9 (1) $y'=3\cdot 4x^3-3x^2+1=\mathbf{12x^3-3x^2+1}$

(2) $y'=7x^6-3x^2+1+0=\mathbf{7x^6-3x^2+1}$

10 (1) $y'=(x+1)'(x+3)+(x+1)(x+3)'$

$=1\cdot(x+3)+(x+1)\cdot 1=\mathbf{2x+4}$

(2) $y'=(x+1)'(x^2-x+1)+(x+1)(x^2-x+1)'$

$=1\cdot(x^2-x+1)+(x+1)(2x-1)$

$=(x^2-x+1)+(2x^2+x-1)$

$=\mathbf{3x^2}$

(3) $y'=(2x+1)(x^2-1)+(x^2+x+1)\cdot 2x$

$=(2x^3+x^2-2x-1)+(2x^3+2x^2+2x)$

$=\mathbf{4x^3+3x^2-1}$

(4) $y'=(x-1)'(x-2)(x+3)$

$+(x-1)(x-2)'(x+3)$

$+(x-1)(x-2)(x+3)'$

$=(x^2+x-6)+(x^2+2x-3)+(x^2-3x+2)$

$=\mathbf{3x^2-7}$

11 (1) $y'=\dfrac{(x)'(x+1)-x(x+1)'}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}=\mathbf{\dfrac{1}{(x+1)^2}}$

(2) $y'=\dfrac{1\cdot(x^2+1)-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\mathbf{\dfrac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}}$

(3) $y'=\dfrac{(1)'x-1(x)'}{x^2}=\mathbf{-\dfrac{1}{x^2}}$

別解 $y=x^{-1}$ $y'=-1x^{-2}=\mathbf{-\dfrac{1}{x^2}}$

(4) y'

$=\dfrac{(2x-2)(x^2-x+3)-(x^2-2x+4)(2x-1)}{(x^2-x+3)^2}$

$=\dfrac{(2x^3-4x^2+8x-6)-(2x^3-5x^2+10x-4)}{(x^2-x+3)^2}$

$=\mathbf{\dfrac{x^2-2x-2}{(x^2-x+3)^2}}$

12 (1) $y'=-3x^{-3-1}=\mathbf{-3x^{-4}}$

(2) $y=x^{-2}$ $y'=-2x^{-3}=\mathbf{-\dfrac{2}{x^3}}$

【p. 29】

13 **類題** $x^3+ax+b=(x-1)^2f(x)$ ……①

両辺を x で微分して，

$3x^2+a=2(x-1)f(x)+(x-1)^2f'(x)$ ……②

$x=1$ を①に代入して，$1+a+b=0$

$x=1$ を②に代入して，$3+a=0$

これを解いて，$\boldsymbol{a=-3}$，$\boldsymbol{b=2}$

14 (1) $y'=5\cdot 4x^3-3\cdot 3x^2+2x-1+0$

$=\mathbf{20x^3-9x^2+2x-1}$

(2) $y'=2x(x+3)+x^2\cdot 1=\mathbf{3x^2+6x}$

(3) $y'=1\cdot(3x-2)+(x+2)\cdot 3=\mathbf{6x+4}$

(4) $y'=-3x^2(x^2-x+1)+(1-x^3)(2x-1)$

$=(-3x^4+3x^3-3x^2)+(-2x^4+x^3+2x-1)$

$=\mathbf{-5x^4+4x^3-3x^2+2x-1}$

(5) $y'=(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)$

$+(x-1)(x-2)$

$=(x^2-5x+6)+(x^2-4x+3)+(x^2-3x+2)$

$=\mathbf{3x^2-12x+11}$

(6) $y=(x+1)(x+4)\times(x+2)(x+3)$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$

$y'=(2x+5)(x^2+5x+6)+(x^2+5x+4)(2x+5)$

$=(2x+5)(2x^2+10x+10)$

$=\mathbf{4x^3+30x^2+70x+50}$

15 $f'(x)=\dfrac{a(x-1)-(ax+b)\cdot 1}{(x-1)^2}=\dfrac{-a-b}{(x-1)^2}$

よって，$f(0)=-b$，$f'(2)=-a-b$

$-b=3$，$-a-b=1$ を解いて，$\boldsymbol{a=2}$，$\boldsymbol{b=-3}$

16 (1) $y=x+x^{-1}$

$y'=1-1x^{-2}=\mathbf{1-\dfrac{1}{x^2}}$

(2) $y=1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}=1+x^{-1}-2x^{-2}$

$y'=0-1x^{-2}-2\cdot(-2x^{-3})=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}=\mathbf{\dfrac{-x+4}{x^3}}$

(3) $y'=\dfrac{(4x-1)(x^2+x+2)-(2x^2-x-1)(2x+1)}{(x^2+x+2)^2}$

$=\dfrac{(4x^3+3x^2+7x-2)-(4x^3-3x-1)}{(x^2+x+2)^2}$

$=\mathbf{\dfrac{3x^2+10x-1}{(x^2+x+2)^2}}$

(4) $y'=\dfrac{-nx^{n-1}(1+x)-(1-x^n)\cdot 1}{(1+x)^2}$

$=\mathbf{\dfrac{(1-n)x^n-nx^{n-1}-1}{(1+x)^2}}$

17 与式を $f(x)$ とおく。

$f(1)=-1$ より，$e=-1$

$f'(x)=g(x)=4x^3-3$

$=4a(x-1)^3+3b(x-1)^2+2c(x-1)+d$

$g(1)=1$ より，$d=1$

$g'(x)=h(x)=12x^2=12a(x-1)^2+6b(x-1)+2c$

$h(1)=12$ より，$c=6$

$h'(x)=24x=24a(x-1)+6b$

$h'(1)=24$ より，$b=4$ このとき，$a=1$

以上から，$\boldsymbol{a=1}$，$\boldsymbol{b=4}$，$\boldsymbol{c=6}$，$\boldsymbol{d=1}$，$\boldsymbol{e=-1}$

【p. 30】 ❸ 三角関数の導関数

18 (1) $y'=2(3x-2)\cdot(3x-2)'$

$=2(3x-2)\cdot 3=\mathbf{6(3x-2)}$

(2) $y'=3(x^2-2x-3)^2\cdot(x^2-2x-3)'$

$=3(x^2-2x-3)^2(2x-2)$

$=\mathbf{6(x^2-2x-3)^2(x-1)}$

(3) $y=(x+2)^{-3}$

$y'=-3(x+2)^{-4}\cdot(x+2)'=\mathbf{\dfrac{-3}{(x+2)^4}}$

(4) $y=2(x^2-x+1)^{-2}$

$y'=2\cdot(-2)(x^2-x+1)^{-3}\cdot(x^2-x+1)'$

$=\mathbf{\dfrac{-4(2x-1)}{(x^2-x+1)^3}}$

19 (1) $y^4=x$ より，$\mathbf{\dfrac{dy}{dx}}=\dfrac{1}{4y^3}=\mathbf{\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}}$

(2) $y^3=x-1$ より，$\mathbf{\dfrac{dy}{dx}}=\dfrac{1}{3y^2}=\mathbf{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}}$

20 (1) $y'=1+\cos x$ (2) $y'=-\sin x-2x$

(3) $y'=2\cos x+3\sin x$ (4) $y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}+1$

第 3 章 微分法の応用

【p. 40】 ❶ 接線と法線，平均値の定理

1 (1) $f(x)=x^3-x$　$f'(x)=3x^2-1$　$f'(1)=2$

接線　$y-0=2(x-1)$　$\boldsymbol{y=2x-2}$

法線　$y-0=-\frac{1}{2}(x-1)$　$\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}$

(2) $f(x)=e^x$　$f'(x)=e^x$　$f'(0)=1$

接線　$y-1=1(x-0)$　$\boldsymbol{y=x+1}$

法線　$y-1=-\frac{1}{1}(x-0)$　$\boldsymbol{y=-x+1}$

(3) $f(x)=\sin x$　$f'(x)=\cos x$　$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

接線　$y-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$\boldsymbol{y=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{12}\pi+\frac{1}{2}}$

法線　$y-\frac{1}{2}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$\boldsymbol{y=-\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{2}}$

(4) $f(x)=\log x$　$f'(x)=\frac{1}{x}$　$f'(e)=\frac{1}{e}$

接線　$y-1=\frac{1}{e}(x-e)$　$\boldsymbol{y=\frac{1}{e}x}$

法線　$y-1=-e(x-e)$　$\boldsymbol{y=-ex+e^2+1}$

2 (1) 両辺を x で微分して，

$y+x\frac{dy}{dx}=0$　$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$

$x=2$，$y=8$ を代入して，$\frac{dy}{dx}=-\frac{8}{2}=-4$

接線　$y-8=-4(x-2)$　$\boldsymbol{y=-4x+16}$

法線　$y-8=\frac{1}{4}(x-2)$　$\boldsymbol{y=\frac{1}{4}x+\frac{15}{2}}$

(2) $\frac{dx}{d\theta}=-2\sin\theta$　$\frac{dy}{d\theta}=3\cos\theta$

$\frac{dy}{dx}=\frac{3\cos\theta}{-2\sin\theta}=-\frac{3}{2\tan\theta}$

$\theta=\frac{\pi}{3}$ を代入して，$\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\mathrm{P}(2\cos\theta,\ 3\sin\theta)$ に $\theta=\frac{\pi}{3}$ を代入して，

$\mathrm{P}\left(1,\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

接線　$y-\frac{3\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}(x-1)$

$\boldsymbol{y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+2\sqrt{3}}$

法線　$y-\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{\sqrt{3}}(x-1)$

$\boldsymbol{y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\frac{5\sqrt{3}}{6}}$

3 (1) $f'(x)=2x$　$f'(c)=2c$ より，

$2c=\frac{1}{2}$　よって，$\boldsymbol{c=\frac{1}{4}}$

(2) $f'(x)=\cos x$　$f'(c)=\cos c$ より，

$\cos c=\frac{1}{2}$　よって，$\boldsymbol{c=\frac{\pi}{3}}$

4 (1) $f'(x)=3x^2$

$f(2)-f(-1)=3f'(c)=3\cdot 3c^2$ より，

$c^2=1$，$c=\pm 1$　$-1<c<2$ より，$\boldsymbol{c=1}$

(2) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$　$f(4)-f(1)=3\cdot f'(c)=\frac{3}{2\sqrt{c}}$

より，$1=\frac{3}{2\sqrt{c}}$　よって，$\boldsymbol{c=\frac{9}{4}}$

【p. 41】

5 類題 (1) $f(x)=e^x$ とすると，$f'(x)=e^x$

接点を $(a,\ e^a)$ とすると，接線は，

$y-e^a=e^a(x-a)$

$y=e^ax+e^a(1-a)$ ……①

点 $(1,\ 0)$ を通るから，$0=e^a+e^a(1-a)$

$e^a(2-a)=0$　$e^a>0$ から，$a=2$

①に代入して，$\boldsymbol{y=e^2x-e^2}$

(2) $f(x)=\sqrt{x-1}$ とすると，$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

接点を $(a,\ \sqrt{a-1})$ とすると，接線は，

$y-\sqrt{a-1}=\frac{1}{2\sqrt{a-1}}(x-a)$ ……①

点 $(0,\ 0)$ を通るから，

$-\sqrt{a-1}=-\frac{a}{2\sqrt{a-1}}$　$a=2$

①に代入して，$\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x}$

6 (1) $f(x)=\sqrt{x+3}$　$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$

$f'(6)=\frac{1}{6}$

接線　$\boldsymbol{y=\frac{1}{6}x+2}$

法線　$\boldsymbol{y=-6x+39}$

(2) $f(x)=\cos x$　$f'(x)=-\sin x$

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$

接線　$\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}}$

法線　$\boldsymbol{y=2x-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(3) $f(x)=2^x$　$f'(x)=2^x\log 2$

$f'(1)=2\log 2$

接線　$\boldsymbol{y=(2\log 2)x-2\log 2+2}$

法線　$\boldsymbol{y=-\frac{1}{2\log 2}x+\frac{1}{2\log 2}+2}$

(4) $f(x)=\log_2 x$　$f'(x)=\frac{1}{x\log 2}$

$f'(2)=\frac{1}{2\log 2}$

接線　$\boldsymbol{y=\frac{1}{2\log 2}x-\frac{1}{\log 2}+1}$

法線　$\boldsymbol{y=(-2\log 2)x+4\log 2+1}$

7 (1) $\frac{dx}{dt}=2$，$\frac{dy}{dt}=2t-2$ より，$y'=\frac{dy}{dx}=t-1$

$t=0$ のとき，$y'=-1$，$x=-3$，$y=-4$

接線　$\boldsymbol{y=-x-7}$

法線　$\boldsymbol{y=x-1}$

(2) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ の両辺を x で微分して，

$\frac{x}{3}+\frac{2}{3}yy'=0$　$y'=-\frac{x}{2y}$

点 $(2,\ -1)$ における接線の傾きは 1

接線　$y=x-3$
法線　$y=-x+1$

(3)　$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{9}=1$ の両辺を x で微分して，

$x-\dfrac{2}{9}yy'=0$　　$y'=\dfrac{9x}{2y}$

点$(-2,\ -3)$における接線の傾きは 3

接線　$y=3x+3$

法線　$y=-\dfrac{x}{3}-\dfrac{11}{3}$

(4)　$y^2=-4x$ の両辺を x で微分して，

$yy'=-2$　　$y'=-\dfrac{2}{y}$

点$(-9,\ 6)$における接線の傾きは $-\dfrac{1}{3}$

接線　$y=-\dfrac{x}{3}+3$

法線　$y=3x+33$

8　$f'(x)=3x^2$　　$(a+h)^3-a^3=3h(a+\theta h)^2$

$h>0$ より，$(a+\theta h)^2=a^2+ah+\dfrac{h^2}{3}$

$a+\theta h>0$ より，$a+\theta h=\sqrt{a^2+ah+\dfrac{h^2}{3}}$

よって，$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\sqrt{a^2+ah+\dfrac{h^2}{3}}-a}{h}}$

9　$f(x)=e^x$ とおくと，$f'(x)=e^x$
平均値の定理により，$0<c<x$ において，

$\dfrac{e^x-e^0}{x-0}=\dfrac{e^x-1}{x}=f'(c)=e^c$

$e^0<e^c<e^x$ だから，$1<\dfrac{e^x-1}{x}<e^x$

10　(1)　$f'(x)=-2xe^{-x^2}$
$y=e^{-x^2}$ 上の点$(\alpha,\ e^{-\alpha^2})$における接線の方程式は，$y-e^{-\alpha^2}=-2\alpha e^{-\alpha^2}(x-\alpha)$
これが点$(a,\ 0)$を通るから，
$e^{-\alpha^2}=2\alpha e^{-\alpha^2}(a-\alpha)$
$e^{-\alpha^2}\neq 0$ より，$2\alpha^2-2a\alpha+1=0$ ……①
異なる 2 本の接線が引けるためには，①が異なる 2 つの実数解をもてばよい。

判別式 $\dfrac{D}{4}=a^2-2>0$ のとき，

$\boldsymbol{a<-\sqrt{2},\ \sqrt{2}<a}$

(2)　ただ 1 本の接線が引けるためには，①が重解をもてばよい。

判別式 $\dfrac{D}{4}=a^2-2=0$ のとき，$a=\pm\sqrt{2}$

$\boldsymbol{a=\sqrt{2}}$ **のとき**，$\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ より，

接点は$\left(\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ e^{-\frac{1}{2}}}\right)$

$\boldsymbol{a=-\sqrt{2}}$ **のとき**，$\alpha=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ より，

接点は$\left(\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ e^{-\frac{1}{2}}}\right)$

【p. 42】　**❷ 関数の増減と極大・極小**

11　(1)　$y'=4x^3$　　**$x>0$ で増加，$x<0$ で減少。**

(2)　$y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$　　**$x>1$ で増加，$x<-1$ で減少。**

(3)　$y'=(x+1)e^x$　　$e^x>0$ より，
$x>-1$ で増加，$x<-1$ で減少。

(4)　$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$　　真数条件より $x>0$ だから，**$0<x<e$ で増加，$x>e$ で減少。**

12　(1)　$y'=2-\sin x>0$ より，**単調増加。**
(2)　$y'=\cos x-1$　　$0<x\leqq\pi$ より，$-1\leqq\cos x<1$
よって，$\cos x-1<0$　　この区間では $y'<0$ となるから，**単調減少。**

13　(1)　$3-x\geqq 0$ より，$x\leqq 3$

$y'=\dfrac{\sqrt{3-x}-1}{\sqrt{3-x}}$

x	…	2	…	3
y'	$+$	0	$-$	
y	↗	4	↘	3

極大値 4　$(x=2)$

(2)　$y'=\dfrac{(x+3)(1-x)}{(x^2+3)^2}$

x	…	-3	…	1	…
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	$-\dfrac{1}{6}$	↗	$\dfrac{1}{2}$	↘

極大値$\dfrac{1}{2}$　$(x=1)$，極小値$-\dfrac{1}{6}$　$(x=-3)$

(3)　$y'=\log x+1\,(x>0)$

x	0	…	$\dfrac{1}{e}$	…
y'		$-$	0	$+$
y		↘	$-\dfrac{1}{e}$	↗

極小値$-\dfrac{1}{e}$　$\left(x=\dfrac{1}{e}\right)$

(4)　$y'=-2\sin x\cos x$

x	0	…	$\dfrac{\pi}{2}$	…	π
y'		$-$	0	$+$	
y		↘	-1	↗	

極小値-1　$\left(x=\dfrac{\pi}{2}\right)$

14　(1)　$y'=2-\dfrac{2}{x^3}$　　$y'=0$ のとき，$x=1$

また，$y''=\dfrac{6}{x^4}>0$

極小値 3　$(x=1)$

(2)　$y'=(x+4)(x-2)e^x=f'(x)$ とおく。
$y''=f''(x)=(x^2+4x-6)e^x$
$f'(x)=0$ のとき，$x=-4,\ 2$
$f''(-4)=-6e^{-4}<0$　　$f''(2)=6e^2>0$

極大値$\dfrac{8}{e^4}$　$(x=-4)$，極小値$-4e^2$　$(x=2)$

【p. 43】

15　類題　$f(x)=\dfrac{2(x+a)}{bx^2+c}$

$f'(x)=\dfrac{-2(bx^2+2abx-c)}{(bx^2+c)^2}$

$f(1)=\dfrac{2(1+a)}{b+c}=1,\ f'(1)=\dfrac{-2(b+2ab-c)}{(b+c)^2}=0$

$f(-3)=\dfrac{2(-3+a)}{9b+c}=0$

これを解いて，$\boldsymbol{a=3,\ b=1,\ c=7}$

$f(x)=\dfrac{2(x+3)}{x^2+7}$　　$f'(x)=\dfrac{-2(x+7)(x-1)}{(x^2+7)^2}$

x	$\cdots$	-7	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\dfrac{1}{7}$	↗	1	↘

極大値 1　$(x=1)$，**極小値** $\boldsymbol{-\dfrac{1}{7}}$　$\boldsymbol{(x=-7)}$

16 (1)　$f'(x)=\dfrac{3-4x}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}$

x	$\cdots$	$\dfrac{3}{4}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$
$f(x)$	↗	$\dfrac{3}{4\sqrt[3]{4}}$	↘	0	↘

極大値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{4\sqrt[3]{4}}}$　$\boldsymbol{\left(x=\dfrac{3}{4}\right)}$

(2)　$f'(x)=\dfrac{3(x-1)(x+3)}{(x^2+3)^2}$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\dfrac{3}{2}$	↘	$-\dfrac{1}{2}$	↗

極大値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$　$\boldsymbol{(x=-3)}$，**極小値** $\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$　$\boldsymbol{(x=1)}$

(3)　$f'(x)=x(x+2)e^x$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$4e^{-2}$	↘	0	↗

極大値 $\boldsymbol{\dfrac{4}{e^2}}$　$\boldsymbol{(x=-2)}$，**極小値 0**　$\boldsymbol{(x=0)}$

(4)　$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{(\log x)^2}$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗		↗	$1-e$	↘

極大値 $\boldsymbol{1-e}$　$\boldsymbol{(x=e)}$

(5)　$f'(x)=2(\cos x-\sin 2x)=2\cos x(1-2\sin x)$

$0\leqq x<2\pi$ で $f'(x)=0$ から，

$x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\dfrac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	$\dfrac{3}{2}$	↘	1	↗	$\dfrac{3}{2}$	↘	-3	↗	

極大値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$　$\boldsymbol{\left(x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi\right)}$

極小値 1　$\boldsymbol{\left(x=\dfrac{\pi}{2}\right),\ -3\ \left(x=\dfrac{3}{2}\pi\right)}$

17　$f'(x)=\dfrac{a\cos x+1}{(a+\cos x)^2}$

$f(x)$ が極値をもつためには，$a\cos x+1=0$ が実数解をもてばよい。

$a=0$ のとき，方程式は解をもたないから，$a\neq 0$

このとき，$\cos x=-\dfrac{1}{a}$

$a\neq\pm 1$ のとき，$|\cos x|<1$ より，$\left|-\dfrac{1}{a}\right|<1$

よって，$|a|>1$

$a=\pm 1$ のとき，$f'(x)=0$ において，$\cos x=\pm 1$

このとき，$f'(x)$ の分母が 0 になるので不適。

求める a の値の範囲は，$\boldsymbol{|a|>1}$

18　$f'(x)=-xe^{-x}(x+a-2)$

$f'(x)=0$ より，$x=0,\ 2-a$

(i)　$a=2$ のとき，$f'(x)=-x^2e^{-x}\leqq 0$ より，極値はない。

(ii)　$a<2$ のとき，

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2-a$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

$x=0$ のとき極小になる。

極小値 $f(0)=a$ より，$a=0$

これは $a<2$ を満たす。ゆえに，$\boldsymbol{a=0}$

【p. 44】 ❸ 関数の最大・最小

19　$f'(x)=4x(x^2-2)$

x	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	↘	-4	↗	0	↘	-4	↗	-3

最大値 0　$\boldsymbol{(x=0)}$，**最小値** $\boldsymbol{-4}$　$\boldsymbol{(x=\pm\sqrt{2})}$

20　$f'(x)=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

x	$\dfrac{3}{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\dfrac{7}{2}$	↘	3	↗	$\dfrac{13}{3}$

最大値 $\boldsymbol{\dfrac{13}{3}}$　$\boldsymbol{(x=4)}$，**最小値 3**　$\boldsymbol{(x=2)}$

21　$f'(x)=\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	9
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	-3

最大値 1　$\boldsymbol{(x=1)}$，**最小値** $\boldsymbol{-3}$　$\boldsymbol{(x=9)}$

22　$f'(x)=e^x(x+1)$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\dfrac{2}{e^2}$	↘	$-\dfrac{1}{e}$	↗	$2e^2$

最大値 $\boldsymbol{2e^2}$　$\boldsymbol{(x=2)}$，**最小値** $\boldsymbol{-\dfrac{1}{e}}$　$\boldsymbol{(x=-1)}$

23　$f'(x)=\log x+1$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{e}$	$\cdots$	e
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$-\dfrac{1}{e}$	↗	e

第4章 積分法

【p. 56】 ❶ 不定積分

1 (1) 与式$=\dfrac{1}{4+1}x^{4+1}+C=\boldsymbol{\dfrac{1}{5}x^5+C}$

(2) 与式$=\dfrac{1}{-3+1}x^{-3+1}+C=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}x^{-2}+C}$

(3) 与式$=\displaystyle\int x^{\frac{1}{3}}dx=\dfrac{1}{\frac{4}{3}}x^{\frac{4}{3}}+C=\boldsymbol{\dfrac{3}{4}x\cdot\sqrt[3]{x}+C}$

(4) 与式$=\displaystyle\int x^{-\frac{2}{4}}dx=\dfrac{1}{\frac{2}{4}}x^{\frac{2}{4}}+C=\boldsymbol{2\cdot\sqrt[4]{x^2}+C}$

2 (1) 与式$=\displaystyle\int\left(x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\right)dx$

$=\dfrac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+2\cdot\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

$=\boldsymbol{\dfrac{2}{7}x^3\cdot\sqrt{x}+\dfrac{4}{5}x^2\cdot\sqrt{x}+\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C}$

(2) 与式$=\displaystyle\int\left(4x^{\frac{1}{3}}-5x^{\frac{1}{4}}\right)dx$

$=4\cdot\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-5\cdot\dfrac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}+C=\boldsymbol{3x\cdot\sqrt[3]{x}-4x\cdot\sqrt[4]{x}+C}$

(3) 与式$=\displaystyle\int\left(2x^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

$=2\cdot\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+3\cdot2x^{\frac{1}{2}}+C=\boldsymbol{\dfrac{4}{3}x\sqrt{x}+6\sqrt{x}+C}$

(4) 与式$=\displaystyle\int\left(2x+\dfrac{3}{x}-x^{-2}\right)dx$

$=2\cdot\dfrac{1}{2}x^2+3\log|x|-(-1)x^{-1}+C$

$=\boldsymbol{x^2+3\log|x|+\dfrac{1}{x}+C}$

3 (1) $\dfrac{2^x}{\log 2}+C$

(2) $3x+2e^x+C$

(3) $x+5\cos x+C$

(4) $-4\cos x-3\sin x+C$

【p. 57】

4 類題 (1) 与式$=\displaystyle\int\dfrac{1+\cos x}{2}dx$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\sin x+C}$

(2) 与式$=\displaystyle\int\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+1}\right)dx$

$=\dfrac{1}{3}(\log|x-2|-\log|x+1|)+C$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\log\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|+C}$

5 (1) 与式$=\displaystyle\int\left(x^2+4x-\dfrac{3}{x}-7x^{-2}\right)dx$

$=\dfrac{1}{3}x^3+4\cdot\dfrac{1}{2}x^2-3\log|x|-7\cdot(-1)x^{-1}+C$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}x^3+2x^2-3\log|x|+\dfrac{7}{x}+C}$

(2) 与式$=\displaystyle\int\left(2x+\dfrac{3}{x}-x^{-2}\right)dx$

$=2\cdot\dfrac{1}{2}x^2+3\log|x|-(-1)x^{-1}+C$

$=\boldsymbol{x^2+3\log|x|+\dfrac{1}{x}+C}$

6 (1) 与式$=\displaystyle\int\left(x^{\frac{3}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

$=\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+2\cdot2x^{\frac{1}{2}}+C=\boldsymbol{\dfrac{2}{5}x^2\cdot\sqrt{x}+4\sqrt{x}+C}$

(2) 与式$=\displaystyle\int\left(t+2t^{\frac{2}{3}}+t^{\frac{1}{3}}\right)dt$

$=\dfrac{1}{2}t^2+2\cdot\dfrac{3}{5}t^{\frac{5}{3}}+\dfrac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}+C$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{6}{5}t\cdot\sqrt[3]{t^2}+\dfrac{3}{4}t\cdot\sqrt[3]{t}+C}$

(3) $2e^x-\dfrac{1}{3}x^3+C$

(4) $-3\cos x+\sin x+e^x+C$

7 (1) 与式$=\displaystyle\int\dfrac{1-\cos^2x}{\cos^2x}dx=\int\left(\dfrac{1}{\cos^2x}-1\right)dx$

$=\boldsymbol{\tan x-x+C}$

(2) 与式$=\displaystyle\int\dfrac{1-\sin^2x}{1-\sin x}dx=\int(1+\sin x)dx$

$=\boldsymbol{x-\cos x+C}$

【p. 58】 ❷ 置換積分法，部分積分法

8 (1) 与式$=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int(2x+3)^3 2\,dx=\dfrac{1}{2}\int t^3dt$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}t^4+C=\boldsymbol{\dfrac{1}{8}(2x+3)^4+C}$

(2) 与式$=\displaystyle\int\sqrt{t}\,dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt=\dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$

$=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+C}$

(3) 与式$=\displaystyle\int\dfrac{1}{t^2}dt=\int t^{-2}dt=-t^{-1}+C$

$=\boldsymbol{-\dfrac{1}{x+6}+C}$

(4) 与式$=\displaystyle\int\dfrac{1}{\sqrt[3]{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{3}}dt=\dfrac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}+C$

$=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+C}$

9 (1) 与式$=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\dfrac{1}{x^2+1}\cdot2x\,dx=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{1}{t}dt$

$=\dfrac{1}{2}\log|t|+C=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\log(x^2+1)+C}$

(2) 与式$=\displaystyle\int\dfrac{1}{e^x-2}\cdot e^x dx=\int\dfrac{1}{t}dt$

$=\log|t|+C=\boldsymbol{\log|e^x-2|+C}$

10 (1) 与式$=-\displaystyle\int\cos^2x(-\sin x)dx=-\int t^2dt$

$=-\dfrac{1}{3}t^3+C=\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}\cos^3x+C}$

(2) 与式$=\displaystyle\int t^3dt=\dfrac{1}{4}t^4+C=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}\sin^4x+C}$

(3) 与式$=\displaystyle\int(\log x)^3\cdot\dfrac{1}{x}dx=\int t^3dt=\dfrac{1}{4}t^4+C$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}(\log x)^4+C}$

(4) 与式$=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int e^{x^2+1}\cdot2x\,dx=\dfrac{1}{2}\int e^t dt$

$=\dfrac{1}{2}e^t+C=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}e^{x^2+1}+C}$

11 (1) 与式$=\int x(e^x)'dx=xe^x-\int 1\cdot e^x dx$

$=(x-1)e^x+C$

(2) 与式$=\int (x)'\log x\,dx=x\log x-\int dx$

$=x\log x-x+C$

(3) 与式$=\int x(-\cos x)'dx$

$=-x\cos x+\sin x+C$

(4) 与式$=\int\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\log x\,dx$

$=\frac{1}{4}x^2(2\log x-1)+C$

【p. 59】

12 類題 $J=\int e^x(\sin x)'dx$

$=e^x\sin x-\int e^x\sin x\,dx$

$=e^x\sin x+\int e^x(\cos x)'dx$

$=e^x\sin x+e^x\cos x-\int e^x\cos x\,dx$

つまり，$J=e^x\sin x+e^x\cos x-J$

$2J=e^x(\sin x+\cos x)$

よって，$J=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C$

13 (1) 与式$=\int\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+2x+2)'}{x^2+2x+2}dx$

$=\frac{1}{2}\log(x^2+2x+2)+C$

(2) 与式$=\int\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2)'dx$

$=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$

(3) 与式$=\int\frac{1}{2}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(x^2-1)'dx$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}(x^2-1)\sqrt{x^2-1}+C$

(4) 与式$=\int\cos^2x\cdot\cos x\,dx$

$=\int(1-\sin^2x)\cos x\,dx$

$=\int\cos x\,dx-\int\sin^2x(\sin x)'dx$

$=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3x+C$

(5) 与式$=\int\log x(\log x)'dx=\frac{1}{2}(\log x)^2+C$

(6) 与式$=\int 2\sin x\cos^2x\,dx$

$=-2\int\cos^2x(\cos x)'dx$

$=-\frac{2}{3}\cos^3x+C$

14 (1) 与式$=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{(\sin x)'}{\sin x}dx$

$=\log|\sin x|+C$

(2) 与式$=\int\frac{\sin x}{\sin^2x}dx=\int\frac{\sin x}{1-\cos^2x}dx$

$\cos x=t$ とおく。

与式$=-\int\frac{1}{1-t^2}dt=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt$

$=-\frac{1}{2}(\log|1+t|-\log|1-t|)+C$

$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+C=\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+C$

(3) 与式$=\int\frac{\cos x}{\cos^2x}dx=\int\frac{\cos x}{1-\sin^2x}dx$

$\sin x=t$ とおく。

与式$=\int\frac{1}{1-t^2}dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt$

$=\frac{1}{2}(\log|1+t|-\log|1-t|)+C$

$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C$

15 (1) 与式$=\int x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx$

$=x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)-\int\frac{1}{2}e^{2x}dx=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$

$=\frac{1}{4}(2x-1)e^{2x}+C$

(2) 与式$=\int\left\{\frac{1}{2}(x+1)^2\right\}'\log x\,dx$

$=\frac{1}{2}(x+1)^2\log x-\int\frac{1}{2}(x+1)^2\frac{1}{x}dx$

$=\frac{1}{2}(x+1)^2\log x-\frac{1}{2}\int\left(x+2+\frac{1}{x}\right)dx$

$=\frac{1}{2}(x+1)^2\log x-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2+2x+\log|x|\right)+C$

$=\frac{1}{2}x(x+2)\log x-\frac{1}{4}x^2-x+C$

(3) 与式$=\int x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)'dx$

$=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\int\frac{1}{2}\cos 2x\,dx$

$=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

(4) 与式$=\int x^2(-\cos x)'dx$

$=-x^2\cos x+\int 2x\cos x\,dx$

$=-x^2\cos x+2\int x(\sin x)'dx$ （更に部分積分）

$=(2-x^2)\cos x+2x\sin x+C$

16 $I_n=\int\sin x\sin^{n-1}x\,dx$

$=\int(-\cos x)'\sin^{n-1}x\,dx$

$=(-\cos x)\sin^{n-1}x$

$-\int(-\cos x)(\sin^{n-1}x)'dx$

$=-\cos x\sin^{n-1}x$

$+(n-1)\int\sin^{n-2}x(1-\sin^2x)dx$

$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)(I_{n-2}-I_n)$

よって，$nI_n=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)I_{n-2}$

【p. 60】 ❸ 定積分

17 (1) 与式$=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^4=\frac{2}{3}(4\sqrt{4}-1)=\frac{14}{3}$

第5章 積分法の応用

以下，とくに指示がなければ，Sは「求める面積」，Vは「求める体積」とする。

【p. 72】 ❶ 面 積 (1)

1 (1) $S=\int_4^9 \sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_4^9=\frac{38}{3}$

(2) $S=\int_0^1 e^x dx=\left[e^x\right]_0^1=e-1$

(3) $S=\int_0^\pi \sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^\pi=2$

(4) $S=\int_{\frac{1}{2}}^1(-\log x)dx=-\left[x\log x-x\right]_{\frac{1}{2}}^1$
$=\frac{1}{2}(1-\log 2)$

2 (1) $S=\int_1^{\sqrt{2}}\{-(y^2-2)\}dy=\left[-\frac{1}{3}y^3+2y\right]_1^{\sqrt{2}}$
$=\frac{4\sqrt{2}-5}{3}$

(2) $S=\int_1^e\left(\frac{1}{y}+1\right)dy=\left[\log|y|+y\right]_1^e=e$

(3) $S=\int_e^{e^2}\log y\,dy=\left[y\log y-y\right]_e^{e^2}=e^2$

(4) $S=\int_0^2 e^y dy=\left[e^y\right]_0^2=e^2-1$

3 (1) $S=\int_{-1}^1|x^3-x|dx=2\int_0^1(x-x^3)dx=\frac{1}{2}$

(2) $S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(\sin x-\cos x)dx$
$=\left[-\cos x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}=2\sqrt{2}$

【p. 73】

4 類題 $S=\int_0^e\frac{x}{e}dx-\int_1^e\log x\,dx=\frac{e}{2}-1$

5 (1) $S=\int_1^e\frac{1}{x}dx=\left[\log|x|\right]_1^e=1$

(2) $S=2\int_0^8 x^{\frac{2}{3}}dx=2\left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right]_0^8=\frac{192}{5}$

(3) $S=\int_0^1 e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^1=1-\frac{1}{e}$

(4) $S=\int_0^\pi x\sin x\,dx+\int_\pi^{2\pi}(-x\sin x)dx$
$=\left[-x\cos x+\sin x\right]_0^\pi-\left[-x\cos x+\sin x\right]_\pi^{2\pi}$
$=4\pi$

6 (1) $S=\int_0^2\left(\sqrt{2x}-\frac{x^2}{2}\right)dx=\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}x\sqrt{x}-\frac{x^3}{6}\right]_0^2$
$=\frac{4}{3}$

(2) $S=\int_0^4\{x(3-x)-(x-4\sqrt{x})\}dx=16$

(3) $S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\sin x)dx$
$+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin x-\sin 2x)dx$
$=\left[-\frac{\cos 2x}{2}+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$
$+\left[-\cos x+\frac{\cos 2x}{2}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\frac{5}{2}$

(4) $S=2\int_0^2\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})dx=\left[e^x-e^{-x}\right]_0^2$
$=e^2-\frac{1}{e^2}$

7 (1) $y'=(1-x)e^{-x}$　$y''=(x-2)e^{-x}$
変曲点は$(2,\ 2e^{-2})$　接線の方程式は，
$y-2e^{-2}=-e^{-2}(x-2)$より，$y=-\frac{1}{e^2}x+\frac{4}{e^2}$

(2) $S=\int_0^2\{(-e^{-2}x+4e^{-2})-xe^{-x}\}dx$
$=\left[-\frac{1}{2}e^{-2}x^2+4e^{-2}x+(x+1)e^{-x}\right]_0^2=\frac{9}{e^2}-1$

【p. 74】 ❷ 面 積 (2)

8 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$より，$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$　$(|x|\leqq a)$
$S=\int_{-a}^a\left\{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}-\left(-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)\right\}dx$
$=4\cdot\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=4\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{\pi a^2}{4}=\pi ab$

9 (1) 与式はyを$-y$におき換えても不変だから，グラフはx軸に関して対称である。
$y=x\sqrt{1-x}$　$(0\leqq x\leqq 1)$のグラフを考える。
$S=2\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$
$=2\left[\frac{2}{15}(-3x-2)(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{8}{15}$

(2) 与式より，$y=\frac{1}{2}(x\pm\sqrt{3(4-x^2)})$　$(|x|\leqq 2)$
$S=\int_{-2}^2\left\{\frac{1}{2}(x+\sqrt{3(4-x^2)})\right.$
$\left.-\frac{1}{2}(x-\sqrt{3(4-x^2)})\right\}dx$
$=2\sqrt{3}\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx=2\sqrt{3}\pi$

10 $x=2t$，$y=1-t^2$から，tを消去して，
$y=1-\frac{x^2}{4}$
$S=2\int_0^2\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx=\frac{8}{3}$

11 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$より，$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$
第1象限だけを考えて，
$S=4\int_0^3 y\,dx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 2\sin\theta(-3\sin\theta)d\theta$
$=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta=24\left[\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=6\pi$

12 $\int_0^\pi\sin x\,dx=2$，$\sin x=k\sin\frac{x}{2}$を満たすxの値をα $(0<\alpha<\pi)$とすると，$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{k}{2}$が成立。
このとき，$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=\frac{k^2}{2}-1$
題意より，$\int_0^\alpha\left(\sin x-k\sin\frac{x}{2}\right)dx=1$だから，
$\left[-\cos x+2k\cos\frac{x}{2}\right]_0^\alpha=1$
これをkについてまとめると，$k^2-4k+2=0$
$0<k<2$より，$k=2-\sqrt{2}$

13 (i) $0<t\leqq 1$のとき，$x<1$では$\log x<0$より，