数学A

数学A

特　色

本書は，学習指導要領をふまえ，各単元の標準的なレベルの問題を，年間を通じてじっくり完全マスターし，あわせて，受験への基礎対策用としても使用できるように編集されています。

数学は体系が整然としている学問ですから，1つの単元を把握するためには，それを構成している基本事項を正確に理解し，さらに，その単元における典型的な問題の解法パターンを習得することが必要です。

そこで本書では，各単元において，基本事項や重要事項を習得するための基本レベルの問題を取り上げ，それらを反復練習することでまず基礎を固め，続いて，単元の内容をより深く理解する上で必須となる標準レベルの問題を精選して，その解き方をパターンとして学ぶことによって，幅広い応用力が定着するようにしました。

構　成

○数学Aで学習する事項を，4章31セクションに分けました。
○各セクションは見開き2ページ構成で，年間計画がたてやすいよう配慮されています。

☆1セクションの構成

(セクション)

学習の要点	言葉による基本事項の説明。 公式や計算法則の例示。
基本問題	新しく学習する内容についての理解度をチェックする。 基本レベルの問題で構成。
例　題	単元を代表する標準レベルの問題を，解き方のパターンをも含めて学習する。
標準問題 発展問題	例題の関連問題を解きながら，応用範囲の広い実戦力の養成をめざす。
章末問題	章全体のまとめと，程度の高い問題で応用力を養う。

もくじ

第 1 章　場合の数

1　集合の要素の個数

★学習の要点★

❶ **有限集合と無限集合**

(1)　要素の個数が有限である集合を**有限集合**といい，有限集合 A の要素の個数を $n(A)$ で表す。

(2)　要素の個数が有限でない集合を**無限集合**という。

❷ **和集合の要素の個数**

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

とくに，$A\cap B=\phi$ のとき，$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

❸ **補集合の要素の個数**

$n(\overline{A})=n(U)-n(A)$

● 基本問題 ●●

1　［**集合の要素の個数**］　次の集合 A について，$n(A)$ の値を求めよ。

(1)　$A=\{x \mid x^2-1=0\}$　　(2)　$A=\{x \mid x^2+4=0,\ x$ は実数$\}$

(3)　$A=\{x \mid -2\leqq x<2,\ x$ は整数$\}$　　(4)　$A=\{x \mid x$ は 28 の正の約数$\}$

2　［**和集合の要素の個数**］　1 から 100 までの整数のうち，3 の倍数の集合を A，5 の倍数の集合を B とする。次の集合の要素の個数を求めよ。

(1)　A　　(2)　B　　(3)　$A\cap B$　　(4)　$A\cup B$

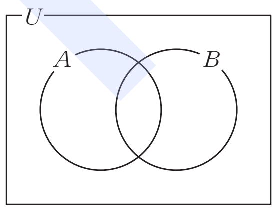
3　［**補集合の要素の個数**］　1 から 100 までの整数のうち，4 で割り切れる数の集合を P とする。次の集合の要素の個数を求めよ。

(1)　P　　(2)　$\overline{P}$

4　［**和集合，補集合の要素の個数**］　全体集合 U と，その部分集合 A，B について，

$n(U)=50,\quad n(A)=28,\quad n(B)=19,\quad n(A\cap B)=6$

であるとき，次の集合の要素の個数を求めよ。



(1)　$A\cup B$　　(2)　$\overline{A}\cap\overline{B}$

(3)　$\overline{A}\cap B$　　(4)　$A\cup\overline{B}$

例題 ① 要素の個数

1 から 100 までの整数について，2，3，5 のいずれかで割り切れる数はいくつあるか。

着眼点　$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$ が成り立つ。

解　2 の倍数の集合を A，3 の倍数の集合を B，5 の倍数の集合を C とすると，

$$n(A)=50,\quad n(B)=33,\quad n(C)=20$$

$A\cap B$ は，2 でも 3 でも割り切れる整数の集合だから，6 の倍数の集合。よって，$n(A\cap B)=16$

同様に，$B\cap C$ は 15 の倍数，$C\cap A$ は 10 の倍数の集合より，$n(B\cap C)=6$，　$n(C\cap A)=10$

また，$A\cap B\cap C$ は 30 の倍数の集合だから，$n(A\cap B\cap C)=3$

求める集合は $A\cup B\cup C$ だから，その個数は，

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$$
$$=50+33+20-16-6-10+3=74$$

答　74 個

5　**類題**　1 から 200 までの自然数の集合を N とし，A，B，C を N の部分集合とする。A は 3 の倍数のすべての集合，B は 5 の倍数のすべての集合，C は 7 の倍数のすべての集合とする。集合 S の要素の個数を $n(S)$ で表すとき，次の各個数を求めよ。

(1)　$n(A)$，$n(B)$，$n(C)$　　(2)　$n(A\cap B)$，$n(A\cap B\cap C)$

(3)　$n(A\cup B)$，$n(A\cup B\cup C)$

▶ 標準問題 ◀◀

6　1 から 100 までの自然数で，2 の倍数全体の集合を A，3 の倍数全体の集合を B，5 の倍数全体の集合を C とするとき，次の各個数を求めよ。

(1)　$n(A\cup B)$　　(2)　$n(A\cup C)$　　(3)　$n(\overline{A}\cup\overline{B})$

(4)　$n(\overline{A}\cap\overline{C})$　　(5)　$n(A\cap B\cap C)$　　(6)　$n(A\cup B\cup C)$

7　200 以下の正の整数の中で，3 の倍数であるが，4 の倍数でも 5 の倍数でもない数はいくつあるか。

◆ 発展問題 ◆◆

8　ある市場調査に 300 人のモニターが回答し，電気製品 A，B，C を持っているかどうかが調べられた。A を持っている人，B を持っている人，C を持っている人はそれぞれ 100 人，120 人，130 人であった。3 種類とも持っている人は 10 人，3 種類とも持っていない人は 60 人であった。

どれか 2 種類を持っているのは何人か。

ヒント　まず，$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$ を求める。

2 場合の数

★学習の要点★

❶ 和の法則

2つのことがら A，B があって，A の起こる場合が a 通り，B の起こる場合が b 通りある。A と B は同時には起こらないとき，A または B の起こる場合は，$a+b$ 通りある。

❷ 積の法則

2つのことがら A，B があって，A の起こる場合が a 通り，そのどの場合についても B の起こる場合が b 通りあるとき，A と B がともに起こる場合は，$a \times b$ 通りある。

● 基本問題 ●●

9 ［**和の法則①**］ 大小2つのサイコロを投げるとき，次の場合の数を求めよ。

(1) 目の和が5　　(2) 目の和が5または8

(3) 目の和が9以上　　(4) 目の積が偶数

10 ［**和の法則②**］ 1から7までの整数を1つずつ書いたカードから2枚を選び，そのカードを並べて2けたの整数をつくる。このとき，できた整数が5または6の倍数となる場合は何通りあるか。

11 ［**積の法則①**］ A市からB市に行く道は4通り，B市からC市に行く道は3通りある。このとき，A市からB市を経てC市へ行くのに，何通りの行き方があるか。

12 ［**積の法則②**］ 1個のサイコロを続けて3回投げるとき，次の場合の数を求めよ。

(1) 出た目が3回とも5以上になる目の出方

(2) 出た目の積が奇数になる目の出方

13 ［**積の法則③**］ 次の式を展開したときの項の個数を求めよ。

(1) $(a+b+c+d)(x+y)$　　(2) $(a+b)(p+q)(x+y+z)$

例題 2 約数の個数

72 の正の約数の個数を求めよ。また，これらの約数全体の和を求めよ。

着眼点　素因数分解をする。$A=x^ay^bz^c$ とすると，A の正の約数の個数は $(a+1)(b+1)(c+1)$，A の正の約数の総和は $(1+x+\cdots+x^a)(1+y+\cdots+y^b)(1+z+\cdots+z^c)$

解　素因数分解すると，$72=2^3\times3^2$ であるから，
72 の正の約数は，2^3 の約数と 3^2 の約数の積の形で表される。
2^3 の約数は，1，2，2^2，2^3 の 4 個，3^2 の約数は，1，3，3^2 の 3 個あるから，
求める約数の個数は，積の法則より，$4\times3=12$（個）　……答
また，72 の約数は，$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)$ の展開式にすべて現れる。
よって，約数の総和は，$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)=15\times13=195$　……答

14 類題　次の数の正の約数の個数を求めよ。また，これらの約数全体の和を求めよ。

(1)　180　　(2)　800

▶ 標準問題 ◀◀

15　大中小 3 つのサイコロを同時に投げるとき，次の場合の数を求めよ。

(1)　目の和が 14 以上　　(2)　目の積が奇数

(3)　目の積が偶数　　(4)　少なくとも 2 つの目が奇数

16　かき 2 個，りんご 4 個，みかん 6 個がある。これらから，6 個取り出す方法は，何通りあるか。

17　5 個の数字 0，1，2，3，4 の中から 3 個取り出してできる 3 けたの整数は，いくつあるか。また，そのうち奇数はいくつあるか。

18　3 けたの自然数で，少なくとも 1 つのけたに 3 の倍数があるものはいくつあるか。

19　$3x+2y+z=10$ を満たす正の整数の組は全部でいくつあるか。

◆ 発展問題 ◆◆

20　長さが 3 cm，5 cm，7 cm，8 cm，10 cm の 5 本の棒から 3 本を使って作ることができる三角形の個数を求めよ。

ヒント　a，b，c が三角形の各辺の長さであるための条件は，$c\leqq b\leqq a$ のとき，$b+c>a$ である。

章末問題

A

1　ある高校の生徒 50 人に聞いたところ，サッカーの好きな生徒が 36 人，野球の好きな生徒が 28 人，どちらも好きでない生徒が 9 人であった。次のような生徒は何人いるか。

(1)　サッカーと野球の両方好きな生徒　　　(2)　サッカーだけが好きな生徒

2　次の $\boxed{\quad\quad}$ にあてはまる数を求めよ。

(1)　1 から 250 までの整数のうち，6 または 8 で割り切れるものは $\boxed{\quad\quad}$ 個ある。

(2)　1 から 1000 までの整数のうち，12 で割り切れないものは $\boxed{\quad\quad}$ 個あり，そのうち 5 で割り切れるものは $\boxed{\quad\quad}$ 個ある。

3　サイコロを続けて n 回投げる。このとき，目の出方は全部で $\boxed{\text{(ア)}}$ 通りある。また，1 の目が 1 回も出ない目の出方は $\boxed{\text{(イ)}}$ 通りあり，1 の目も 2 の目も 1 回も出ない目の出方は $\boxed{\text{(ウ)}}$ 通りある。したがって，1，2 の中の少なくとも一方の目が 1 回も出ない目の出方は $\boxed{\text{(エ)}}$ 通りある。

4　次の $\boxed{\quad}$ にあてはまる数を求めよ。

(1)　1 から 9 までの 9 個の数字から，相異なる 2 個を用いてつくられる 2 けたの整数は $\boxed{\text{(ア)}}$ 個ある。また，それらの整数の総和は $\boxed{\text{(イ)}}$ である。

(2)　1 と 2 をちょうど 2 回ずつ使ってできる 4 けたの整数は $\boxed{\text{(ア)}}$ 個ある。また，0，1，2 をそれぞれ 2 回ずつ使ってできる 6 けたの整数は $\boxed{\text{(イ)}}$ 個ある。

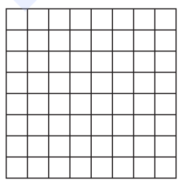
5　5 個の数字 1，2，3，4，5 の全部を 1 列に並べてつくる 5 けたの整数のうち，万の位に 1 がくることも千の位に 2 がくることもないようなものは何通りあるか。

6　6 個の異なる品物を A，B，C の 3 人に分ける方法について，次の問いに答えよ。

(1)　品物を 1 個ももらえない人がいてもよいとすると，分け方は何通りあるか。

(2)　A，B，C がいずれも，少なくとも 1 個の品物をもらうとすると，分け方は何通りあるか。

7　図のような 8×8 マスの方眼紙を考える。



(1)　方眼紙にある正方形の総数を求めよ。

(2)　方眼紙にある長方形の総数を求めよ。ただし，長方形は正方形を含むものとする。

B

8　全体集合 X を 30 以下の自然数の集合とし，X の部分集合を，$A=\{x\,|\,x$ は 3 の倍数$\}$，$B=\{x\,|\,x$ は 5 の倍数$\}$ とする。また，X の部分集合 C は，次の 4 つの条件を満たすものとする。

①　C の要素の個数は 8　　②　$A\cap C$ の要素の個数は 5

③　$B\cap C$ の要素の個数は 4　　④　$A\cap B\cap C$ の要素の個数は 2

このとき，$A\cup B\cup C$，$C\cap(\overline{A\cup B})$ の要素の個数を求めよ。

9　A，B，C，D，E の 5 人に対して，各人に 1 枚ずつはがきを出す。はがきは 3 種類あり，各種類とも十分な枚数があるものとする。また，どの種類のはがきも少なくとも 1 枚は出すものとする。はがきの出し方の場合の数を求めよ。

10　男子 5 人と女子 4 人の 9 人が，次のように 3 人ずつ A，B，C の 3 室に入る方法は何通りあるか。

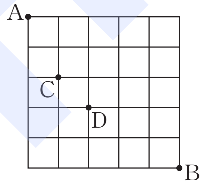
(1)　A には男子だけが入る　　(2)　3 室のうち 1 室には女子だけが入る

(3)　各室に女子が少なくとも 1 人入る　　(4)　女子が 2 人ずつ 2 室に分かれて入る

11　10 人着席できる 2 つの丸いテーブル A，B があり，そこに 18 人を座らせたい。何通りの方法があるか。ただし，各テーブルには座席番号がついていて，座席は区別できるものとする。また，特定の 2 人はおのおの A，B に座るものとすれば何通りの方法があるか。

12　A，A，A，B，B，C，C の合わせて 7 個の文字がある。この 7 個の文字を 1 列に並べてできる順列の総数は $\boxed{(1)}$ 個である。これら $\boxed{(1)}$ 個の順列の中で，AB の順序で A と B が隣り合って並ぶものを 2 個含む順列は $\boxed{(2)}$ 個あり，1 個含む順列は $\boxed{(3)}$ 個ある。

13　図のように，東西 6 本と南北 6 本の道があり，A，B，C，D の 4 地点がある。このとき，A から C を通って B に至る最短路の数は $\boxed{(1)}$ であり，A から C と D を通って，B に至る最短路の数は $\boxed{(2)}$ である。したがって，A から B に至る最短路で，C も D も通らない道の数は $\boxed{(3)}$ である。



ヒント　**8** まず，A，B の条件から $n(A)$，$n(B)$，$n(A\cap B)$ を求める。 **9** 3 種類のはがきの枚数の組合せは，$\{3,\ 1,\ 1\}$，$\{2,\ 2,\ 1\}$ の 2 通り。 **10** (3)女子 2 人の部屋は 1 室で，他の 2 室は 1 人ずつ。 **12** (2)(3) AB をひとまとめにして考える。 **13** C または D を通る事象の余事象である。

第 2 章　確率

1　確率の意味

★学習の要点★

❶ **試行と事象**

(1) 同じ状態のもとで繰り返し行うことのできる実験や観察を，一般に**試行**という。

(2) 試行の結果として起こることがらを**事象**という。

❷ **根元事象，全事象，空事象**

(1) 結果として考えられる事象のうち，これ以上分けることができない事象を**根元事象**という。

(2) ある試行において，根元事象の全体からなる事象を**全事象**という。

(3) 決して起こらない事象を**空事象**という。ϕ で表す。

❸ **和事象，積事象，余事象**

(1) A または B が起こる事象を A と B の**和事象**という。$A \cup B$ で表す。

(2) A と B がともに起こる事象を A と B の**積事象**という。$A \cap B$ で表す。

(3) A が起こらない事象を A の**余事象**という。$\overline{A}$ で表す。

● 基本問題 ●●

1［**根元事象**］　次の試行における根元事象をすべて書け。

(1) $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$の 4 枚のカードから 1 枚を取り出す。

(2) 2 枚の硬貨を投げて表裏の出方をみる。

(3) 1 つのサイコロを投げて目の出方をみる。

2［**和事象と積事象**］　1 つのサイコロを投げて目の出方をみる試行において，奇数の目が出る事象を A，4 以上の目が出る事象を B とするとき，和事象 $A \cup B$，積事象 $A \cap B$ を求めよ。

3［**余事象**］　大小 2 つのサイコロを同時に投げるとき，次の事象の余事象を求めよ。

(1) 目の和が 10 以下である。

(2) 少なくとも一方の目が偶数である。

例題 1　事象

1 個のサイコロを投げて，偶数の目が出る事象を A，6 の約数の目が出る事象を B とするとき，次の事象を表す集合を求めよ。

(1)　$A\cup B$　　(2)　$A\cap B$　　(3)　$\overline{A}$　　(4)　$\overline{A}\cap\overline{B}$

着眼点　事象は，根元事象を要素とした集合で表す。

解　(1)　$A=\{2,\ 4,\ 6\}$，$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ と表せる。$A\cup B$ は偶数かまたは 6 の約数。
よって，$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$　……答

(2)　$A\cap B$ は偶数でかつ 6 の約数だから，$A\cap B=\{2,\ 6\}$　……答

(3)　$\overline{A}$ は偶数でない，つまり奇数の事象だから，$\overline{A}=\{1,\ 3,\ 5\}$　……答

(4)　$\overline{B}$ は 6 の約数でない事象だから，$\overline{B}=\{4,\ 5\}$　$\overline{A}\cap\overline{B}$ は奇数かつ 6 の約数でない事象。
よって，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{5\}$　……答

4　**類題**　1 から 9 の数字を 1 つずつ書いた 9 枚のカードがある。任意に 1 枚取り出し，奇数の出る事象を A，素数の出る事象を B とするとき，次の事象を表す集合を求めよ。

(1)　$A\cup B$　　(2)　$A\cap B$　　(3)　$\overline{B}$　　(4)　$\overline{A}\cap\overline{B}$

▶ 標準問題 ◀◀

5　1 個のサイコロを投げるとき，奇数の目が出る事象を A，4 未満の数の目が出る事象を B とするとき，次の事象を表す集合を求めよ。

(1)　$A\cap B$　　(2)　$A\cup B$　　(3)　$\overline{A}\cup\overline{B}$　　(4)　$A\cap\overline{B}$

6　2 枚の硬貨を同時に投げるとき，2 枚とも表になる事象を A，表裏 1 枚ずつになる事象を B とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　根元事象をすべて求めよ。　　(2)　$A\cup B$ を求めよ。

(3)　$\overline{A}$ を求めよ。　　(4)　$\overline{A}\cap\overline{B}$ を求めよ。

◆ 発展問題 ◆◆

7　根元事象 m 個よりなる全事象を，A とその余事象 $\overline{A}$ に，また B とその余事象 $\overline{B}$ に分類したら，

$$n(A\cap B)=a,\ n(A\cap\overline{B})=b,\ n(\overline{A}\cap B)=c,\ n(\overline{A}\cap\overline{B})=d$$

となった。有限集合 D に属する根元事象の個数を $n(D)$ で表すとき，$n(A)$，$n(\overline{A})$，$n(B)$，$n(\overline{B})$ を a，b，c，d で表せ。

ヒント　$n(A)=n(A\cap B)+n(A\cap\overline{B})$ となる。

2　確率の基本性質(1)

★学習の要点★

❶ 確率の定義

全事象 U に属する根元事象の個数を $n(U)$，事象 A に属する根元事象の個数を $n(A)$ とする。各根元事象が同様に確からしいとき，事象 A の起こる確率 $P(A)$ を次のように定める。

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(U)}\quad\left(=\frac{\text{事象}A\text{の起こる場合の数}}{\text{起こりうるすべての場合の数}}\right)$$

● 基本問題 ●●

8 ［**確率の定義**］　次の確率を求めよ。

(1)　1 つのサイコロを投げるとき，6 の約数の目が出る確率

(2)　2 枚の硬貨を同時に投げるとき，少なくとも 1 枚表が出る確率

(3)　3 個の文字 a，b，c から 2 個の文字を選ぶとき，b と c が選ばれる確率

(4)　赤玉 4 個，白玉 2 個が入った袋から同時に 2 個取り出すとき，2 個とも赤玉である確率

(5)　ジョーカーを除く 52 枚のトランプのカードから 2 枚同時にぬくとき，2 枚とも絵札である確率

(6)　10 本中 3 本の当たりくじがある。同時に 2 本引くとき，2 本とも当たりくじである確率

9 ［**確率①**］　次の確率を求めよ。

(1)　2 つのサイコロを同時に投げて，出る目の和が 6 になる確率

(2)　3 枚の硬貨を同時に投げるとき，少なくとも 2 枚表が出る確率

(3)　a，b，c，d，e，f の 6 人の中から，くじ引きで 3 人の代表を選ぶとき，その中に f が入っている確率

(4)　10 本のうち 3 本当たりくじがあり，同時に 3 本引いて全部はずれる確率

10 ［**確率②**］　次の確率を求めよ。

(1)　2 つのサイコロを同時に投げるとき，一方のサイコロの目が他方のサイコロの目の 2 倍になる確率

(2)　10 種類の異なるお菓子から 5 つ選ぶとき，特定の 2 種類がともに選ばれる確率

例題 ② 組合せの確率

白球 5 個と赤球 7 個が入った袋から，同時に 3 個の球を取り出すとき，白球が 1 個，赤球が 2 個出る確率を求めよ。

着眼点 1 個は白球，2 個は赤球である場合の数は，${}_5C_1 \times {}_7C_2$ 通りある。

解 3 個の球を取り出す仕方は，12 個から 3 個取る組合せで，どの組合せも同様に確からしい。
12 個から 3 個取り出すすべての場合の数は，${}_{12}C_3$ 通り
また，1 個の白球，2 個の赤球が出る場合の数は，${}_5C_1 \times {}_7C_2$ (通り)だから
求める確率は，$\dfrac{{}_5C_1 \times {}_7C_2}{{}_{12}C_3} = \dfrac{21}{44}$ ……答

11 **類題** 白球 6 個，赤球 4 個が入った袋から同時に 2 個取り出したとき，白球 1 個，赤球 1 個である確率を求めよ。

▶ 標準問題 ◀◀

12 1 から 9 までの番号札 9 枚から同時に 2 枚取り出したとき，数の和が奇数になる確率を求めよ。

13 25 本中に 6 本の当たりくじがある。このくじを同時に 3 本引くとき，当たりくじがちょうど 2 本入っている確率を求めよ。

14 A，B，C，D，E の 5 文字を 1 列に並べるとき，次の確率を求めよ。
(1) 両端が子音になる確率　　(2) A と B が隣り合う確率

15 YAKUGAKU という 8 文字を 1 列に並べるとき，両端に同じ文字がくる確率を求めよ。

◆ 発展問題 ◆◆

16 同じ大きさの赤球が 5 個，白球が 4 個，青球が 3 個入っている袋がある。この中から同時に 4 個取り出すとき，3 色がすべてそろって取り出される確率はいくらか。

ヒント 4 個のうち 3 個は色が決まっているので，残りの 1 個は 3 色のどれかである。

第 3 章　図形の性質

1　三角形の辺と角

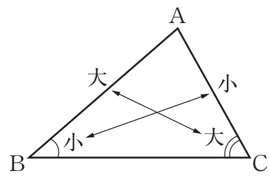
★学習の要点★

❶　三角形の辺と角の大小関係

1つの三角形において

①　大きい辺に対する角は，小さい辺に対する角より大きい。

②　大きい角に対する辺は，小さい角に対する辺より大きい。



❷　三角形の 3 辺の大小関係

(1)　1つの三角形において

①　2 辺の長さの和は，他の 1 辺の長さより大きい。

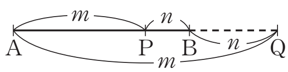
②　2 辺の長さの差は，他の 1 辺の長さより小さい。

(2)　正の数 a，b，c を 3 辺とする三角形が存在するための条件は，$|b-c|<a<b+c$

❸　線分の内分点，外分点

(1)　右の図で，点 P は線分 AB を $m:n$ に内分する内分点

(2)　右の図で，点 Q は線分 AB を $m:n$ $(m>n)$ に外分する外分点



● 基本問題 ●●

1　[**三角形の辺と角の大小関係①**]　次の △ABC について，3 つの角の大小関係を調べよ。

(1)　AB=5，BC=6，CA=3　　(2)　∠B=100°，AB=7，BC=5

2　[**三角形の辺と角の大小関係②**]　次の △ABC について，3 辺の大小関係を調べよ。

(1)　∠A=40°，∠B=60°　　(2)　∠A>90°，∠A=2∠C

3　[**三角形の 3 辺の大小関係**]　次の長さの線分を 3 辺とする三角形は存在するかどうか調べよ。

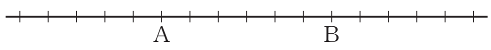
(1)　3，4，6　　(2)　5，3，9　　(3)　4，4，8

4　[**線分の内分点，外分点**]　右の図の線分 AB において，次の点を図示せよ。

(1)　線分 AB を 1：2 に内分する点 P

(2)　線分 AB を 3：1 に外分する点 Q

(3)　線分 AB を 2：5 に外分する点 R



例題 1　三角形の辺の大小関係

△ABC で，∠A の外角の二等分線上に任意に点 P をとるとき，PB＋PC＞AB＋AC となることを証明せよ。

着眼点　AC＝AC′ となる点 C′ を辺 BA の延長上にとると，PC＝PC′ となる。

証明　BA の延長上に AC＝AC′ となる点 C′ をとる。

△APC と △APC′ において　CA＝C′A

AP は共通

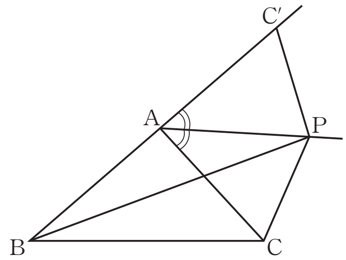
∠CAP＝∠C′AP

よって，△APC≡△APC′

したがって　PC＝PC′，AC＝AC′　…①

△BPC′ において　PB＋PC′＞BC′＝AB＋AC′　…②

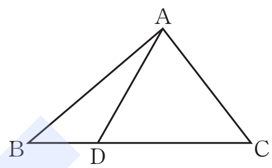
①，②より　PB＋PC＞AB＋AC　［証明終り］



5 **類題**　△ABC の内部に任意に点 P をとるとき，AB＋AC＞PB＋PC となることを証明せよ。

▶ 標準問題 ◀◀

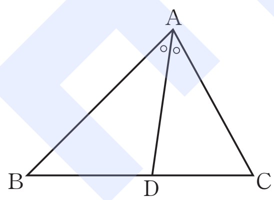
6　AB＞AC である △ABC の辺 BC 上に，頂点 B，C と異なる点 D をとるとき，AD＜AB であることを証明せよ。



7　3 辺の長さが次のような △ABC において，三角形が存在するような x の値の範囲を求めよ。

(1)　AB＝3，BC＝5，CA＝x　　(2)　AB＝6，BC＝x，CA＝6

8　右の図のような △ABC で，∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とするとき，∠ADB－∠ADC を ∠A，∠B，∠C を用いて表せ。



◆ 発展問題 ◆◆

9　AB＞AC である △ABC の辺 BC の中点を M とするとき，不等式 AB－AC＜2AM＜AB＋AC が成り立つことを証明せよ。

ヒント　AB，AC を 2 辺とする平行四辺形 ABA′C をかいて考える。

2　三角形の辺の比

★学習の要点★

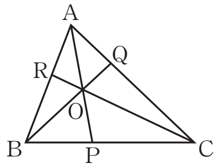
❶　三角形の頂角の二等分線，外角の二等分線

(1)　△ABC の ∠A の二等分線と辺 BC との交点は，辺 BC を AB：AC の比に内分する。

(2)　△ABC の ∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点は，辺 BC を AB：AC の比に外分する。(ただし，AB≠AC)

❷　チェバの定理

(1)　△ABC の頂点 A，B，C と，この三角形の辺上やその延長上にない点 O とを結ぶ直線が，対辺やその延長と，それぞれ P，Q，R で交わるとき，$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$　……①

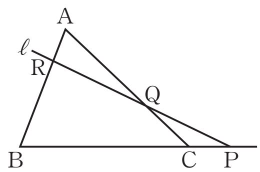


(2)　3 点 P，Q，R をそれぞれ △ABC の 3 辺 BC，CA，AB 上にとるとき，上の等式①が成り立つならば，3 直線 AP，BQ，CR は 1 点で交わる。(チェバの定理の逆)

❸　メネラウスの定理

(1)　△ABC の辺 BC，CA，AB またはその延長が，頂点を通らない直線 ℓ とそれぞれ P，Q，R で交わるとき，

$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$　……②



(2)　3 点 P，Q，R をそれぞれ △ABC の辺 BC，CA，AB の延長上または，P，Q，R のうち 2 つを辺上に，1 つを辺の延長上にとるとき，上の等式②が成り立つならば，3 点 P，Q，R は一直線上にある。(メネラウスの定理の逆)

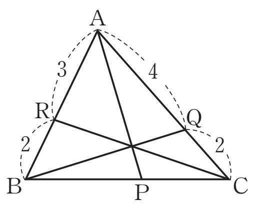
● 基本問題 ●●

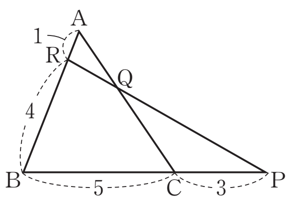
10　[**三角形の角の二等分線**]　AB=8，BC=7，CA=6 である △ABC において，∠A および ∠A の外角の二等分線が直線 BC と交わる点を，それぞれ D，E とする。次の線分の長さを求めよ。

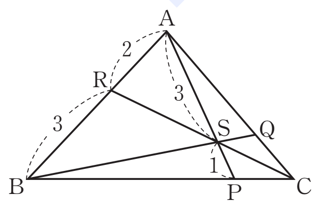
(1)　CE　　　(2)　DE

11　[**チェバの定理，メネラウスの定理**]　次の △ABC において，与えられた線分の比を求めよ。

(1)　BP：PC　　　(2)　AQ：QC　　　(3)　AQ：QC







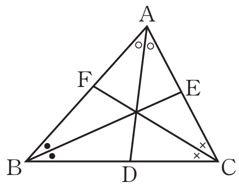
例題 ② チェバの定理の逆

三角形の3つの角の二等分線は1点で交わることを証明せよ。

着眼点 3つの直線が1点で交わることを示すには，チェバの定理の逆が利用できる。

証明 ∠A，∠B，∠C の二等分線と辺 BC，CA，AB との交点をそれぞれ D，E，F とする。

△ABC において，$\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AF}{FB}=1$ が成り立つことを示す。



角の二等分線の性質より，$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$，$\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{BC}{BA}$，$\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{CA}{CB}$

よって，$\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{AB}{AC}\cdot\dfrac{BC}{BA}\cdot\dfrac{CA}{CB}=1$

したがって，チェバの定理の逆より，3直線 AD，BE，CF は1点で交わる。

すなわち，三角形の3つの角の二等分線は1点で交わる。　［証明終り］

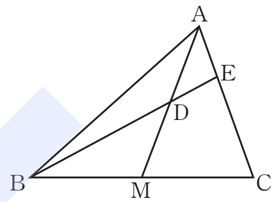
12 **類題** △ABC の ∠A の外角の二等分線が辺 BC の延長と交わる点を P とし，∠B，∠C の二等分線が対辺と交わる点をそれぞれ Q，R とする。このとき，3点 P，Q，R は一直線上にあることを，メネラウスの定理の逆を用いて証明せよ。

▶ 標準問題 ◀◀

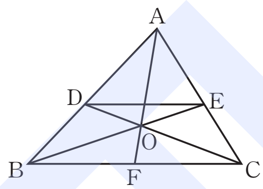
13 △ABC の中線 AM の中点を D とし，BD の延長と辺 AC との交点を E とするとき，次の比を求めよ。

(1)　AE：CE　　(2)　BD：DE

(3)　△ADE：△BDM



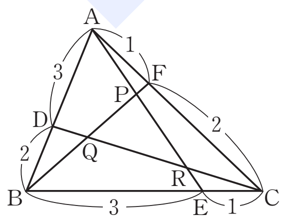
14 △ABC の辺 BC に平行な直線が辺 AB，AC と交わる点を，それぞれ D，E とし，BE と CD の交点を O とする。A と O とを結び，その延長と BC との交点を F とするとき，BF＝FC であることを証明せよ。



◆ 発展問題 ◆◆

15 右の図で，D，E，F はそれぞれ，△ABC の辺 AB を 3：2 に，辺 BC を 3：1 に，辺 AC を 1：2 に内分する点である。このとき，△ABC と，図の △PQR の面積の比を求めよ。

ヒント △AEC で，$\dfrac{AP}{PE}\cdot\dfrac{EB}{BC}\cdot\dfrac{CF}{FA}=1$ が成り立つ。



第 4 章　数学と人間の活動

1　約数と倍数

★学習の要点★

❶ **約数と倍数**

2つの整数 a, b について，ある整数 k を用いて，$a=bk$ と表されるとき，b は a の**約数**であるといい，a は b の**倍数**であるという。

❷ **倍数の判定法**

(1)　2の倍数　一の位が 0，2，4，6，8 のいずれかである。
(2)　5の倍数　一の位が 0，5 のいずれかである。
(3)　4の倍数　下2桁が4の倍数である。
(4)　3の倍数　各位の数の和が3の倍数である。
(5)　9の倍数　各位の数の和が9の倍数である。

❸ **素因数分解**

(1)　2以上の自然数で，1とそれ自身以外に正の約数をもたない数を**素数**という。2以上の自然数で，素数でない数を**合成数**という。
(2)　整数がいくつかの整数の積で表されるとき，積を作る1つ1つの整数を，もとの整数の**因数**という。素数である因数を**素因数**といい，自然数を素数だけの積の形に表すことを**素因数分解**するという。

❹ **約数の個数**

自然数 N を素因数分解した結果が $N=p^aq^br^c\cdot\cdots\cdots$ であるとき，
N の正の約数の個数は，$(a+1)(b+1)(c+1)\cdot\cdots\cdots$ で表される。

● 基本問題 ●●

1　［**倍数の判定法**］　一の位がわからない次の4桁の自然数が，5の倍数であり，3の倍数でもあるとき，一の位の数を求めよ。

(1)　111□　　(2)　502□　　(3)　678□

2　［**素因数分解**］　次の数が自然数になるような最小の自然数 n を求めよ。

(1)　$\sqrt{90n}$　　(2)　$\sqrt{\dfrac{96}{n}}$　　(3)　$\sqrt{\dfrac{720}{n}}$

3　［**約数の個数**］　次の数の約数の個数を求めよ。

(1)　729　　(2)　150　　(3)　1008

例題 1　約数の個数

6 個の約数をもつ自然数 n のうち，最小のものを求めよ。

着眼点　$6=1\cdot(5+1)$，$6=(1+1)(2+1)$，$6=(2+1)(1+1)$ より，n は，$n=p^5$，$n=pq^2$，$n=p^2q$ のいずれかの形に素因数分解できる数である。

解　$6=1\cdot6=2\cdot3=3\cdot2$ より，6 個の約数をもつ自然数 n は，次のいずれかの形に素因数分解できる。

$n=p^5$　……①　　$n=pq^2$　……②　　$n=p^2q$　……③

このような n で最小のものを求めるので，①，②，③でそれぞれ $p=2$，$q=3$ とした場合を考えると，

$n=2^5$　……①′　　$n=2\cdot3^2$　……②′　　$n=2^2\cdot3$　……③′

①′，②′，③′ のうち，最小のものを求める。

$2^5=32$，$2\cdot3^2=18$，$2^2\cdot3=12$ より，求める自然数は 12　……答

4　類題　8 個の約数をもつ自然数 n のうち，小さい方から 2 番目のものを求めよ。

▶ 標準問題 ◀◀

5　$abcabc$ という形の 6 桁の整数は，7，11，13 のどれでも割り切れることを証明せよ。

6　a，b を素数とする。ab の正の約数の和を 12 とするとき，ab の値を求めよ。

7　5 の倍数である 3 桁の自然数 N について，N の一の位の数と十の位の数と百の位の数の和は 20 で，一の位の数と百の位の数の和は 3 の倍数であるという。このとき，N を求めよ。

8　2 桁の整数のうち，約数がちょうど 10 個あるものをすべて求めよ。

◆ 発展問題 ◆◆

9　$\dfrac{n!}{4900}$ が整数となる自然数 n のうち，最小のものを求めよ。

ヒント　まず，4900 を素因数分解して，n の満たす条件を考える。$n!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n$ である。

2　最大公約数，最小公倍数

★学習の要点★

❶　最大公約数と最小公倍数

(1)　2つ以上の整数に共通な約数を，それらの整数の**公約数**といい，公約数のうち最大のものを**最大公約数**という。

(2)　2つ以上の整数に共通な倍数を，それらの整数の**公倍数**といい，公倍数のうち正で最小のものを**最小公倍数**という。

(3)　公約数は最大公約数の約数，公倍数は最小公倍数の倍数である。

❷　互いに素

(1)　2つの整数 a，b の最大公約数が1であるとき，a，b は**互いに素**であるという。

(2)　a，b，c は整数，a，b は互いに素であるとする。次のことが成り立つ。

[1]　ac が b の倍数であるとき，c は b の倍数である。

[2]　a の倍数であり，b の倍数でもある整数は，ab の倍数である。

❸　最大公約数，最小公倍数の性質

2つの自然数 a，b の最大公約数を g，最小公倍数を l とする。

$a=ga'$，$b=gb'$ とすると，次のことが成り立つ。

[1]　a'，b' は互いに素である。

[2]　$l=ga'b'$　　　[3]　$ab=gl$

●基本問題●●

10　[**最大公約数，最小公倍数**]　次の数の組の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(1)　60，450　　　(2)　315，735

11　[**互いに素①**]　a は自然数とする。$a+1$ は3の倍数であり，$a+6$ は4の倍数であるとき，$a+10$ は12の倍数であることを証明せよ。

12　[**互いに素②**]　72以下の自然数で，72と互いに素である自然数の個数を求めよ。

13　[**最小公倍数から整数の決定**]　n は整数とする。n と12の最小公倍数が120であるような n をすべて求めよ。

例題 ② 最大公約数，最小公倍数の性質

最大公約数が 23，最小公倍数が 414 である 2 つの自然数 a，b の組をすべて求めよ。ただし，$a<b$ とする。

着眼点　$a=23a'$，$b=23b'$ とおいて，最大公約数と最小公倍数の性質を用いる。

解　最大公約数が 23 であるから，a，b は $a=23a'$，$b=23b'$ と表される。
ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。
このとき，a，b の最小公倍数は $23a'b'$ と表されるから，
$23a'b'=414$　すなわち，$a'b'=18$
$a'b'=18$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は
$(a',\ b')=(1,\ 18),\ (2,\ 9)$
よって，$(a,\ b)=(23,\ 414),\ (46,\ 207)$　……答

14 類題　最大公約数が 30，最小公倍数が 360 である 2 つの自然数 a，b の組をすべて求めよ。ただし，$a<b$ とする。

▶ 標準問題 ◀◀

15　次の 3 つの数の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(1)　18，30，45　　(2)　168，144，756

16　135 以下の自然数で，135 と互いに素であるものの個数を求めよ。

17　積が 864 で，最小公倍数が 144 である 2 つの自然数 a，b の組をすべて求めよ。ただし，$a<b$ とする。

◆ 発展問題 ◆◆

18　最大公約数が 12，最小公倍数が 216 である 3 つの自然数 a，b，c の組は，全部で何組あるか。ただし，$a<b<c$ とする。

ヒント　$a=12a'$，$b=12b'$，$c=12c'$ とおいて，例題②と同じように解く。

高校ゼミ
Essence

数学A

解答編

第 1 章　場合の数

【p. 4】　❶ 集合の要素の個数

1 (1)　$A=\{-1,\ 1\}$ より，$\boldsymbol{n(A)=2}$

(2)　$x^2+4=0$ の解はないから，$A=\phi$，$\boldsymbol{n(A)=0}$

(3)　$A=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1\}$ より，$\boldsymbol{n(A)=4}$

(4)　$A=\{1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 14,\ 28\}$ より，$\boldsymbol{n(A)=6}$

2 (1)　$A=\{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ 3\cdot3,\ \cdots,\ 3\cdot33\}$ より，
$\boldsymbol{n(A)=33}$

(2)　$B=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ 5\cdot3,\ \cdots,\ 5\cdot20\}$ より，
$\boldsymbol{n(B)=20}$

(3)　$A\cap B$ は 15 の倍数だから，
$A\cap B=\{15\cdot1,\ 15\cdot2,\ 15\cdot3,\ \cdots,\ 15\cdot6\}$ より，
$\boldsymbol{n(A\cap B)=6}$

(4)　$\boldsymbol{n(A\cup B)}=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=33+20-6=\boldsymbol{47}$

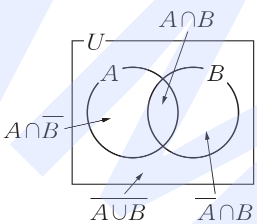
3　全体集合を U とすると，
$U=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 100\}$，$n(U)=100$

(1)　$P=\{4\cdot1,\ 4\cdot2,\ \cdots,\ 4\cdot25\}$ より，$\boldsymbol{n(P)=25}$

(2)　$\boldsymbol{n(\overline{P})}=n(U)-n(P)=100-25=\boldsymbol{75}$

4 (1)　$\boldsymbol{n(A\cup B)}=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=28+19-6=\boldsymbol{41}$

(2)　$\boldsymbol{n(\overline{A}\cap\overline{B})}$
$=n(\overline{A\cup B})$
$=n(U)-n(A\cup B)$
$=50-41=\boldsymbol{9}$



(3)　$\boldsymbol{n(\overline{A}\cap B)}$
$=n(B)-n(A\cap B)$
$=19-6=\boldsymbol{13}$

(4)　$\boldsymbol{n(A\cup\overline{B})}=n(A)+n(\overline{A\cup B})=28+9=\boldsymbol{37}$

【p. 5】

5 類題 (1)　$n(A)=66$，$n(B)=40$，$n(C)=28$

(2)　15 の倍数は，$200\div15=13$ 余り 5 より，
$\boldsymbol{n(A\cap B)=13}$
$3\times5\times7=105$ の倍数は，$200\div105=1$ 余り 95 より，$\boldsymbol{n(A\cap B\cap C)=1}$

(3)　$\boldsymbol{n(A\cup B)}=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=66+40-13=\boldsymbol{93}$

$\boldsymbol{n(A\cup B\cup C)}$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$\quad-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=66+40+28-(13+9+5)+1=\boldsymbol{108}$

6　$n(A)=50$，$n(B)=33$，$n(C)=20$，
$n(A\cap B)=16$，$n(A\cap C)=10$，$n(B\cap C)=6$，
$n(A\cap B\cap C)=3$

(1)　$\boldsymbol{n(A\cup B)}=50+33-16=\boldsymbol{67}$

(2)　$\boldsymbol{n(A\cup C)}=50+20-10=\boldsymbol{60}$

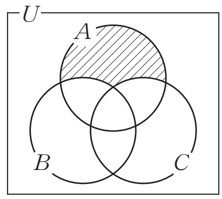
(3)　$\boldsymbol{n(\overline{A}\cup\overline{B})}=n(\overline{A\cap B})=n(U)-n(A\cap B)$
$=100-16=\boldsymbol{84}$

(4)　$\boldsymbol{n(\overline{A}\cap\overline{C})}=n(\overline{A\cup C})=n(U)-n(A\cup C)$
$=\boldsymbol{40}$

(5)　$\boldsymbol{n(A\cap B\cap C)=3}$

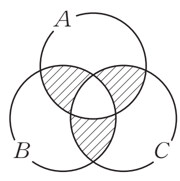
(6)　$\boldsymbol{n(A\cup B\cup C)}=50+33+20-16-6-10+3$
$=\boldsymbol{74}$

7　200 以下の正の整数の中で，3 の倍数，4 の倍数，5 の倍数の集合をそれぞれ A，B，C とすると，求めるものは，集合 $A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$（図の斜線部分）の要素の個数である。



$A=\{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ \cdots,\ 3\cdot66\}$
$A\cap B=\{12\cdot1,\ 12\cdot2,\ \cdots,\ 12\cdot16\}$
$A\cap C=\{15\cdot1,\ 15\cdot2,\ \cdots,\ 15\cdot13\}$
$A\cap B\cap C=\{60\cdot1,\ 60\cdot2,\ 60\cdot3\}$
したがって，$n(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})$
$=n(A)-n(A\cap B)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$
$=66-16-13+3=40$　　よって，**40 個**

8　製品 A，B，C を持っている人の集合を，それぞれ A，B，C とすると，$n(A)=100$，$n(B)=120$，$n(C)=130$，$n(A\cap B\cap C)=10$
また，$n(A\cup B\cup C)=300-60=240$
$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$ より，
$240=100+120+130$
$\quad-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+10$
よって，$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)=120$
求める人数は，図の斜線部分の集合の要素の個数だから，



$120-3\cdot n(A\cap B\cap C)$
$=120-3\times10=90$
すなわち　**90 人**

【p. 6】　❷ 場合の数

9 (1)　(1，4)，(4，1)，(2，3)，(3，2) の **4 通り**

(2)　目の和が 8 の場合の数は，(2，6)，(6，2)，(3，5)，(5，3)，(4，4) の 5 通り。
よって，求める場合の数は，和の法則より，
$4+5=$**9（通り）**

(3)　(3，6)，(6，3)，(4，5)，(5，4)，(4，6)，(6，4)，(5，5)，(5，6)，(6，5)，(6，6) の **10 通り**

(4)　目の積が奇数になるのは，(1，1)，(1，3)，(1，5)，(3，1)，(3，3)，(3，5)，(5，1)，(5，3)，(5，5) の 9 通り。また，すべての場合は，6×6 $=36$ 通り。求める場合の数は，$36-9=$**27（通り）**

10　5 の倍数となるのは，(1，5)，(2，5)，(3，5)，(4，5)，(6，5)，(7，5) の 6 通り。また，6 の倍数となるのは，(1，2)，(2，4)，(3，6)，(4，2)，(5，4)，(7，2) の 6 通り。和の法則より，

$6+6=\mathbf{12}$ **(通り)**

11 積の法則より，$4\times3=\mathbf{12}$ **(通り)**

12 (1) 3回とも5か6の目となる場合だから，積の法則より，$2\times2\times2=\mathbf{8}$ **(通り)**

(2) 出た目の積が奇数となるのは，奇×奇×奇の場合だけだから，積の法則より，
$3\times3\times3=\mathbf{27}$ **(通り)**

13 (1) 積の法則より，$4\times2=\mathbf{8}$ **(個)**

(2) 積の法則より，$2\times2\times3=\mathbf{12}$ **(個)**

【p. 7】

14 類題 (1) $180=2^2\times3^2\times5$ より，
$3\times3\times2=\mathbf{18}$ **(個)**
和は，$(1+2+2^2)\times(1+3+3^2)\times(1+5)=\mathbf{546}$

(2) $800=2^5\times5^2$ より，$6\times3=\mathbf{18}$ **(個)** 和は，
$(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)\times(1+5+5^2)=\mathbf{1953}$

15 (1) (大)…6 のとき，$1+2+3+4+5=15$
(大)…5 のとき，$1+2+3+4=10$
(大)…4 のとき，$1+2+3=6$
(大)…3 のとき，$1+2=3$
(大)…2 のとき，1
よって，$15+10+6+3+1=\mathbf{35}$ **(通り)**

(2) すべて奇数だから，$3\times3\times3=\mathbf{27}$ **(通り)**

(3) (2)の補集合だから，$6\times6\times6-27=\mathbf{189}$ **(通り)**

(4) (大)が6，4，2のとき，(中，小)は2つとも奇数だから，$(3\times3)\times3=27$
(大)が5，3，1のとき，
ⅰ) (中，小)が2つとも奇数…
$(3\times3)\times3=27$
ⅱ) (中，小)が1つ偶数，1つ奇数…
$(3\times6)\times3=54$
以上より，$27+27+54=\mathbf{108}$ **(通り)**

16 ・かき2個のとき，…5通り

りんご	4	3	2	1	0
みかん	0	1	2	3	4

・かき1個のとき，…5通り

りんご	4	3	2	1	0
みかん	1	2	3	4	5

・かき0個のとき，…5通り

りんご	4	3	2	1	0
みかん	2	3	4	5	6

以上より，$5\times3=\mathbf{15}$ **(通り)**

17 百の位は，1，2，3，4の4通り，十の位も4通り，一の位は3通り。
積の法則より，$4\times4\times3=\mathbf{48}$ **(通り)**
奇数は，一の位が1か3より2通り，百の位に3通り，十の位に3通りより，$3\times3\times2=\mathbf{18}$ **(通り)**

18 3の倍数を含まない個数は，百の位で1，2，4，5，7，8の6通り，十，一の位は各々7通りあるので，$6\times7\times7=294$
よって，求める個数は，$900-294=\mathbf{606}$ **(通り)**

19 x は1か2
ⅰ) $x=1$ のとき，$2y+z=7$ $y=1,\ 2,\ 3$ だから
$(y,\ z)=(1,\ 5),\ (2,\ 3),\ (3,\ 1)$
ⅱ) $x=2$ のとき，$2y+z=4$ $y=1$
$(y,\ z)=(1,\ 2)$
以上より，$3+1=\mathbf{4}$ **(通り)**

20 3辺を a，b，c として，$c\leqq b\leqq a$ のとき，
三角形が存在する条件は，$b+c>a$ より，
$(3,\ 5,\ 7),\ (3,\ 7,\ 8),\ (3,\ 8,\ 10),\ (5,\ 7,\ 8),$
$(5,\ 7,\ 10),\ (5,\ 8,\ 10),\ (7,\ 8,\ 10)$ の **7個**

【p. 8】 **3 順列(1)**

21 (1) ${}_5P_3=5\cdot4\cdot3=\mathbf{60}$ (2) 20160
(3) $(3\cdot2\cdot1)\times(4\cdot3)=\mathbf{72}$

22 (1) 5個の数字から3個取る順列だから，
${}_5P_3=5\cdot4\cdot3=\mathbf{60}$ **(個)**

(2) 7名から4名を選ぶ順列だから，
${}_7P_4=\mathbf{840}$ **(通り)**

(3) 5枚から4枚取って並べる順列だから，
${}_5P_4=\mathbf{120}$ **(通り)**

(4) 40人から3人を選び，3人を各々委員長，副委員長，書記に選ぶので，${}_{40}P_3=\mathbf{59280}$ **(通り)**

23 (1) 5個の数字の順列は，${}_5P_5$ 通り
0が万の位のときの順列は ${}_4P_4$ だから，この場合を除けばよい。${}_5P_5-{}_4P_4=120-24=\mathbf{96}$ **(個)**

(2) 女子3人を1人とみなして，5人の順列を考え，その各々に対して女子3人の順列を求める。
積の法則より，${}_5P_5\times{}_3P_3=120\times6=\mathbf{720}$ **(通り)**

(3) 特定の2冊を1冊分と考え，6冊の順列を求める。特定の2冊の順列も考えて，積の法則より，${}_6P_6\times{}_2P_2=\mathbf{1440}$ **(通り)**

【p. 9】

24 類題 (1) 5つから5つ取る順列より，
${}_5P_5=\mathbf{120}$ **(通り)**

(2) a と e を1つと考えて，${}_4P_4=24$
a と e との順列も考えて，$24\times2=\mathbf{48}$ **(通り)**

(3) (2)の補集合を求めればよいので，
$120-48=\mathbf{72}$ **(通り)**

(4) a と e の両端の並べ方は2通り，その各々に対して b，c，d 3個の順列を考えて，
$2\times{}_3P_3=2\times6=\mathbf{12}$ **(通り)**

25 百の位が1のとき，残り5個から2個取る順列だから，${}_5P_2=20$。
百の位が2のときも同様に，${}_5P_2=20$。
合わせて $20+20=40$。
よって，41番目は百の位が3のときの最初の数だから，**301**

26 (1) 3個の母音を両端におく順列は ${}_3P_2$
両端が母音である順列は，${}_3P_2\times6!$

$_8C_3=$**56 (個)**

(2)　8 つから 4 つ取る組合せより，$_8C_4=$**70 (個)**

(3)　2 つの頂点が A の頂点である三角形は，(2)で求めた四角形 1 つについて，その対角線により 4 つずつ決まるので，その個数は，

$_8C_4\times4=280$ (個)

これに，(1)で求めた 3 つの頂点が A の頂点である三角形の個数を合わせて，$280+56=$**336 (個)**

58　a_1，a_4，a_7，a_{10} は 1〜10 までのうち 4 つ取り出し，小さい順に，a_1，a_4，a_7，a_{10}となる。この求め方は $_{10}C_4$ 通り。その各々について，残り 6 個から 3 個取り出し，大きい順に，a_2，a_5，a_8とする方法は $_6C_3$ 通り。最後に残った 3 つの数を小さい順にa_3，a_6，a_9となる方法は 1 通り。以上より，$_{10}C_4\times{}_6C_3\times{}_3C_3=$**4200 (通り)**

59　8 人を 4 人ずつ 2 組に分ける方法は，

$\dfrac{_8C_4}{2!}$ 通り。各ブロックでの組合せは 3 通りずつあるので，求める場合の数は

$\dfrac{_8C_4}{2!}\times3\times3=35\times9=$**315 (通り)**

【p. 18】　**章末問題**

1　サッカー，野球を好きな生徒の集合をそれぞれ A，B とすると，$n(A)=36$，$n(B)=28$

(1)　$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=9$ だから，

$n(A\cup B)=50-9=41$

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=36+28-41=23$　　よって，**23 人**

(2)　$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)=36-23=13$

よって，**13 人**

2　(1)　1 から 250 までの整数のうち，6 の倍数の集合を A，8 の倍数の集合を B とすると，

$A=\{6\cdot1,\ 6\cdot2,\ \cdots,\ 6\cdot41\}$

$B=\{8\cdot1,\ 8\cdot2,\ \cdots,\ 8\cdot31\}$

$A\cap B=\{24\cdot1,\ 24\cdot2,\ \cdots,\ 24\cdot10\}$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=41+31-10=62$　　よって，**62 個**

(2)　1 から 1000 までの整数のうち，12 の倍数の集合を A，5 の倍数の集合を B とすると，

$A=\{12\cdot1,\ 12\cdot2,\ \cdots,\ 12\cdot83\}$

$B=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ \cdots,\ 5\cdot200\}$

$A\cap B=\{60\cdot1,\ 60\cdot2,\ \cdots,\ 60\cdot16\}$　よって，

$n(\overline{A})=1000-n(A)=1000-83=$**917 (個)**

$n(\overline{A}\cap B)=n(B)-n(A\cap B)=200-16$

$=$**184 (個)**

3　(ア)　6^n　(イ)　1 の目以外は 5 つあるので，$\boldsymbol{5^n}$

(ウ)　1，2 を除く目は 4 つあるので，$\boldsymbol{4^n}$

(エ)　2 の目以外も 5 つあるので，$\boldsymbol{5^n}$

(ウ)を引けばよいので，$\boldsymbol{2\cdot5^n-4^n}$

4　(1)　(ア)　2 けたの整数の個数は，9 個から 2 個取る順列だから，$_9P_2=$**72 (個)**

(イ)　この 72 個のうち，一の位の数字は 1〜9 が均等にあるので，それぞれの数は，$72\div9=8$ (個)
(あるいは，一の位の数をきめると十の位に表される数字は，それ以外の 8 種類だから 8 個と考えてよい。)

$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$

よって，一の位の総和は，$45\times8=360$

同様に，十の位の総和も，$45\times8\times10=3600$

ゆえに，求める総和は，$360+3600=$**3960**

(2)　(ア)　1，1，2，2 の 4 個の順列だから，

$\dfrac{4!}{2!2!}=$**6 (個)**

(イ)　1 が十万の位にくるとき

残りの 0，0，1，2，2 の 5 個の順列を考えて，

$\dfrac{5!}{2!1!2!}=30$ (個)

2 が十万の位にくるときも同じだから，

$30+30=$**60 (個)**

5　すべての場合は 5! 通り

・万に 1 がくる場合は，4! 通り

・千に 2 がくる場合も，4! 通り

・万に 1，千に 2 がくる場合は，3! 通り

ゆえに，求める場合の数は，

$5!-(4!+4!-3!)=$**78 (通り)**

6　(1)　異なる 3 つ (A，B，C) の中から重複を許して 6 つ取る重複順列になるから，

$3^6=$**729 (通り)**

(2)　C だけがもらえない場合の分け方は，

$2^6-\underline{2}$ (通り)

↑A 1 人，B 1 人がもらう場合の 2 通りを除く。

A だけ，B だけがもらえない場合も同じなので，1 人だけもらえない場合の分け方は，

$3(2^6-2)=186$ (通り)

2 人がもらえない場合の分け方は，3 通り。

よって，(1)より，$729-186-3=$**540 (通り)**

7　(1)　1 マスのときの正方形の数は，$8\times8=64$

2 マスのときの正方形の数は，$7\times7=49$

以下，同様に考えて，求める数は，

$8^2+7^2+6^2+5^2+4^2+3^2+2^2+1^2=$**204 (個)**

(2)　縦は，9 点から 2 点取る組合せより，

$_9C_2$ 通り

横も，9 点から 2 点取る組合せより，

$_9C_2$ 通り

ゆえに，$_9C_2\times{}_9C_2=$**1296 (通り)**

【p. 19】

8　A，B の条件から，$n(A)=30\div3=10$

$n(B)=30\div5=6$，$n(A\cap B)=30\div15=2$

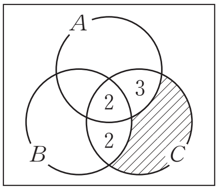
$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$

$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

より，求める個数は，

$10+6+8-2-4-5+2=$ **15（個）**

また，条件④をもとにして②，③から，部分集合の要素の個数は右の図のように表される。



集合 $C\cap(\overline{A\cup B})$ は斜線部分だから，その要素の個数は①より，$8-(3+2+2)=1$　**1 個**

9　枚数の組合せは，{3，1，1}，{2，2，1} の 2 通り。

・{3，1，1} のとき，はがきの選び方は

$_3C_1=3$（通り）　その各々に対して，出し方は，

$_5C_3\times2=20$（通り）

よって，$3\times20=60$（通り）

・{2，2，1} のとき，はがきの選び方は，

$_3C_1=3$（通り）

その各々に対して，出し方は，

$_5C_2\times{}_3C_2=30$（通り）

よって，$3\times30=90$（通り）

以上より，すべてのはがきの出し方は，

$60+90=$ **150（通り）**

10　(1)　A に男子だけ入る方法は，

$_5C_3=10$（通り）

B に男 1 人，女 2 人のとき，

$_2C_1\times{}_4C_2=12$（通り）。

残り C も男 1 人，女 2 人で 1 通りに定まる。

この B と C は全体として同じなので，入れかえても同じ。

次に，B が男 2 人，女 1 人のとき，$_4C_1=4$（通り）。

残り C は女子のみで 1 通りに定まる。この B と C を入れかえたものは異なるので，B，C の定め方は 8 通り。以上より，求める数は，

$10\times(12+4\times2)=$ **200（通り）**

(2)　A に女子 3 人のとき，$_4C_3=4$（通り）

このとき，B に女 1 人，男 2 人ならば，

$_5C_2=10$（通り）。残りは C は男 3 人で 1 通り。

B と C を入れかえたら異なるので，B，C の定め方は 20 通りだから，このとき，

$4\times20=80$（通り）

B に女子 3 人，C に女子 3 人のときも同じで，これらは異なる場合だから，$80\times3=$ **240（通り）**

(3)　A が女 2 人，男 1 人のとき，

$_4C_2\times{}_5C_1=30$（通り）

このとき，B が女 1 人，男 2 人ならば，

$_2C_1\times{}_4C_2=12$（通り）

残り C の女 1 人，男 2 人は 1 通りに定まるが，B と C は全体としては同じなので，B と C を入れかえても同じ。

よって，$30\times12=360$（通り）

B が女 2 人，C が女 2 人のときも 360 通りずつできるので，求める方法は，

$360\times3=$ **1080（通り）**

(4)　（女 2 人，男 1 人），（女 2 人，男 1 人），（男 3 人）の 3 室に分ける。A が男 3 人のときは，$_5C_3=10$（通り）。このとき，B が女 2 人，男 1 人ならば，$_4C_2=12$（通り）

残り C は女 2 人男 1 人で 1 通り。B と C は全体としては同じなので，$10\times12=120$（通り）

B が男 3 人，C が男 3 人のときも同じだから，

$120\times3=$ **360（通り）**

11　座席に 1〜20 の番号をつける。この 20 個の座席から 18 個選び 1 列に並べる順列だから，

$_{20}P_{18}=\dfrac{20!}{2!}=$ **10・19!（通り）**

また，特定の 2 人が各々テーブル A，B に座るとき，それぞれ A，B で 10 通りずつの座り方がある。残り 18 個の座席から 16 個選んで 1 列に並べる順列を考えると，残り 16 人の座る方法のすべてが得られる。

よって，$10\cdot10\cdot{}_{18}P_{16}=$ **50・18!（通り）**

12　(1)　$\dfrac{7!}{3!2!2!}=$ **210（個）**

(2)　AB を 1 まとめにして，AB，AB，A，C，C の順列と考えて，

$\dfrac{5!}{2!1!2!}=$ **30（個）**

(3)　AB を 1 個だけ含む場合

AB，A，A，B，C，C の順列を考える。

まず，B が A の後にくると，AB が 2 個含まれることになるので，B の入る位置は，右の ∧印の 4 か所。

∧(AB)∧A A C∧C∧

また，AB，A，A，C，C の並べ方が

$\dfrac{5!}{1!2!2!}=30$（個）あるから，

$30\times4=$ **120（個）**

13　(1)　A から C へ行く方法は，$_3C_1$ 通り

C から B へ行く方法は，$_7C_3$ 通り

積の法則より，$_3C_1\times{}_7C_3=$ **105**

(2)　A から C へ行く方法は，$_3C_1$ 通り

C から D へ行く方法は，$_2C_1$ 通り

D から B へ行く方法は，$_5C_2$ 通り

積の法則より，$_3C_1\times{}_2C_1\times{}_5C_2=$ **60**

(3)　A から B へ行く方法は，全部で，

$_{10}C_5=252$（通り）

また，A から D を通って B へ行く方法は，(1) と同様に考えて，$_5C_2\times{}_5C_3=100$（通り）

よって，C も D も通らないで行く方法は，

(1)，(2)より，$252-105-100+60=$ **107**

第 2 章　確率

【p. 20】　❶ 確率の意味

1　集合の形で表す。

(1)　$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{4\}$

(2)　{表，表}，{表，裏}，{裏，表}，{裏，裏}

(3)　$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{4\}$，$\{5\}$，$\{6\}$

2　$A=\{1,\ 3,\ 5\}$，$B=\{4,\ 5,\ 6\}$ だから，
和事象 $\boldsymbol{A\cup B=\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}}$
積事象 $\boldsymbol{A\cap B=\{5\}}$

3　(1)　目の和が 11 以上である事象。
$\boldsymbol{\{5,\ 6\},\ \{6,\ 5\},\ \{6,\ 6\}}$

(2)　2 つの目がともに奇数である事象。
$\boldsymbol{\{1,\ 1\},\ \{1,\ 3\},\ \{1,\ 5\},\ \{3,\ 1\},\ \{3,\ 3\},}$
$\boldsymbol{\{3,\ 5\},\ \{5,\ 1\},\ \{5,\ 3\},\ \{5,\ 5\}}$

【p. 21】

4　類題　(1)　$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$，
$B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ より，
$A\cup B=\boldsymbol{\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}}$

(2)　$\{3,\ 5,\ 7\}$

(3)　$\{1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9\}$

(4)　$\overline{A}=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$ より，$\overline{A}\cap\overline{B}=\boldsymbol{\{4,\ 6,\ 8\}}$

5　$A=\{1,\ 3,\ 5\}$，$B=\{1,\ 2,\ 3\}$

(1)　$\{1,\ 3\}$

(2)　$\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$

(3)　$\overline{A}=\{2,\ 4,\ 6\}$，$\overline{B}=\{4,\ 5,\ 6\}$ より，
$\overline{A}\cup\overline{B}=\boldsymbol{\{2,\ 4,\ 5,\ 6\}}$

(4)　$\{5\}$

6　表を○，裏を×とする。

(1)　{(○，○)}，{(○，×)}，{(×，○)}，{(×，×)}

(2)　$A=$ {(○，○)}，$B=$ {(○，×)，(×，○)}
より，$A\cup B=$ **{(○，○)，(○，×)，(×，○)}**

(3)　{(○，×)，(×，○)，(×，×)}

(4)　$\overline{B}=$ {(○，○)，(×，×)} より，
$\overline{A}\cap\overline{B}=$ **{(×，×)}**

7　$\boldsymbol{n(A)}=n(A\cap B)+n(A\cap\overline{B})=\boldsymbol{a+b}$
$\boldsymbol{n(\overline{A})}=n(\overline{A}\cap B)+n(\overline{A}\cap\overline{B})=\boldsymbol{c+d}$
$\boldsymbol{n(B)}=n(A\cap B)+n(\overline{A}\cap B)=\boldsymbol{a+c}$
$\boldsymbol{n(\overline{B})}=n(A\cap\overline{B})+n(\overline{A}\cap\overline{B})=\boldsymbol{b+d}$

【p. 22】　❷ 確率の基本性質(1)

8　(1)　6 の約数は 1，2，3，6 の 4 つあるから，
$\dfrac{4}{6}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

(2)　2 枚とも裏は 1 通り，余事象より，
$1-\dfrac{1}{4}=\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$

(3)　すべての場合の数は，${}_3C_2=3$ より，$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

(4)　すべての取り出し方は ${}_6C_2$ 通り，赤 4 つから 2 つ取る組合せは ${}_4C_2$ 通りより，$\dfrac{{}_4C_2}{{}_6C_2}=\boldsymbol{\dfrac{2}{5}}$

(5)　52 枚から 2 枚ぬくすべての場合の数は，${}_{52}C_2$ 通り
絵札 12 枚から 2 枚ぬく場合の数は，${}_{12}C_2$ 通り。
よって，$\dfrac{{}_{12}C_2}{{}_{52}C_2}=\boldsymbol{\dfrac{11}{221}}$

(6)　10 本から 2 本引くすべての場合の数は ${}_{10}C_2$ 通り，当たりくじ 3 本から 2 本引く場合の数は ${}_3C_2$ 通りより，$\dfrac{{}_3C_2}{{}_{10}C_2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{15}}$

9　(1)　目の和が 6 になるのは，(1，5)，(5，1)，(2，4)，(4，2)，(3，3) の 5 通りだから，
求める確率は，$\dfrac{5}{6\times6}=\boldsymbol{\dfrac{5}{36}}$

(2)　少なくとも 2 枚表が出るのは，3 枚のうち 1 枚が裏の場合が 3 通り，3 枚とも表の場合が 1 通り，合わせて 4 通りあるので，
求める確率は，$\dfrac{4}{2\times2\times2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(3)　6 人から 3 人選ぶすべての場合の数は ${}_6C_3$ 通り，f を除く 5 人から 2 人を選ぶ場合の数は ${}_5C_2$ 通りより，求める確率は，$\dfrac{{}_5C_2}{{}_6C_3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(4)　3 本引くすべての場合の数は，${}_{10}C_3$ 通り。
はずれは 7 本だから，7 本から 3 本引く場合の数は ${}_7C_3$ 通り。
よって，求める確率は，$\dfrac{{}_7C_3}{{}_{10}C_3}=\boldsymbol{\dfrac{7}{24}}$

10　(1)　すべての場合の数は，$6\times6=36$ (通り)
一方が他方の 2 倍になるのは，(1，2)，(2，1)，(2，4)，(4，2)，(3，6)，(6，3) の 6 通りだから，
求める確率は，$\dfrac{6}{36}=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

(2)　すべての場合の数は，${}_{10}C_5$ 通り，特定の 2 種類を除くと 8 種類。8 種類から 3 種類選べばよいので，求める確率は，$\dfrac{{}_8C_3}{{}_{10}C_5}=\boldsymbol{\dfrac{2}{9}}$

【p. 23】

11　類題　すべての場合の数は，${}_{10}C_2$ 通り。
白球 1 個，赤球 1 個取る場合の数は，
${}_6C_1\times{}_4C_1$ (通り)
よって，求める確率は，$\dfrac{{}_6C_1\times{}_4C_1}{{}_{10}C_2}=\dfrac{24}{45}=\boldsymbol{\dfrac{8}{15}}$

12　すべての場合の数は ${}_9C_2$ 通り，2 数の和が奇数になるのは，1 枚が奇数で，1 枚が偶数のときで，奇数は 5 枚，偶数は 4 枚あるので，
${}_5C_1\times{}_4C_1$ (通り)
求める確率は，$\dfrac{{}_5C_1\times{}_4C_1}{{}_9C_2}=\dfrac{20}{36}=\boldsymbol{\dfrac{5}{9}}$

13　3 本引くすべての場合の数は ${}_{25}C_3$ 通り，3 本中 2 本当たる場合の数は，
${}_6C_2\times(25-6)={}_6C_2\times19$ (通り)

求める確率は，$\dfrac{{}_6C_2\times 19}{{}_{25}C_3}=\boldsymbol{\dfrac{57}{460}}$

14 5文字の並べ方は，5! 通り（$={}_5P_5$）

(1) 子音は，B，C，Dの3つ。2つの子音を取る順列は，${}_3P_2$ 通り。その各々について残り3つの順列があるので，${}_3P_2\times{}_3P_3$（通り）

求める確率は，$\dfrac{{}_3P_2\times{}_3P_3}{5!}=\boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$

(2) AとBを1つと考えた順列は ${}_4P_4$ 通り。
A，Bの並べ方は2通りあるので，
$2\times{}_4P_4$（通り）

求める確率は，$\dfrac{2\times{}_4P_4}{5!}=\boldsymbol{\dfrac{2}{5}}$

15 同じ文字は，A，U，Kの2つずつ。すべての場合の数は，同じものを含む順列だから，
$\dfrac{8!}{2!2!2!}=5040$

いま，Aが両端のときの順列は，$\dfrac{6!}{2!2!}=180$

U，Kについても同様だから，

求める確率は，$\dfrac{180\times 3}{5040}=\boldsymbol{\dfrac{3}{28}}$

16 4個取るすべての場合の数は
${}_{12}C_4=495$（通り）
（赤1，白1，青2）のとき，
${}_5C_1\times{}_4C_1\times{}_3C_2=60$（通り）
（赤1，白2，青1）のとき，
${}_5C_1\times{}_4C_2\times{}_3C_1=90$（通り）
（赤2，白1，青1）のとき，
${}_5C_2\times{}_4C_1\times{}_3C_1=120$（通り）
よって，3色すべてそろった4個の取り出し方は，
$60+90+120=270$（通り）

求める確率は，$\dfrac{270}{495}=\boldsymbol{\dfrac{6}{11}}$

【p. 24】 ❸ 確率の基本性質(2)

17 (1) $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

だから，$P(A\cap B)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}=\boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$

(2) 絵札の出る事象を A，ハートの出る事象を B とする。

$P(A)=\dfrac{12}{52}$，$P(B)=\dfrac{13}{52}$，$P(A\cap B)=\dfrac{3}{52}$ より，

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{12}{52}+\frac{13}{52}-\frac{3}{52}=\boldsymbol{\frac{11}{26}}$$

18 (1) 2等の当たる確率は，$\dfrac{5}{100}$，3等の当たる確率は，$\dfrac{10}{100}$ 和の法則より，

求める確率は，$\dfrac{5}{100}+\dfrac{10}{100}=\dfrac{15}{100}=\boldsymbol{\dfrac{3}{20}}$

(2) 3個取り出すすべての場合の数は，
${}_{10}C_3$ 通り

赤3個取り出す場合の数は，${}_6C_3$ 通りより，

3個の球が赤である確率は，$\dfrac{{}_6C_3}{{}_{10}C_3}=\dfrac{1}{6}$

白3個取り出す場合の数は，${}_4C_3$ 通りより，

3個の球が白である確率は，$\dfrac{{}_4C_3}{{}_{10}C_3}=\dfrac{1}{30}$

よって，求める確率は，$\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{30}=\boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$

19 (1) 少なくとも1本当たる事象の余事象は，2本ともはずれる事象である。すべての場合の数は ${}_{10}C_2$，2本ともはずれる場合の数は ${}_7C_2$ より，

求める確率は，$1-\dfrac{{}_7C_2}{{}_{10}C_2}=1-\dfrac{7}{15}=\boldsymbol{\dfrac{8}{15}}$

(2) 3人とも男子が選ばれる事象の余事象を考える。すべての場合の数は ${}_8C_3$，3人とも男子の場合の数は ${}_5C_3$ だから

求める確率は，$1-\dfrac{{}_5C_3}{{}_8C_3}=1-\dfrac{5}{28}=\boldsymbol{\dfrac{23}{28}}$

【p. 25】

20 類題 目の和が4以下の事象の余事象を考える。目の和が4になるのは，(1，3)，(3，1)，(2，2)の3通り。和が3のときは，(1，2)，(2，1)の2通り。和が2のときは(1，1)の1通り。
以上より，目の和が4以下になる場合の数は，
$3+2+1=6$（通り）
すべての場合は，$6\times 6=36$（通り）

よって，求める確率は，$1-\dfrac{6}{36}=\boldsymbol{\dfrac{5}{6}}$

21 3の倍数の枚数は，$100\div 3=33$ 余り1より，
33枚
5の倍数の枚数は，$100\div 5=20$ より，20枚
15の倍数の枚数は，$100\div 15=6$ 余り10より，6枚
よって，3または5の倍数の枚数は，

$33+20-6=47$（枚）だから，求める確率は，$\boldsymbol{\dfrac{47}{100}}$

22 4個取り出すすべての場合の数は，${}_{10}C_4$（通り）
（赤2，白1，黒1）を取り出すときの確率は，
$\dfrac{{}_3C_2\times{}_2C_1\times{}_5C_1}{{}_{10}C_4}=\dfrac{1}{7}$
（赤1，白2，黒1）を取り出すときの確率は，
$\dfrac{{}_3C_1\times{}_2C_2\times{}_5C_1}{{}_{10}C_4}=\dfrac{1}{14}$
（赤1，白1，黒2）を取り出すときの確率は，
$\dfrac{{}_3C_1\times{}_2C_1\times{}_5C_2}{{}_{10}C_4}=\dfrac{2}{7}$

以上より，求める確率は，$\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{14}+\dfrac{2}{7}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

23 1の目，3の目の出る事象をそれぞれ A，B とする。1個も1または3の目の出ない事象の余事象を考える。ド・モルガンの法則より，
$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}=\{2,\ 4,\ 5,\ 6\}$ だから，その出方は $4\times 4=16$（通り）

第 3 章　図形の性質

【p. 36】 ❶ 三角形の辺と角

1 (1)　BC>AB>CA より，**∠A>∠C>∠B**

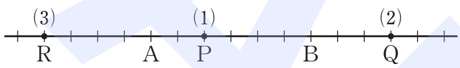
(2)　∠B>90° より，最大角は ∠B。
また，AB>BC より，**∠B>∠C>∠A**

2 (1)　∠C=180°−(40°+60°)=80° より，
∠C>∠B>∠A　よって，**AB>CA>BC**

(2)　∠A>90°，∠A=2∠C より，∠C>45°
また，∠B+∠C<90° より，∠B<45°
よって，∠A>∠C>∠B
ゆえに，**BC>AB>CA**

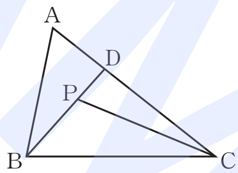
3 正の数 a，b，c のうち，a が最大であるとき，a，b，c を 3 辺とする三角形が存在する条件は，
$a<b+c$ である。
($b<a+c$，$c<a+b$ は明らかに成り立つ。)
(1)　6<3+4 より，**存在する。**
(2)　9>5+3 より，**存在しない。**
(3)　8=4+4 より，**存在しない。**

4



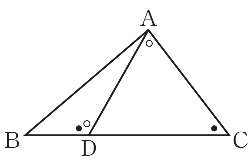
【p. 37】

5 類題 〔証明〕 P と B，P と C とを結び，BP の延長と AC との交点を D とする。



△ABD において，
AB+AD>PB+PD……①
△PCD において，
PD+DC>PC……②
①，②より，
(AB+AD)+(PD+DC)>(PB+PD)+PC
よって，AB+AD+DC>PB+PC
AB+AC>PB+PC

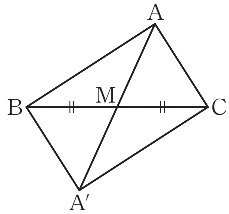
6 〔証明〕 ∠ADB
=∠C+∠DAB より，
∠ADB>∠C……①
また，AB>AC より，
∠C>∠B……②
①，②より，∠ADB>∠B
よって，AD<AB



7 (1)　$|3-5|<x<3+5$ より，$\boldsymbol{2<x<8}$
(2)　$|6-6|<x<6+6$ より，$\boldsymbol{0<x<12}$

8 $\angle ADB=\frac{1}{2}\angle A+\angle C$，$\angle ADC=\frac{1}{2}\angle A+\angle B$
より，∠ADB−∠ADC=**∠C−∠B**

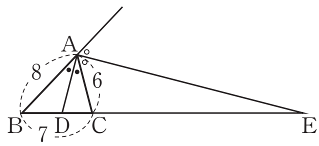
9 〔証明〕 右図のように，AB，AC を 2 辺とする平行四辺形 ABA′C をかき，AA′ を結ぶ。M は BC の中点より，この平行四辺形の対角線の交点であるから，



AA′=2AM
また，A′B=AC
△ABA′ において，AB+A′B>AA′ より，
AB+AC>2AM……①
また，AB<AA′+A′B より，
AB−A′B<AA′
AB−AC<2AM……②
①，②より，AB−AC<2AM<AB+AC

【p. 38】 ❷ 三角形の辺の比

10 (1)　BE：CE
=4：3 より，
BC：CE=1：3
よって，
CE=3BC=**21**



(2)　BD：DC=4：3 より，DC=3
よって，DE=DC+CE=3+21=**24**

11 (1)　チェバの定理より，$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$

すなわち，$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{2}=1$　$\frac{BP}{PC}=\frac{4}{3}$

よって，BP：PC=**4：3**

(2)　メネラウスの定理より，$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$

すなわち，$\frac{8}{3}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{1}{4}=1$　$\frac{CQ}{QA}=\frac{3}{2}$

よって，AQ：QC=**2：3**

(3)　△ABP と直線 RC にメネラウスの定理を用いると，$\frac{BC}{CP}\cdot\frac{PS}{SA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$

すなわち，$\frac{BC}{CP}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=1$　$\frac{BC}{CP}=\frac{9}{2}$

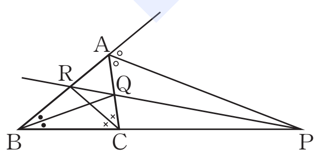
よって，BP：PC=(9−2)：2=7：2
△ABC にチェバの定理を用いると，
$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$

すなわち，$\frac{7}{2}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{2}{3}=1$　$\frac{CQ}{QA}=\frac{3}{7}$

よって，AQ：QC=**7：3**

【p. 39】

12 類題 〔証明〕
AP は ∠A の外角の二等分線だから，



$\frac{BP}{PC}=\frac{AB}{AC}$……①

BQ，CR はそれぞれ ∠B，∠C の二等分線だから，

$\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{BC}{BA}$……②

$\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{CA}{CB}$……③　①，②，③より，

$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{AB}{AC}\cdot\dfrac{BC}{BA}\cdot\dfrac{CA}{CB}=1$

よって，メネラウスの定理の逆より，3 点 P，Q，R は一直線上にある。

13 (1)　△ACM に交わる直線 BE において，

メネラウスの定理により，$\dfrac{AE}{EC}\cdot\dfrac{CB}{BM}\cdot\dfrac{MD}{DA}=1$

よって，$\dfrac{AE}{EC}\cdot\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{1}{1}=1$ より，$\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{1}{2}$

ゆえに，AE：CE=**1：2**

(2)　△BCE に交わる直線 AM において，

メネラウスの定理により，$\dfrac{BD}{DE}\cdot\dfrac{EA}{AC}\cdot\dfrac{CM}{MB}=1$

よって，$\dfrac{BD}{DE}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1}=1$ より，$\dfrac{BD}{DE}=3$

ゆえに，BD：DE=**3：1**

(3)　$\triangle ADE=\dfrac{1}{4}\triangle ABE=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{3}\triangle ABC$

$=\dfrac{1}{12}\triangle ABC$

また，$\triangle BDM=\dfrac{1}{2}\triangle ABM=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\triangle ABC$

$=\dfrac{1}{4}\triangle ABC$

よって，$\triangle ADE:\triangle BDM=\dfrac{1}{12}:\dfrac{1}{4}=$**1：3**

14 〔証明〕 △ABC において，チェバの定理より，

$\dfrac{BF}{FC}\cdot\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AD}{DB}=1$……①

DE∥BC より，$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$……②

①，②より，

$\dfrac{BF}{FC}\cdot\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{BF}{FC}=1$

よって，BF=FC

15　△PQR=△ABC−△ABP−△BCQ−△CAR
……①

△AEC に交わる直線 BF において，

$\dfrac{AP}{PE}\cdot\dfrac{EB}{BC}\cdot\dfrac{CF}{FA}=\dfrac{AP}{PE}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{1}=1$ より，

AP：PE=2：3

よって，AP：AE=2：5 より，

△ABP：△ABE=2：5

また，△ABE：△ABC=3：4 より，

△ABP：△ABC=2×3：4×5

=3：10……②

同様に，△BCD と直線 AE において，

CR：RD=5：9 より，

△ARC：△ADC=5：14

△ADC：△ABC=3：5 より，

△ARC：△ABC=5×3：5×14

=3：14……③

また，△ABF と直線 CD において，

BQ：QF=1：1 より，

△BCQ：△BCF=1：2

△BCF：△ABC=2：3 より，

△BCQ：△ABC=1：3……④

①，②，③，④より，△ABC=S とすると

$\triangle PQR=S-\dfrac{3}{10}S-\dfrac{1}{3}S-\dfrac{3}{14}S=\dfrac{16}{105}S$

よって，△ABC：△PQR=**105：16**

【p. 40】 ❸ 三角形の五心

16 (1)　O と A を結ぶ。O は外心だから，

$\alpha=\angle OAC=\angle A-\angle OAB$

$=65°-25°=$**40°**

また，△OBC で，

$\beta=180°-(\angle OBC+\angle OCB)$

$=180°-\{180°-(65°+25°+40°)\}$

=**130°**

(2)　I は内心だから，

$\angle IBC+\angle ICB=\dfrac{1}{2}(\angle B+\angle C)$

$=\dfrac{1}{2}(180°-100°)=40°$

よって，$\alpha=180°-(\angle IBC+\angle ICB)$

=**140°**

(3)　直線 BH と辺 AC，直線 CH と辺 AB との交点をそれぞれ D，E とする。H は垂心だから，

∠BDC=∠CEB=90°

よって，△CDH で，$\alpha=15°+90°=$**105°**

△BEH で，$\beta+90°=\alpha$ より，

$\beta=\alpha-90°=105°-90°=$**15°**

17 〔証明〕 A，B，C と I とを結ぶ。

△AEI と △ADI において，

EI=DI，AI は共通，∠E=∠D=90°

よって，△AEI≡△ADI

ゆえに，AE=AD

同様に，BE=BF，CF=CD

ゆえに，AB+AC−BC

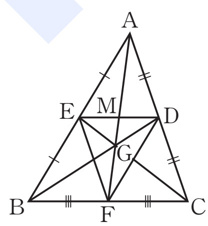
=(AE+EB)+(AD+DC)−BC

=AD+BF+AD+FC−BC

=2AD+BF+FC−BC

=2AD

18 〔証明〕 辺 AB，BC，CA の中点をそれぞれ E，F，D として，EF，FD，DE を結ぶ。AF と ED との交点を M とすると，中点連結定理により，ED∥BC



第 4 章　数学と人間の活動

【p. 54】 ❶ 約数と倍数

1　5 の倍数だから，一の位は 0 か 5
3 の倍数だから，各位の数の和が 3 の倍数
両方を満たす数を求める。
(1)　0　　(2)　5　　(3)　0

2　(1)　$90=2\cdot3^2\cdot5$ より，$\boldsymbol{n=2\cdot5=10}$
(2)　$96=2^5\cdot3$ より，$\boldsymbol{n=2\cdot3=6}$
(3)　$720=2^4\cdot3^2\cdot5$ より，$\boldsymbol{n=5}$

3　(1)　$729=3^6$ より，$6+1=$**7 (個)**
(2)　$150=2\cdot3\cdot5^2$ より，$(1+1)(1+1)(2+1)$
$=2\cdot2\cdot3=$**12 (個)**
(3)　$1008=2^4\cdot3^2\cdot7$ より，
$(4+1)(2+1)(1+1)=5\cdot3\cdot2=$**30 (個)**

【p. 55】

4　**類題**　$8=1\cdot8$，$8=2\cdot4=4\cdot2$，$8=2\cdot2\cdot2$
より，n を素因数分解すると，$n=p^7$，$n=pq^3$，
$n=p^3q$，$n=pqr$ のいずれかの形になる。
$p=2$，$q=3$，$r=5$ とすると，$n=2^7=128$，
$n=2\cdot3^3=54$，$n=2^3\cdot3=24$，$n=2\cdot3\cdot5=30$
よって，小さい方から 2 番目のものは，**30**

5　〔証明〕　$abcabc=1000abc+abc$
$=1001abc=7\cdot11\cdot13abc$
よって，$abcabc$ という形の数は，7，11，13 のどれでも割り切れる。

6　ab の約数の個数は，$(1+1)(1+1)=4$ (個) で 1，a，b，ab だから，$1+a+b+ab=12$
$(a+1)(b+1)=12$
$a\geqq b$ とすれば，$a\geqq b\geqq2$ より，
$a+1=4$，$b+1=3$
よって，$a=3$，$b=2$ より，$\boldsymbol{ab=6}$

7　$N=100a+10b+c$ (a, b, c は 1 桁の整数, $a\neq0$)
とおくと，条件より，
$a+b+c=20$……①
$a+c=3k$ (k は自然数)……②
また，N は 5 の倍数であるから，$c=0$ または 5
$c=0$ のとき，①より，$a+b=20$ となり，不適。
よって，$c=5$　このとき，
①より，$a+b=15$……③
②より，$a+5=3k$……④
④より，$a+5$ が 3 の倍数になることから，
$a=1$，4，7 のいずれかである。このうち，③を満たすものは $a=7$ であり，このとき，$b=8$
よって，求める自然数 N は，$\boldsymbol{N=785}$

8　$10=2\cdot5$ より，求める整数を素因数分解したものは，pq^4 の形である。
$3^4=81$ で $2\cdot3^4>100$ だから，$q=2$
よって，$3\cdot2^4=$**48**，$5\cdot2^4=$**80**

9　4900 を素因数分解すると，$4900=2^2\cdot5^2\cdot7^2$ であるから，
$n!=2^2\cdot5^2\cdot7^2\cdots\cdots$ (……は整数の積) とならなければいけない。
$n!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdots\cdot n$ であることから，
n は 7 以上の自然数である。また，階乗の形で表したときに，5 を 2 個以上，7 を 2 個以上含む。
$10=2\cdot5$，$14=2\cdot7$ であるから，このような n の中で最小のものは，$\boldsymbol{n=14}$

【p. 56】 ❷ 最大公約数，最小公倍数

10　(1)　$60=2^2\cdot3\cdot5$，$450=2\cdot3^2\cdot5^2$
よって，最大公約数は　$2\cdot3\cdot5=$**30**
最小公倍数は　$2^2\cdot3^2\cdot5^2=$**900**
(2)　$315=3^2\cdot5\cdot7$，$735=3\cdot5\cdot7^2$
よって，最大公約数は　$3\cdot5\cdot7=$**105**
最小公倍数は　$3^2\cdot5\cdot7^2=$**2205**

11　〔証明〕　$a+1$，$a+6$ は，自然数 m，n を用いて，$a+1=3m$，$a+6=4n$ と表される。
$a+10=(a+1)+9=3m+9=3(m+3)$……①
また，$a+10=(a+6)+4=4n+4$
$=4(n+1)$……②
よって，①より $a+10$ は 3 の倍数であり，②より $a+10$ は 4 の倍数である。3 と 4 は互いに素であるから，$a+10$ は $3\cdot4$ の倍数すなわち 12 の倍数である。

12　$72=2^3\cdot3^2$ だから，72 と互いに素である自然数は，2 の倍数でなく，3 の倍数でもない自然数である。72 以下の自然数で
2 の倍数の個数は，$72\div2=36$
3 の倍数の個数は，$72\div3=24$
6 の倍数の個数は，$72\div6=12$
よって，72 以下の自然数で，2 の倍数または 3 の倍数であるものの個数は　$36+24-12=48$
72 以下の自然数で，72 と互いに素であるものの個数は，$72-48=$**24 (個)**

13　12，120 を素因数分解すると，$12=2^2\cdot3$
$120=2^3\cdot3\cdot5$
よって，12 との最小公倍数が 120 である正の整数は，$2^3\cdot3^a\cdot5$ ($a=0$，1) と表される。
求める整数 n は，$n=2^3\cdot3^0\cdot5$，$2^3\cdot3^1\cdot5$
すなわち，$\boldsymbol{n=40}$，**120**

【p. 57】

14　**類題**　最大公約数が 30 であるから，a，b は $a=30a'$，$b=30b'$ と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。
a，b の最小公倍数より，$30a'b'=360$
すなわち，$a'b'=12$
$(a',\ b')=(1,\ 12)$，$(3,\ 4)$
よって，$\boldsymbol{(a,\ b)=(30,\ 360)}$，$\boldsymbol{(90,\ 120)}$

15　(1)　$18=2\cdot3^2$，$30=2\cdot3\cdot5$，$45=3^2\cdot5$ より
最大公約数は，**3**

最小公倍数は，$2\cdot3^2\cdot5=\mathbf{90}$

(2)　$168=2^3\cdot3\cdot7$，$144=2^4\cdot3^2$，$756=2^2\cdot3^3\cdot7$

最大公約数は，$2^2\cdot3=\mathbf{12}$

最小公倍数は，$2^4\cdot3^3\cdot7=\mathbf{3024}$

16　$135=3^3\cdot5$ だから，135 と互いに素である自然数は，3 の倍数でなく，5 の倍数でもない自然数である。135以下の自然数で

3 の倍数の個数は，$135\div3=45$

5 の倍数の個数は，$135\div5=27$

15 の倍数の個数は，$135\div15=9$

よって，135 以下の自然数で，3 の倍数または 5 の倍数であるものの個数は，$45+27-9=63$

135 以下の自然数で，135 と互いに素であるものの個数は，$135-63=\mathbf{72}$ **(個)**

17　a，b の最大公約数を m とすると

$144m=864$ より，$m=6$

$a=6a'$，$b=6b'$，$a'<b'$，a'，b' は互いに素とおくと，$a'b'=24$

$(a',\ b')=(1,\ 24)$，$(3,\ 8)$

よって，$\boldsymbol{(a,\ b)=(6,\ 144),\ (18,\ 48)}$

18　$a=12a'$，$b=12b'$，$c=12c'$，$a'<b'<c'$，a'，b'，c' の最大公約数は 1，最小公倍数は

$216\div12=18$

このような a'，b'，c' の組は

$(a',\ b',\ c')=(1,\ 2,\ 18)$，$(1,\ 3,\ 18)$，$(1,\ 6,\ 18)$，$(1,\ 9,\ 18)$，$(2,\ 3,\ 18)$，$(2,\ 9,\ 18)$，$(1,\ 2,\ 9)$，$(1,\ 6,\ 9)$，$(2,\ 3,\ 9)$，$(2,\ 6,\ 9)$ の 10 組である。

すなわち，a，b，c の組も **10 組**である。

【p. 58】 ❸ 整数の割り算と商・余り

19　(1)　$-17=5\cdot(-4)+3$ より，**商 -4，余り 3**

(2)　$-31=11\cdot(-3)+2$ より，**商 -3，余り 2**

20　a，b は整数 k，l を用いて

$a=8k+3$，$b=8l+4$ と表される。

(1)　$a+b=(8k+3)+(8l+4)$

$=8(k+l)+7$

よって，$a+b$ を 8 で割ったときの余りは **7**

(2)　$2a-b=2(8k+3)-(8l+4)$

$=8(2k-l)+2$

よって，$2a-b$ を 8 で割ったときの余りは **2**

(3)　$ab=(8k+3)(8l+4)$

$=8^2kl+8(4k+3l)+12$

$=8(8kl+4k+3l+1)+4$

よって，ab を 8 で割ったときの余りは **4**

21　〔証明〕　$n^3-n=(n-1)n(n+1)$

連続する 3 数には，2 の倍数，3 の倍数が含まれる。

したがって，n^3-n は 6 の倍数である。

22　〔証明〕　すべての整数 n は，

$n=4k$，$4k+1$，$4k+2$，$4k+3$ (k は整数) のいずれかの形で表される。

[1]　$n=4k$ のとき

$n^2=(4k)^2=16k^2$

[2]　$n=4k+1$ のとき

$n^2=(4k+1)^2=16k^2+8k+1$

$=4(4k^2+2k)+1$

[3]　$n=4k+2$ のとき

$n^2=(4k+2)^2=16k^2+16k+4$

$=4(4k^2+4k+1)$

[4]　$n=4k+3$ のとき

$n^2=(4k+3)^2=16k^2+24k+9$

$=4(4k^2+6k+2)+1$

よって，n^2 を 4 で割った余りは 0 か 1 である。

【p. 59】

23　**類題**　(1)　$n^3+5n=n^3-n+6n$

$=(n-1)n(n+1)+6n$

$(n-1)n(n+1)$ は連続する 3 数だから 6 の倍数であり，$(n-1)n(n+1)=6m$ とおくと，

$n^3+5n=6m+6n=6(m+n)$

よって，n^3+5n は 6 の倍数である。

(2)　$m^3n-mn^3=m^3n-mn+mn-mn^3$

$=(m^3-m)n-m(n^3-n)$

$=(m-1)m(m+1)n-m(n-1)n(n+1)$

$(m-1)m(m+1)$，$(n-1)n(n+1)$ は連続する 3 数で 6 の倍数だから，それぞれ $6a$，$6b$ とおくと，$m^3n-mn^3=6an-6bm$

$=6(an-bm)$

すなわち，m^3n-mn^3 は 6 の倍数である。

24　a，b は，整数 k，l を用いて

$a=5k+3$，$b=5l+2$ と表される。

(1)　$a-2b=(5k+3)-2(5l+2)$

$=5(k-2l)-1=5(k-2l-1)+4$

よって，$a-2b$ を 5 で割ったときの余りは **4**

(2)　$a^2=(5k+3)^2=25k^2+30k+9$

$=5(5k^2+6k+1)+4$

よって，a^2 を 5 で割ったときの余りは **4**

(3)　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$=\{(5k+3)+(5l+2)\}\{(5k+3)-(5l-2)\}$

$=5(k+l+1)\cdot5(k-l+1)$

よって，a^2-b^2 を 5 で割ったときの余りは **0**

25　$a+b=5m+3$，　$ab=5n+2$ (m，n は整数) と表される。

(1)　$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(5m+3)^2-2(5n+2)$

$=5(5m^2+6m-2n+1)$

よって，a^2+b^2 を 5 で割ったときの余りは **0**

(2)　$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=(5m+3)^3-3(5n+2)(5m+3)$

$=5(25m^3+45m^2-15mn+21m-9n+1)+4$

よって，a^3+b^3 を 5 で割ったときの余りは **4**

26　〔証明〕　$n^5-n=n(n^4-1)=n(n^2-1)(n^2+1)$

$=(n-1)n(n+1)\{(n^2-4)+5\}$