数学B

数学B

特　色

本書は，学習指導要領をふまえ，各単元の標準的なレベルの問題を，年間を通じてじっくり完全マスターし，あわせて，受験への基礎対策用としても使用できるように編集されています。

数学は体系が整然としている学問ですから，１つの単元を把握するためには，それを構成している基本事項を正確に理解し，さらに，その単元における典型的な問題の解法パターンを習得することが必要です。

そこで本書では，各単元において，基本事項や重要事項を習得するための基本レベルの問題を取り上げ，それらを反復練習することでまず基礎を固め，続いて，単元の内容をより深く理解する上で必須となる標準レベルの問題を精選して，その解き方をパターンとして学ぶことによって，幅広い応用力が定着するようにしました。

構　成

○数学Ｂで学習する事項を，３章22セクションに分けました。
○各セクションは見開き２ページ構成（３章を除く）で，年間計画がたてやすいよう配慮されています。

☆１セクションの構成

（セクション）

学習の要点	言葉による基本事項の説明。 公式や計算法則の例示。
基本問題	新しく学習する内容についての理解度をチェックする。 基本レベルの問題で構成。
例　　題	単元を代表する標準レベルの問題を，解き方のパターンも含めて学習する。
標準問題 発展問題	例題の関連問題を解きながら，応用範囲の広い実戦力の養成をめざす。
章末問題	章全体のまとめと，程度の高い問題で応用力を養う。

もくじ

①章　数列

1　等差数列 ………… 4
2　等比数列 ………… 6
3　等差数列と等比数列 ………… 8
4　Σと数列の和 ………… 10
5　階差数列 ………… 12
6　いろいろな数列 ………… 14
7　数学的帰納法 ………… 16
8　漸化式(1) ………… 18
9　漸化式(2) ………… 20
10　いろいろな問題 ………… 22
章末問題 ………… 24

②章　統計的な推測

1　確率変数と確率分布 ………… 26
2　確率変数の期待値と分散 ………… 28
3　確率変数の和と期待値 ………… 30
4　独立な確率変数と期待値・分散 ………… 32
5　二項分布 ………… 34
6　正規分布(1) ………… 36
7　正規分布(2) ………… 38
8　母集団と標本 ………… 40
9　推定 ………… 42
10　仮説検定 ………… 44
11　いろいろな問題 ………… 46
章末問題 ………… 48

③章　数学と社会生活

1　経済と数学 ………… 50
章末問題 ………… 53

重要事項 ―― 55
平方・立方・平方根の表 ―― 58
三角比の表 ―― 59
常用対数の表①② ―― 60
正規分布表 ―― 62

第 1 章　数列

1　等差数列

★学習の要点★

❶ **等差数列**

数列$\{a_n\}$において，

$$a_{n+1}=a_n+d \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

が成り立つとき，この数列を**等差数列**といい，dを**公差**という。

❷ **等差数列の一般項**

初項a，公差dの等差数列の一般項a_nは，$a_n=a+(n-1)d$

❸ **等差数列の和**

初項a，公差d，末項lの等差数列の，初項から第n項までの和S_nは，

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2},\quad S_n=\frac{n(a+l)}{2}$$

●基本問題●●

1　［**等差数列の定義**］　次の各数列は等差数列である。□の中に適する数を書け。また，公差も求めよ。

(1)　8，5，□，□，□，……　　(2)　3，□，2，□，□，……

(3)　□，4，□，-2，□，……　　(4)　□，□，$\frac{1}{2}$，□，$1\frac{1}{2}$，……

2　［**等差数列の一般項①**］　一般項a_nが次の式で与えられる数列の，初項から第5項までを書け。また，公差も求めよ。

(1)　$a_n=4n-3$　　(2)　$a_n=10-\frac{1}{2}n$　　(3)　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2$　$(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

3　［**等差数列の一般項②**］　次の等差数列の一般項を求めよ。

(1)　5，8，11，14，……　　(2)　7，3，-1，-5，……

4　［**等差数列の一般項③**］　次の等差数列について，(　)内に指定されたものを求めよ。

(1)　初項が19で第7項が1のとき　(公差)　　(2)　公差が-2で第8項が-7のとき　(初項)

(3)　初項が-5で，公差が3，$a_n=22$のとき　(n)

5　［**等差数列の和**］　次の等差数列の初項から(　)内に示された項までの和を求めよ。

(1)　-4，-2，0，2，……　(第n項)　　(2)　1，-2，-5，-8，……　(第10項)

(3)　初項9，公差-3，項数12　(第12項)　　(4)　$a_3=6$，$a_{13}=-14$，末項-48　(末項)

例題 1　等差数列の和 S_n

ある等差数列の初項から第５項までの和は45，第６項から第10項までの和は -5 である。この等差数列について，次の問いに答えよ。

(1)　初項と公差を求めよ。　　(2)　第11項から第15項までの和を求めよ。

着眼点　$S_n=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$ で，$S_5=45$，$S_{10}-S_5=-5$ のとき $S_{15}-S_{10}$ を求める。

解　(1)　初項を a，公差を d とすると，初項から第５項までの和 S_5 は，

$S_5=\frac{5}{2}(2a+4d)=45$　　よって，$a+2d=9$ ……①

また，初項から第10項までの和は $45+(-5)=40$ になるから，

$S_{10}=\frac{10}{2}(2a+9d)=40$　　よって，$2a+9d=8$ ……②

①，②より，$a=13$，$d=-2$ ……答

(2)　$S_{15}=\frac{15}{2}\{2\times13+14\times(-2)\}=-15$

よって，第11項から第15項までの和は $-15-40=-55$ ……答

6　類題　ある等差数列の初項から第５項までの和は20で，第６項から第10項までの和は30である。この等差数列について，次の問いに答えよ。

(1)　一般項を求めよ。　　(2)　第11項から第20項までの和を求めよ。

▶ 標準問題 ◀◀

7　第15項が33，第45項が153である等差数列の初項と公差を求めよ。また，217はこの数列の第何項か。

8　次の問いに答えよ。

(1)　初項が18で，公差が３である等差数列の一般項を求めよ。また，この数列の項で，はじめて100より大きくなるのは第何項か。

(2)　初項が -70，公差が９である等差数列では，第何項がもっとも０に近いか。

9　初項から第10項までの和が200，初項から第20項までの和が800である等差数列がある。この等差数列の初項から第15項までの和を求めよ。

◆ 発展問題 ◆◆

10　ある等差数列の初項から第 m 項までの和は n，初項から第 n 項までの和は m である。このとき，初項から第 $(m+n)$ 項までの和を求めよ。ただし，$m\neq n$ とする。

ヒント　この数列の初項を a，公差を d とする。$S_m=n$，$S_n=m$，$m\neq n$ より a，d の関係式が得られる。

2 等比数列

★学習の要点★

❶ **等比数列**

数列$\{a_n\}$において，

$a_{n+1}=ra_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

が成り立つとき，この数列を**等比数列**といい，rを**公比**という。

❷ **等比数列の一般項**

初項a，公比rの等比数列の一般項a_nは，

$a_n=ar^{n-1}$

❸ **等比数列の和**

初項a，公比rの等比数列の初項から第n項までの和S_nは，

(1)　$r\neq1$のとき，$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

(2)　$r=1$のとき，$S_n=na$

●基本問題●●

11　［**等比数列の定義**］　次の各数列は等比数列である。各項を実数として，$\square$の中に適する数を書き，公比も求めよ。

(1)　24，8，$\square$，$\square$，……　　(2)　2，$\square$，$\square$，-54，……

12　［**等比数列の一般項①**］　一般項a_nが次の式で与えられている数列の，初項から第5項までを書け。

(1)　$a_n=2^n$　　(2)　$a_n=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$　　(3)　$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=-3a_n$　$(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

13　［**等比数列の一般項②**］　次の等比数列の一般項を求めよ。

(1)　1，0.5，0.25，0.125，……　　(2)　$1\dfrac{1}{2}$，$4\dfrac{1}{2}$，$13\dfrac{1}{2}$，$40\dfrac{1}{2}$，……

14　［**等比数列の一般項③**］　次の等比数列について，(　)内に指定されたものを求めよ。

(1)　初項280，公比が$-\dfrac{1}{2}$のとき　（第9項）　　(2)　初項が5，第4項が135のとき　（公比）

(3)　初項が-3，公比が2，$a_n=-384$　(n)　　(4)　$a_5=12$，$a_9=60$のとき　（初項）

15　［**等比数列の和**］　次の等比数列の初項から(　)内に示された項までの和を求めよ。

(1)　2，-4，8，-16，……　（第n項）　　(2)　1，-0.1，0.01，-0.001，……　（第10項）

(3)　2，1，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4}$，……　（第n項）　　(4)　1，$-\sqrt{2}$，2，$-2\sqrt{2}$，……　（第$2n$項）

例題 2 等比数列

次の問いに答えよ。

(1)　第2項が6，第4項が54である等比数列の初項と公比を求めよ。

(2)　第3項が4で，初項から第3項までの和が28である等比数列の初項と公比を求めよ。

着眼点 (1)　一般項の式にあてはめる。　(2)　和の公式は使わず，$a+ar+ar^2=28$ とする。

解　それぞれの等比数列の初項を a，公比を r とする。

(1)　第2項について，$ar=6$ ……①

第4項について，$ar^3=54$ ……②

②より　$ar\cdot r^2=54$

この式に①を代入して，

$6r^2=54$

これから，$r^2=9$，$r=\pm 3$

$r=3$ のとき

①より　$3a=6$，$a=2$

$r=-3$ のとき

①より　$-3a=6$，$a=-2$

答 初項2，公比3　または　初項-2，公比-3

(2)　第3項について，$ar^2=4$ ……①

和の条件から，$a+ar+ar^2=28$ ……②

②より　$a(1+r+r^2)=28$ ……②′

②′と①を辺々割ると，$\dfrac{1+r+r^2}{r^2}=7$

$6r^2-r-1=0$，$(3r+1)(2r-1)=0$

よって，$r=-\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{2}$　　①に代入して，

$r=-\dfrac{1}{3}$ のとき　$a=36$，

$r=\dfrac{1}{2}$ のとき　$a=16$

答 初項36，公比$-\dfrac{1}{3}$　または　初項16，公比$\dfrac{1}{2}$

16 類題　次の問いに答えよ。

(1)　第2項が-24，第5項が81である等比数列の初項と公比を求めよ。

(2)　第2項が-6で，初項から第3項までの和が9である等比数列の初項と公比を求めよ。

▶ 標準問題 ◀◀

17　次の問いに答えよ。

(1)　第3項が12，第5項が48である等比数列の第8項を求めよ。

(2)　初項が5，公比が2，末項が640である等比数列の項数はいくらか。

18　初項が3，公比が2である等比数列の第 n 項までの和が189であるとき，n の値を求めよ。

◆ 発展問題 ◆◆

19　初項と第4項の和が9，初項から第6項までの和が63である等比数列の初項と公比を求めよ。

ヒント　初項を a，公比を r とする。$a(1+r^3)=9$ ……①，$a(1+r+r^2+r^3+r^4+r^5)=63$ ……②

②式の左辺は $a\{1+r^3+r(1+r^3)+r^2(1+r^3)\}$ となる。

3 等差数列と等比数列

★学習の要点★

❶ 調和数列

数列$\{a_n\}$において，各項の逆数を項とする数列$\dfrac{1}{a_1}$，$\dfrac{1}{a_2}$，$\dfrac{1}{a_3}$，……が等差数列になるとき，もとの数列$\{a_n\}$を**調和数列**という。

❷ 3つの数のなす数列

(1)　3数a，b，cが(この順に)等差数列　$\Longleftrightarrow$　$2b=a+c$

(2)　3数a，b，cが(この順に)等比数列　$\Longleftrightarrow$　$b^2=ac$

❸ 複利法

毎期の初めにa円ずつ預け入れ，1期の利率rで毎期末に利息を元金に繰り入れる複利法では，第n期末の元利合計S_n円は，次のようになる。

$$S_n=a(1+r)^n+a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}+\cdots\cdots+a(1+r)^2+a(1+r)$$

$$=\frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}$$

⇦初項$a(1+r)$，公比$(1+r)$の等比数列の初項から第n項までの和として計算

●基本問題●●

20　[**自然数の和**]　次の問いに答えよ。

(1)　2けたの自然数のうち，7の倍数であるものの和を求めよ。

(2)　2けたの自然数のうち，5で割ると3余る数の和を求めよ。

21　[**等差数列の和の最大・最小**]　初項50，公差-3の等差数列の初項から第何項までの和が最大になるか。また，その和を求めよ。

22　[**調和数列**]　初項が3，第2項が2である調和数列の一般項を求めよ。

23　[**3数のなす数列**]　1，a，bはこの順に等差数列をなし，1，a，b^2はこの順に等比数列をなすという。このとき，a，bの値を求めよ。

24　[**複利法**]　毎年初めに一定の金額を預け入れ，年利率6％で毎年末に利息を元金に繰り入れることにすると，30年後の元利合計は，預け入れ総額の約何倍になるか。ただし，$1.06^{30}=5.74$とする。

例題 3 等差数列か，等比数列か

数列 3，6，……，1500，……がある。この数列は等差数列となることができるか。また，等比数列となることができるか。

着眼点 等差数列であるとすれば，公差は 3 である。1500は第何項か調べる。等比数列であるとすれば，公比は 2 である。$a_n=1500$ となる n を調べることになる。

解 $a_n=1500$ とする。等差数列であるとすれば，初項 3，公差 3 の等差数列だから，一般項 a_n は，

$a_n=3+(n-1)\times 3=3n$　　$3n=1500$ より，$n=500$

よって，初項 3，公差 3 の等差数列であり得る。(1500は第500項である)

また，等比数列であるとすれば，初項 3，公比 2 の等比数列だから，一般項 a_n は，

$a_n=3\cdot 2^{n-1}$　　$3\cdot 2^{n-1}=1500$ より，$2^{n-1}=500$ ……①

ここで，$500=2^2\cdot 5^3$ は 2 の累乗ではないから①を満たす自然数 n はない。

つまり，等比数列ではあり得ない。

答 等差数列となることはできるが，等比数列となることはできない。

25 **類題** 数列 2，6，……，1458，……がある。この数列は等差数列となることができるか。また，等比数列となることができるか。

▶ 標準問題 ◀◀

26 次の問いに答えよ

(1) 初項18，公差 −2 の等差数列の第 5 項から第15項までの和を求めよ。

(2) 初項 3，公比 2 の等比数列の第 7 項から第10項までの和を求めよ。

27 次の問いに答えよ

(1) 100以下の自然数のうち，6 で割り切れない数の和を求めよ。

(2) 自然数 N を素因数分解すると，$N=2^3\cdot 3^4\cdot 5^3$ となるとき，N の約数の総和を求めよ。

28 初項 −98，公差 3 の等差数列の初項から第何項までの和が最小となるか。また，そのときの和を求めよ。

◆ 発展問題 ◆◆

29 初項から第10項までの和が 4 で，第11項から第30項までの和が48である等比数列がある。この等比数列の第31項から第60項までの和を求めよ。公比は実数とする。〈青山学院大〉

ヒント 初項を a，公比を r とすると，$\dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1}=4$，$\dfrac{a_{11}(r^{20}-1)}{r-1}=48$ で，$a_{11}=ar^{10}$　これから，まず r^{10} の値を求める。

章末問題

A

1　次の問いに答えよ。

(1)　第7項が15，第20項が41である等差数列の初項から第10項までの和は□である。

(2)　初項が27，公差がdの等差数列$\{a_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ がある。初項から第18項までの和が初項に等しいとき，公差$d=$□である。このとき，初項から第n項までの和をS_nとすると，S_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ の最大値は□である。

2　次の問いに答えよ。

(1)　第3項が12，第6項が96である等比数列の第n項は□であり，初項から第n項までの和は□である。

(2)　初めの3項の和が3，次の3項の和が-24である等比数列の初項は□，公比は□である。

3　公比rの等比数列$\{a_n\}$に対して，$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$，$T_n=a_1+2a_2+3a_3+\cdots\cdots+na_n$ とおく。いま，$a_2=6$，$a_5=162$ とすれば $a_1=$□，$r=$□ となるから，$S_n=$□ である。

また，$T_n-rT_n=S_n-$□ となるから $T_n=$□ である。

4　1，a，b が等差数列になり，1，b^2，a^2 が等比数列になるとき，実数a，bの値を求めよ。

5　次の問いに答えよ。

(1)　恒等式 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ を利用して，数列の和 $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$ を求めよ。

(2)　奇数の平方からなる数列 1^2，3^2，5^2，……の初項から第50項までの和を求めよ。

6　次の問いに答えよ。

(1)　数列$\dfrac{1}{1}$，$\dfrac{1}{1+2}$，$\dfrac{1}{1+2+3}$，$\dfrac{1}{1+2+3+4}$，……の第n項から第$(2n-1)$項までの和を求めよ。

(2)　$1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\dfrac{1}{1+2+3+4}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots\cdots+12}=\dfrac{24}{\square}$

7　次の漸化式で定義される数列$\{a_n\}$の一般項a_nを求めよ。

(1)　$a_1=0$，$a_{n+1}=a_n+n^2-n-1$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(2)　$a_1=2$，$a_{n+1}=3a_n-2$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

B

8　数列 1，3，7，15，31，……について，次の問いに答えよ。

(1)　一般項 a_n を求めよ。　　(2)　初項から第 n 項までの和を求めよ。

9　数列$\{a_n\}$の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和 S_n が $S_n=n-a_n$ で表されるとき，a_n を n の式で表せ。

10　$x_1=3$，$x_2=5$，$x_{n+2}=3x_{n+1}-2x_n$ $(n\geqq 1)$ で定まる数列$\{x_n\}$がある。次の問いに答えよ。

(1)　$y_1=1$，$y_{n+1}=x_{n+1}-x_n$ $(n\geqq 1)$ で定まる数列$\{y_n\}$の一般項を求めよ。

(2)　x_n を求めよ。

11　$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+3}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たす数列$\{a_n\}$は $a_1=\boxed{\text{ア}}$ のとき，各項は常に一定の値をとる。$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+3}$ $(n\geqq 1)$ で定められる数列$\{a_n\}$に対して，$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと，$b_{n+1}+1$ と b_n+1 の間には関係式$\boxed{\text{イ}}$が成り立つ。このことを利用して，a_n を n で表せば $a_n=\boxed{\text{ウ}}$ となる。また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{100} b_k=\boxed{\text{エ}}$ である。

12　数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$を，$x_1=1$，$y_1=-1$，$x_{n+1}=5x_n-2y_n$，$y_{n+1}=x_n+2y_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　数列$\{x_n-2y_n\}$の一般項を求めよ。　　(2)　数列$\{x_n\}$の一般項を求めよ。

(3)　和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k$ を求めよ。

13　次の問いに答えよ。

(1)　等式 $(1-x)(1+2x+3x^2+\cdots\cdots+nx^{n-1})=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1}-nx^n$ を数学的帰納法によって証明せよ。

(2)　$2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots\cdots+(n+1)\cdot 2^n$ の値を求めよ。

14　n を自然数とするとき，不等式 $2^{n+1}>n^2+n+1$ を数学的帰納法によって証明せよ。

ヒント　**8** 階差数列を利用する。　**9** $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$，$S_1=a_1$　**10** (1) $x_{n+2}-x_{n+1}=2(x_{n+1}-x_n)$ と変形できる。
11 (ア) $a_{n+1}=a_n=a_1$ とおく。　**12** (2) $\{x_n-y_n\}$ も等比数列になる。これと(1)により求める。

第 2 章　統計的な推測

1　確率変数と確率分布

★学習の要点★

❶ **確率変数**

　変数Xのとりうる値x_1，x_2，……，x_nに対し，その値をとる確率がp_1，p_2，……，p_nと決まるとき，Xを**確率変数**という。　（ただし，$p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n=1$）

　確率変数Xが１つの値x_kをとる確率を$P(X=x_k)$で表す。

　また，Xの値がa以上b以下である確率を$P(a \leqq X \leqq b)$で表す。

❷ **確率分布**

　確率変数Xのとる値がx_1，x_2，……，x_nで，Xがそれぞれの値をとる確率がp_1，p_2，……，p_nのとき，この対応関係をXの**確率分布**といい，確率変数Xはこの分布に**従う**という。確率分布を表す表(右図)を**確率分布表**という。

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

●基本問題●●

1　［**確率分布①**］　次の確率変数Xの確率分布を求めよ。

(1)　１個のさいころを２回投げるとき，６の目が出る回数X

(2)　３枚の硬貨を投げるとき，表の出る枚数X

(3)　白玉３個と赤玉２個が入っている袋から，３個の玉を同時に取り出したときの白玉の個数X

2　［**確率分布②**］　次の確率変数Xの確率分布を求めよ。

(1)　さいころを２回投げるとき，出る目の数の和X

(2)　製品10個の中に３個の不良品が含まれている。この10個の中から３個取り出すとき，含まれる不良品の個数X

(3)　赤，青，白の球と，赤，青，白の箱が，それぞれ１つずつある。これらの３つの球を，これらの箱に１つずつ入れるとき，箱の色とその中に入れた球の色が一致したものの個数X

3　［**確率分布③**］　次の問いに答えよ。

(1)　1000本のくじの中に，賞金5000円，1000円，100円の当たりくじがそれぞれ２本，10本，100本ある。このくじを１本引くときに得る賞金をX円とするとき，確率変数Xの確率分布を求めよ。

(2)　１枚の硬貨と１個のさいころを同時に投げる。硬貨の表が出たら１，裏が出たら０とし，それと出たさいころの目の数との和をXとする。このとき，Xの確率分布を求めよ。

例題 1 確率分布

5枚のカードがあり，それには1から5までの通し番号がついている。別に5つの席があり，それにも1から5までの通し番号がついている。カードの番号と一致している席の個数をXとするとき，確率変数Xの確率分布を求めよ。

着眼点　$X=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ だが，$X=4$ のときはあり得ない。

解　5枚のカードを5個の席に配るすべての方法は $5!=120$(通り)。

$X=5$ のとき，すべて一致するのは1通りだから，$P(X=5)=\dfrac{1}{120}$

$X=4$ のとき，5個目も必ず一致するので，$X=4$ の場合は起こらないから，$P(X=4)=\dfrac{0}{120}$

$X=3$ のとき，3個一致するのは，${}_5C_3=10$(通り)より，$P(X=3)=\dfrac{10}{120}$

$X=2$ のとき，2個一致するのは，一致しない3枚のカードの配り方が2通りずつあるから，

${}_5C_2\times 2=20$(通り)より，$P(X=2)=\dfrac{20}{120}$

$X=1$ のとき，1個一致するのは，${}_5C_1\times 9=45$(通り)より，$P(X=1)=\dfrac{45}{120}$

$X=0$ のとき，余事象を考えて，$120-(1+10+20+45)=44$ より，$P(X=0)=\dfrac{44}{120}$

求める確率分布は，

X	0	1	2	3	4	5	計
P	$\dfrac{44}{120}$	$\dfrac{45}{120}$	$\dfrac{20}{120}$	$\dfrac{10}{120}$	0	$\dfrac{1}{120}$	1

……答

4 類題　4つの箱があり，それぞれに1，2，3，4の番号がつけられている。別に1，2，3，4の番号がつけられている4枚のカードを1つの箱に1枚ずつ無作為に入れるとき，カードの番号と箱の番号が一致したものの個数をXとする。Xの確率分布を求めよ。

▶ 標準問題 ◀◀

5　白球6個と黒球2個が入っている袋の中から任意に3個の球を同時に取り出す。このとき，取り出された白球の個数を確率変数Xとする。Xの確率分布を求めよ。

6　2個のさいころを投げて，出る目の数のうち小さくない方をXとする。Xの確率分布を求めよ。

◆ 発展問題 ◆◆

7　1個のさいころを投げて，出る目の数の和がはじめて6の倍数となるまでに必要な回数を確率変数Xとする。Xの確率分布を求めよ。

ヒント　$P(X=k)=\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\cdots\cdots\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{6}=\left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\dfrac{1}{6}$ で求められる。

2 確率変数の期待値と分散

★学習の要点★

❶ 確率変数の期待値(平均)

確率変数Xが右の表の分布に従うとき，

X	x_1　$x_2 \cdots x_i \cdots\cdots x_n$	計
P	p_1　$p_2 \cdots p_i \cdots\cdots p_n$	1

$$x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$$

をXの**期待値**または**平均**といい，$E(X)$またはmで表す。

❷ 確率変数の分散，標準偏差

確率変数Xが上の表の分布に従うとき，確率変数$\{X-E(X)\}^2$の期待値をXの**分散**といい，$V(X)$で表す。また，$\sqrt{V(X)}$をXの**標準偏差**といい，$\sigma(X)$で表す。

分散　$V(X)=\sum_{i=1}^{n}\{x_i-E(X)\}^2p_i=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-\{E(X)\}^2=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

標準偏差　$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{E(X^2)-\{E(X)\}^2}$

❸ 確率変数の変換と期待値，分散

確率変数Xと定数a，bに対して，$Y=aX+b$とすると，

期待値　$E(Y)=aE(X)+b$　　分散　$V(Y)=a^2V(X)$　　標準偏差　$\sigma(Y)=|a|\sigma(X)$

●基本問題●●

8　［**確率変数の期待値**］　1つのさいころを投げて出た目の数を確率変数Xとするとき，次の問いに答えよ。

(1)　Xの確率分布を求めよ。　　(2)　Xの期待値を求めよ。

9　［**確率変数の分散，標準偏差①**］　2個の100円硬貨を投げて，表の出た硬貨をもらえると約束する。もらえる金額X(円)を確率変数とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　Xの期待値を求めよ。　　(2)　Xの分散および標準偏差を求めよ。

10　［**確率変数の分散，標準偏差②**］　白球3個と赤球2個が入っている袋から，同時に2個の球を取り出したときの白球の個数をXとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　Xの期待値を求めよ。　　(2)　Xの分散および標準偏差を求めよ。

11　［**確率変数の変換と期待値，分散**］　さいころを投げて出た目の数をXとするとき，$3X+2$の期待値および分散を求めよ。

例題 ② 確率変数の期待値，分散，標準偏差

白球 3 個と赤球 7 個が入っている袋から，同時に 3 個の球を取り出すとき，その 3 個の中の白球の個数を X とする。次の問いに答えよ。

(1)　確率変数 X の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

(2)　確率変数 $Y=2X+3$ の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

着眼点　分散 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$，$E(aX+b)=aE(X)+b$，$V(aX+b)=a^2V(X)$ を利用する。

解　(1)　$P(X=0)=\dfrac{{}_3C_0\cdot{}_7C_3}{{}_{10}C_3}=\dfrac{1\cdot35}{120}=\dfrac{35}{120}$，$P(X=1)=\dfrac{{}_3C_1\cdot{}_7C_2}{{}_{10}C_3}=\dfrac{3\cdot21}{120}=\dfrac{63}{120}$

$P(X=2)=\dfrac{{}_3C_2\cdot{}_7C_1}{{}_{10}C_3}=\dfrac{3\cdot7}{120}=\dfrac{21}{120}$，$P(X=3)=\dfrac{{}_3C_3\cdot{}_7C_0}{{}_{10}C_3}=\dfrac{1}{120}$

X	0	1	2	3	計
P	$\dfrac{35}{120}$	$\dfrac{63}{120}$	$\dfrac{21}{120}$	$\dfrac{1}{120}$	1

X の確率分布は右の表。X の期待値は，

$$E(X)=0\times\frac{35}{120}+1\times\frac{63}{120}+2\times\frac{21}{120}+3\times\frac{1}{120}=\frac{9}{10}\ \cdots\cdots\boxed{答}$$

また，$E(X^2)=0^2\times\dfrac{35}{120}+1^2\times\dfrac{63}{120}+2^2\times\dfrac{21}{120}+3^2\times\dfrac{1}{120}=\dfrac{13}{10}$ より，

X の分散は，$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\dfrac{13}{10}-\left(\dfrac{9}{10}\right)^2=\dfrac{49}{100}\ \cdots\cdots\boxed{答}$

X の標準偏差は，$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\dfrac{49}{100}}=\dfrac{7}{10}\ \cdots\cdots\boxed{答}$

(2)　$Y=2X+3$ の期待値は，$E(Y)=E(2X+3)=2E(X)+3=2\times\dfrac{9}{10}+3=\dfrac{24}{5}\ \cdots\cdots\boxed{答}$

Y の分散は，$V(Y)=2^2\times V(X)=4\times\dfrac{49}{100}=\dfrac{49}{25}\ \cdots\cdots\boxed{答}$

Y の標準偏差は，$\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\dfrac{7}{5}\ \cdots\cdots\boxed{答}$

12　**類題**　白球 3 個，赤球 5 個が入っている袋から同時に 3 個の球を取り出すとき，白球の個数を X とする。次の問いに答えよ。

(1)　確率変数 X の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

(2)　確率変数 $Y=4X-3$ の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

▶ 標準問題 ◀◀

13　右の表の確率分布において，$Y=5X-3$ を満たす確率変数 Y がある。このとき，Y の期待値と分散を求めよ。

X	1	2	3	4	計
P	0.1	0.2	0.4	0.3	1

◆ 発展問題 ◆◆

14　確率変数 X の期待値が m で分散が σ^2 のとき，確率変数 $Y=\dfrac{X-m}{\sigma}$ の期待値と分散を求めよ。

ヒント　$Y=\dfrac{X-m}{\sigma}=\dfrac{1}{\sigma}X-\dfrac{m}{\sigma}$ で 1 次式の期待値と分散の公式を利用する。

3 確率変数の和と期待値

★学習の要点★

❶ 同時分布

２つの確率変数X，Yについて，
Xのとる値がx_1，x_2，……，x_n，　Yのとる値がy_1，y_2，……，y_m
であるとする。

$P(X=x_i,\ Y=y_j)=p_{ij}$とおくとき，すべてのiとjの組合せについて，確率p_{ij}を対応させた右のような表を，XとYの**同時分布**という。

X \ Y	y_1	y_2	……	y_m	計
x_1	p_1	p_{12}	……	p_{1m}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	……	p_{2m}	p_2
⋮					⋮
x_n	p_{n1}	p_{n2}	……	p_{nm}	p_n
計	q_1	q_2	……	q_m	1

❷ 確率変数の和の期待値

２つの確率変数X，Yに対して，

(1) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$　（この等式は，３つ以上の確率変数の和についても成り立つ。）

(2) $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$　（a，bは定数）

●基本問題●●

15［**同時分布**］　次の問いに答えよ。

(1)　３本の当たりくじを含む10本のくじがある。まずAが１本くじを引き，残りのくじからBが１本引くとき，A，Bの当たりくじの数をX，Yとする。XとYの同時分布を求めよ。

(2)　袋の中に６個の赤球と３個の白球が入っている。Aが最初に１個の球を取り出し，残りからBが２個の球を取り出すとき，A，Bの赤球の個数をX，Yとする。XとYの同時分布を求めよ。

16［**確率変数の和の期待値①**］　次の問いに答えよ。

(1)　２つのさいころを同時に投げるとき，それぞれのさいころの出る目の数をX，Yとする。このとき，出る目の和の期待値を求めよ。

(2)　袋Aには赤球２個と白球３個，袋Bには赤球１個と白球３個が入っている。それぞれの袋から２個ずつ球を取り出すとき，A，Bの赤球の個数をX，Yとする。赤球の個数の和$X+Y$の期待値を求めよ。

(3)　50円硬貨１枚，100円硬貨１枚，500円硬貨１枚を同時に投げるとき，表の出た硬貨の金額の和の期待値を求めよ。

17［**確率変数の和の期待値②**］　１つのさいころを２回続けて投げるとき，１回目，２回目に出る目の数をX，Yとする。次の確率変数の期待値を求めよ。

(1)　$2X+Y$　　　　(2)　$4X-3Y$

例題 3　確率変数の和の期待値

袋の中に赤球3個と白球7個が入っている。Aが最初に2個の球を取り出し，残りからBが1個の球を取り出すとき，A，Bの赤球の個数をX，Yとする。このとき，赤球の個数の和の期待値を求めよ。

着眼点　球をもとに戻さない場合も，$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ が成り立つ。

解　Xのとる値は0，1，2であり，

$$P(X=0)=\frac{{}_7C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{7}{15}\qquad P(X=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_7C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{7}{15}\qquad P(X=2)=\frac{{}_3C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{15}$$

$X=0$のとき，　Bは赤球3個，白球5個の中から1個取り出すから，

$$P(X=0,\ Y=0)=\frac{7}{15}\times\frac{5}{8}=\frac{7}{24}\qquad P(X=0,\ Y=1)=\frac{7}{15}\times\frac{3}{8}=\frac{7}{40}$$

$X=1$のとき，　Bは赤球2個，白球6個の中から1個取り出すから

$$P(X=1,\ Y=0)=\frac{7}{15}\times\frac{6}{8}=\frac{7}{20}\qquad P(X=1,\ Y=1)=\frac{7}{15}\times\frac{2}{8}=\frac{7}{60}$$

$X=2$のとき，　Bは赤球1個，白球7個の中から1個取り出すから

$$P(X=2,\ Y=0)=\frac{1}{15}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{120}\qquad P(X=2,\ Y=1)=\frac{1}{15}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{120}$$

同時分布は右のようになる。

X \ Y	0	1	計
0	$\frac{7}{24}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{7}{15}$
1	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{7}{15}$
2	$\frac{7}{120}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{15}$
計	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

よって，期待値$E(X)=0\times\frac{7}{15}+1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{3}{5}$　　$E(Y)=0\times\frac{7}{10}+1\times\frac{3}{10}=\frac{3}{10}$

したがって，赤球の個数の和の期待値は，$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{3}{5}+\frac{3}{10}=\frac{9}{10}$ ……**答**

18　**類題**　2本の当たりくじを含む8本のくじがある。Aが最初に1本くじを引き，残りからBが2本引く。A，Bの当たりくじの数をX，Y，期待値を$E(X)$，$E(Y)$とするとき，$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ を示し，$E(X+Y)$ を求めよ。

▶ 標準問題 ◀◀

19　1から9までの自然数を1つずつ書いた9枚のカードから，引いたカードはもとに戻さずに順に2枚を引く。1回目は偶数が2点，奇数が1点，2回目は偶数が3点，奇数が2点とする。このとき，1回目，2回目の得点をそれぞれX，Yとして，XとYの同時分布を求めよ。また，得点の合計の期待値を求めよ。

20　1組52枚のトランプから，もとに戻さないで3枚を続けて取り出すとき，取り出された3枚の中の絵札の枚数をTとする。このとき，Tの期待値を求めよ。

◆ 発展問題 ◆◆

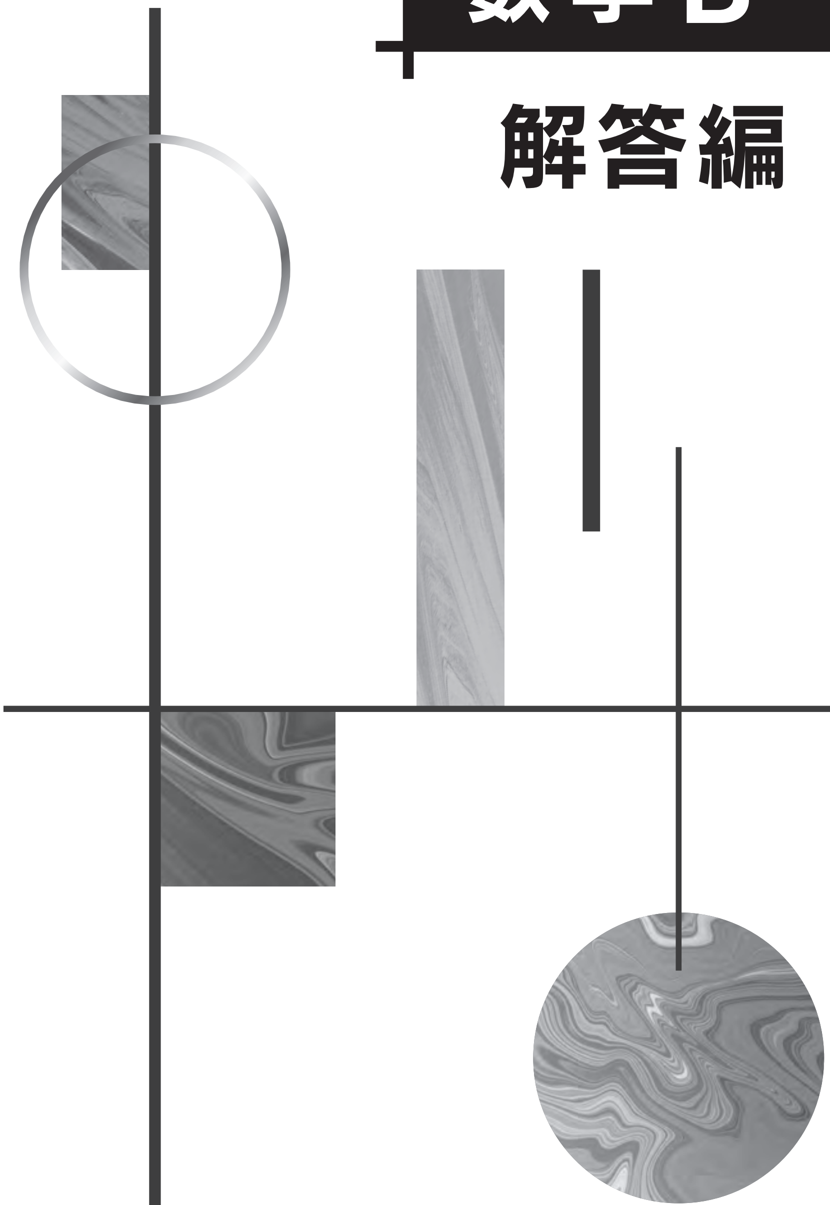
21　1からnまでの自然数が1つずつ書かれたカードが1枚ずつある。この中から1枚を引いて，もとに戻さずにもう1枚を引く。1枚目の数字と同じ数だけ100円硬貨が，2枚目の数字と同じ数だけ10円硬貨がもらえるとする。もらえる金額の平均が275円であるとき，nの値を求めよ。

ヒント　1枚目，2枚目をそれぞれX，Yとすると，もらえる金額は$100X+10Y$（円）。$E(X)$をnで表す。

高校ゼミ
Essence

数学B

解答編



第 1 章 数列

【p. 4】 ❶ 等差数列

1 (1) 公差は-3　順に　$2,\ -1,\ -4$

(2) 公差をdとすると，$2=3+2d$ より $d=\mathbf{-\frac{1}{2}}$

よって，順に $\mathbf{\frac{5}{2},\ \frac{3}{2},\ 1}$

(3) 初項をa，公差をdとする。
$a+d=4,\ a+3d=-2$ より，
$a=7,\ d=\mathbf{-3}$ となるので，
順に，$\mathbf{7,\ 1,\ -5}$

(4) 初項をa，公差をdとする。
$a+2d=\frac{1}{2},\ a+4d=\frac{3}{2}$ より，
$a=-\frac{1}{2},\ d=\mathbf{\frac{1}{2}}$ となるので
順に，$\mathbf{-\frac{1}{2},\ 0,\ 1}$

2 (1) $1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17$　公差は4

(2) $\frac{19}{2},\ 9,\ \frac{17}{2},\ 8,\ \frac{15}{2}$　公差は$-\frac{1}{2}$

(3) $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9$　公差は2

3 (1) $\mathbf{a_n}=5+3(n-1)=\mathbf{3n+2}$

(2) $\mathbf{a_n}=7+(n-1)\times(-4)=\mathbf{11-4n}$

4 (1) 公差をdとおく。
$1=19+6d$ より，$d=\mathbf{-3}$

(2) 初項をaとおく。$-7=a-14,\ a=\mathbf{7}$

(3) $22=-5+3(n-1)$ より $n=\mathbf{10}$

5 (1) 初項$a=-4$，公差$d=2$

$$S_n=\frac{n\{-4\times2+2(n-1)\}}{2}=\mathbf{n(n-5)}$$

(2) 公差$d=-3$，$S_{10}=\dfrac{10(1\times2-3\times9)}{2}=\mathbf{-125}$

(3) $S_{12}=\dfrac{12(9\times2-3\times11)}{2}=\mathbf{-90}$

(4) 初項をa，公差をdとおく。
$a+2d=6,\ a+12d=-14$ より，
$a=10,\ d=-2$ となるので，
$-48=10-2(n-1)$ より $n=30$

$$S_{30}=\frac{30(10-48)}{2}=\mathbf{-570}$$

【p. 5】

6 類題　初項a，公差dとする。

$\dfrac{5(2a+4d)}{2}=20$ より　$a+2d=4$ ……①

$\dfrac{10(2a+9d)}{2}=50$ より　$2a+9d=10$ ……②

①，②から $a=\frac{16}{5},\ d=\frac{2}{5}$

(1) $a_n=\dfrac{16}{5}+\dfrac{2(n-1)}{5}=\mathbf{\dfrac{2n+14}{5}}$

(2) $a_{11}=\dfrac{16}{5}+\dfrac{2}{5}\times10=\dfrac{36}{5},\ a_{20}=\dfrac{54}{5}$

$$S=\frac{10\left(\frac{36}{5}+\frac{54}{5}\right)}{2}=\mathbf{90}$$

7 初項a，公差dとする。
$a+14d=33,\ a+44d=153$ より，
$a=\mathbf{-23},\ d=\mathbf{4}$
$217=-23+4(n-1),\ n=61$　**第61項**

8 (1) $a_n=18+3(n-1)=\mathbf{3n+15}$

$3n+15>100$ より $n>28\frac{1}{3}$

よって，**第29項**

(2) $a_n=-70+9(n-1)=9n-79$

$9n-79=0$ とおくと $n=8\frac{7}{9}$ より，

$a_8=-7,\ a_9=2$ となるので，0に近い項は**第9項**になる。

9 初項a，公差dとする。

$\dfrac{10(2a+9d)}{2}=200$ より　$2a+9d=40$ ……①

$\dfrac{20(2a+19d)}{2}=800$ より　$2a+19d=80$ ……②

①，②より $a=2,\ d=4$

$$S_{15}=\frac{15(2\times2+14\times4)}{2}=\mathbf{450}$$

10 $\dfrac{m\{2a+(m-1)d\}}{2}=n$

$2ma+m(m-1)d=2n$ ……①

$\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=m$

$2na+n(n-1)d=2m$ ……②

①−② より
$2(m-n)a+d\{m^2-n^2-(m-n)\}=2(n-m)$
$m\neq n$ より $2a+d(m+n-1)=-2$ となるので

$$S_{m+n}=\frac{(m+n)\{2a+(m+n-1)d\}}{2}=\mathbf{-(m+n)}$$

【p. 6】 ❷ 等比数列

11 (1) 公比は$\frac{1}{3}$，順に$\frac{8}{3},\ \frac{8}{9}$

(2) 公比をrとおく。$2r^3=-54$ より $r=-3$
順に，$\mathbf{-6,\ 18}$

12 (1) $2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32$

(2) $\frac{1}{2},\ -\frac{1}{6},\ \frac{1}{18},\ -\frac{1}{54},\ \frac{1}{162}$

(3) $\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2},\ \frac{9}{2},\ -\frac{27}{2},\ \frac{81}{2}$

13 (1) 公比は$\frac{1}{2}$　$\mathbf{a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

(2) 公比は3だから $\mathbf{a_n}=\dfrac{3}{2}\times3^{n-1}=\mathbf{\dfrac{3^n}{2}}$

14 (1) $a_9=280\times\left(-\frac{1}{2}\right)^8=\mathbf{\frac{35}{32}}$

(2) 公比をrとする。$5r^3=135$ より　$r=\mathbf{3}$

(3) $(-3)\times2^{n-1}=-384,\ 2^{n-1}=2^7$ より　$n=\mathbf{8}$

(4) 初項をa，公比をrとおく。

$ar^4=12$ ……① $ar^8=60$ ……②

①，②より，$r^4=5$，①に代入して $a=\boldsymbol{\frac{12}{5}}$

15 (1) 公比 $r=-2$

$S_n=\dfrac{2\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\{1-(-2)^n\}}$

(2) 公比は $-\dfrac{1}{10}$

$$S_{10}=\dfrac{1-\left(-\dfrac{1}{10}\right)^{10}}{1+\dfrac{1}{10}}=\boldsymbol{\dfrac{10}{11}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{10}\right)^{10}\right\}}$$

(3) 公比は $\dfrac{1}{2}$

$$S_n=\dfrac{2\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\dfrac{1}{2}}=\boldsymbol{4\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}}$$

(4) 公比は $-\sqrt{2}$ $S_{2n}=\dfrac{1-(-\sqrt{2})^{2n}}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{1-2^n}{\sqrt{2}+1}$

分母を有理化して，$S_{2n}=\boldsymbol{(\sqrt{2}-1)-2^n(\sqrt{2}-1)}$

【p. 7】

16 類題 (1) 初項を a，公比を r とする。

$ar=-24$，$ar^4=81$ より

$a=16$，$r=-\dfrac{3}{2}$

よって，**初項16，公比 $\boldsymbol{-\dfrac{3}{2}}$**

(2) 初項を a，公比を r とおく。

$ar=-6$ ……① $\dfrac{a(1-r^3)}{1-r}=9$ ……②

①，②より $2r^2+5r+2=0$

$(2r+1)(r+2)=0$ より $r=-\dfrac{1}{2}$，$r=-2$

$r=-\dfrac{1}{2}$ のとき $a=12$，$r=-2$ のとき $a=3$

初項は12，公比 $\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$，または，

初項 3，公比 −2

17 (1) 初項を a，公比を r とする。

$ar^2=12$ ……①，$ar^4=48$ ……②

①，②より，$r^2=4$，$a=3$

したがって，公比が 2 のとき $a_8=\boldsymbol{384}$

公比が −2 のとき $a_8=\boldsymbol{-384}$

(2) $5\times2^{n-1}=640$ として，$2^{n-1}=128=2^7$

$n-1=7$ より，$\boldsymbol{n=8}$

18 $\dfrac{3(2^n-1)}{2-1}=189$，$2^n-1=63$，$2^n=64$

よって，$\boldsymbol{n=6}$

19 $a+ar^3=9$ ……①

$a(1+r+r^2+r^3+r^4+r^5)=63$ ……②

②より，$a(1+r^3)(1+r+r^2)=63$

①より，$a(1+r^3)=9$ だから，$1+r+r^2=7$

$r^2+r-6=0$ より，$(r+3)(r-2)=0$

よって，$r=-3$，2

$r=-3$ のとき，$a=-\dfrac{9}{26}$

$r=2$ のとき，$a=1$

以上から，**初項 $\boldsymbol{-\dfrac{9}{26}}$，公比 −3，**

または，初項 1，公比 2

【p. 8】 ❸ 等差数列と等比数列

20 (1) 10〜99までの整数のうちで，7 の倍数は 14，21，28，……，98となるので，

公差$=7$，末項の98は $98=14+7(n-1)$ より

$n=13$ よって $S_{13}=\dfrac{13(14+98)}{2}=\boldsymbol{728}$

(2) 10〜99の整数のうちで，5 で割ると 3 余る数は，13，18，23，……，98

公差$=5$，末項 $98=13+5(n-1)$，$n=18$

$S_{18}=\dfrac{18(13+98)}{2}=\boldsymbol{999}$

21 初項50で，公差 −3 だから正の数だけの和が最大になる。$a_n=50-3(n-1)=53-3n>0$ より **17項までの和が最大になる。**

$S_{17}=\dfrac{17(50\times2-3\times16)}{2}=\boldsymbol{442}$

22 調和数列の各項を逆数にすると，等差数列になる。公差$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$，よって，第 n 項は

$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}(n-1)=\dfrac{n+1}{6}$ したがって $\boldsymbol{a_n=\dfrac{6}{n+1}}$

23 1，a，b が等差数列のとき，$2a=b+1$ ……①

1，a，b^2 が等比数列のとき，$a^2=b^2$ ……②

①，②より $a^2=(2a-1)^2$

$(3a-1)(a-1)=0$ より，$a=1$，$a=\dfrac{1}{3}$

$\boldsymbol{a=1}$，$\boldsymbol{b=1}$，または，$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{3}}$，$\boldsymbol{b=-\dfrac{1}{3}}$

24 一定の金額を a 円とすると，30年後には，

$1.06a+1.06^2a+\cdots\cdots+1.06^{30}a$

$=\dfrac{1.06a(1.06^{30}-1)}{1.06-1}=\dfrac{1.06a\times(5.74-1)}{0.06}$

$=\dfrac{1.06a\times4.74}{0.06}=83.74a$ (円)

$83.74a\div30a\fallingdotseq\boldsymbol{2.8}$ **(倍)**

【p. 9】

25 等差数列とすると，$1458=2+4(n-1)$

$4n=1460$，$n=365$

よって，初項 2，公差 4 の等差数列である。すなわち，**等差数列になることができる。**

等比数列とすると，$2\times3^{n-1}=1458$

$3^{n-1}=729=3^6$，$n=7$

よって，初項 2，公比 3 の等比数列である。

すなわち，**等比数列になることができる。**

26 (1) $a=18$，$d=-2$ だから $a_5=18-8=10$

また，$a_{15}=18-28=-10$

したがって，初項を10とすると，第11項が −10

の等差数列の和は

$S=\dfrac{11(10-10)}{2}=\mathbf{0}$

(2) $a=3$，$r=2$ のとき，$a_7=3\cdot2^6$，$a_{10}=3\cdot2^9$
3×2^6 を初項とするとき，第 4 項までの和で，

$S=\dfrac{3\cdot2^6(2^4-1)}{2-1}=\mathbf{2880}$

27 (1) 100以下の自然数で，6 の倍数の和は，初項 6，末項が16項96，公差 6 の等差数列の和で，

$S_{16}=\dfrac{16(6+96)}{2}=816$

1 から100までの自然数の和は

$S=\dfrac{100\times101}{2}=5050$

よって，6 で割り切れない数の和は
$5050-816=\mathbf{4234}$

(2) Nの約数は $2^a3^b5^c$ $(0\leqq a\leqq3,\ 0\leqq b\leqq4,\ 0\leqq c\leqq3)$ と表されるから，約数の総和は，
$(2^0+2^1+2^2+2^3)\cdot(3^0+3^1+3^2+3^3+3^4)\cdot(5^0+5^1+5^2+5^3)$
と表せる。よって，求める和は，

$\dfrac{2^4-1}{2-1}\cdot\dfrac{3^5-1}{3-1}\cdot\dfrac{5^4-1}{5-1}=15\cdot121\cdot156$
$=\mathbf{283140}$

28 初項-98，公差 3 で，和が最小になるのは，負の数の項だけの和である。
$a_n=-98+3(n-1)=-101+3n<0$

$n<33\dfrac{2}{3}$ よって**33項**までの和

$S_{33}=\dfrac{33(-98-2)}{2}=\mathbf{-1650}$

29 初項を a，公比を r とおくと，

$\dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1}=4$ ……①

$\dfrac{ar^{10}(r^{20}-1)}{r-1}=48$ ……②

①，②より $(r^{10})^2+r^{10}-12=0$
$(r^{10}+4)(r^{10}-3)=0$ よって $r^{10}=3$

①より，$a=\dfrac{4(r-1)}{r^{10}-1}=2(r-1)$

初項から30項までの和は $4+48=52$

よって，$\dfrac{a(r^{60}-1)}{r-1}-52=2(3^6-1)-52$
$=1456-52=\mathbf{1404}$

【p. 10】 ❹ Σと数列の和

30 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}(2k+1)$
$=3+5+7+9+11+13+15+17$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(-1)^k$
$=-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1$

(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{9}(-3)=(-3)+(-3)+(-3)+(-3)$
$+(-3)+(-3)+(-3)+(-3)+(-3)$

(4) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}3\cdot4^{i-1}=3\cdot1+3\cdot4+3\cdot4^2+\cdots\cdots+3\cdot4^{n-1}$

31 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k$ (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^k$ (3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k)^2$

32 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\times\frac{n(n+1)}{2}-n=\boldsymbol{n^2}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$
$=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\dfrac{n(n+1)}{2}$
$=\boldsymbol{\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2-1)$
$=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}-n=\boldsymbol{\dfrac{2n^3+3n^2-5n}{6}}$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2^k+4k)=\frac{2(2^n-1)}{2-1}+4\times\frac{n(n+1)}{2}$
$=\boldsymbol{2^{n+1}-2+2n^2+2n}$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2(4k+1)=\sum_{k=1}^{n}(4k^3+k^2)$
$=4\times\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2+\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$=n(n+1)\left\{n(n+1)+\dfrac{2n+1}{6}\right\}$
$=n(n+1)\dfrac{6n^2+6n+2n+1}{6}$
$=\boldsymbol{\dfrac{n(n+1)(6n^2+8n+1)}{6}}$

(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)$
$=4\times\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\times\dfrac{n(n+1)}{2}+n$
$=n\left\{\dfrac{2(n+1)(2n+1)}{3}-2(n+1)+1\right\}$
$=\dfrac{n}{3}\{2(n+1)(2n+1)-6(n+1)+3\}$
$=\dfrac{n}{3}(4n^2-1)=\boldsymbol{\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}}$

33 (1) $a_n=n\{2+3(n-1)\}=\boldsymbol{n(3n-1)}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(3k-1)=\sum_{k=1}^{n}(3k^2-k)$
$=3\times\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\dfrac{n(n+1)}{2}$
$=\dfrac{n(n+1)}{2}(2n+1-1)=\boldsymbol{n^2(n+1)}$

(2) $a_n=\boldsymbol{(2n+1)^2}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k^2+4k+1)$
$=4\times\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4\times\dfrac{n(n+1)}{2}+n$
$=n\left\{\dfrac{2(n+1)(2n+1)}{3}+2(n+1)+1\right\}$
$=n\left(\dfrac{4n^2+6n+2+6n+6+3}{3}\right)$

$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{2n}{n+1}-\dfrac{2(n-1)}{n}=\dfrac{2}{n(n+1)}$

$a_1=S_1=1$ となり，$n\geqq 1$ で　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{2}{n(n+1)}}$

82　n 本の直線によって，平面が a_n 個の部分に分けられたとする。

$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+(n+1)$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$

$=2+\dfrac{n^2+n-2}{2}=\dfrac{n^2+n+2}{2}$

$n=1$ のとき，$a_1=2$ だから a_n の式が成り立つ。

よって，$\boldsymbol{\dfrac{n^2+n+2}{2}}$ **個に分割される。**

83　Ⅰ．$n=3$ のとき，$\dfrac{1}{2}\times 3\times(3-3)=0$

三角形には対角線はないので 0 より，成り立つ。

Ⅱ．$n=k$ のとき，凸 k 角形の対角線は

$\dfrac{1}{2}k(k-3)$ 本引けるとする。

$n=k+1$ のとき，凸 $(k+1)$ 角形になると，対角線は凸 k 角形よりも $(k-1)$ 本増加する。

よって，$\dfrac{1}{2}k(k-3)+(k-1)=\dfrac{1}{2}(k+1)(k-2)$

となって，$n=k+1$ のときも成り立つ。

Ⅰ，Ⅱより，$n\geqq 3$ のすべての自然数で成り立つ。

84　(1)　$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ について

$n=1$ のとき $a_3=pa_2+qa_1$ より　$7=3p+2q$

$n=2$ のとき $a_4=pa_3+qa_2$ より　$13=7p+3q$

よって，$p=1$，$q=2$

$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$ となるので

$\boldsymbol{a_5}=a_4+2a_3=13+2\times 7=\boldsymbol{27}$

$\boldsymbol{a_6}=a_5+2a_4=27+2\times 13=\boldsymbol{53}$

$\boldsymbol{a_7}=a_6+2a_5=\boldsymbol{107}$

(2)　$a_{n+2}+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n)$ となる。

$a_{n+1}+a_n=2(a_n+a_{n-1})$

$=2^{n-1}(a_2+a_1)=5\cdot 2^{n-1}$ ……①

また，$a_{n+2}-2a_{n+1}=-(a_{n+1}-2a_n)$

$a_{n+1}-2a_n=(-1)(a_n-2a_{n-1})$

$=(-1)^{n-1}(a_2-2a_1)=(-1)^{n-1}\times(-1)$ ……②

①−②　$3a_n=5\cdot 2^{n-1}-(-1)^n$

$a_n=\dfrac{5}{3}\cdot 2^{n-1}-\dfrac{1}{3}(-1)^n$

$=\dfrac{5}{6}\cdot 2^n-\dfrac{1}{3}(-1)^n$ となる。

85　イ　1，ロ　6，ハ　2，ニ　3，ホ　−3，ヘ　−2

86　(1)　2 桁の数は10〜99だから

$10+11+12+\cdots\cdots+99=\dfrac{90(10+99)}{2}=\mathbf{4905}$**(個)**

(2)　$1+2+3+\cdots\cdots+99=\dfrac{99(1+99)}{2}=4950$

よって，初めての100は　**第4951項**

(3)　10000項が n という数とする。

$\dfrac{n(n-1)}{2}<10000\leqq\dfrac{n(n+1)}{2}$ より　$n=141$

$1+2+\cdots\cdots+140=9870$ だから　第10000項は **141**である。

87　三角形は $x=\dfrac{n}{2}$ について対称であるから，

$x<\dfrac{n}{2}$ の格子点を数える。

(i)　**n が奇数のとき**

$(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 0)$，……，$(2,\ 4)$，……，$\left(\dfrac{n-1}{2},\ 0\right)$，……，

$\left(\dfrac{n-1}{2},\ n-1\right)$ より，$1+3+5+\cdots\cdots+n$，

すなわち，初項 1，末項 n，項数 $\dfrac{n+1}{2}$ の等差数列の和を S とすると，求める格子点の数は，

$2S=\dfrac{(n+1)}{2}\times(n+1)=\boldsymbol{\dfrac{(n+1)^2}{2}}$ **(個)**

(ii)　**n が偶数のとき**

$(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 0)$，……，$(2,\ 4)$，……，$\left(\dfrac{n}{2}-1,\ 0\right)$，……，

$\left(\dfrac{n}{2}-1,\ n-2\right)$ より，$1+3+5+\cdots\cdots+(n-1)$

を S' とすると，求める格子点の数は，

$2S'+(n+1)=\dfrac{n^2}{2}+(n+1)=\boldsymbol{\dfrac{n^2+2n+2}{2}}$ **(個)**

【p. 24】　章末問題

1　(1)　初項 a，公差 d とする。

$a+6d=15$ ……①，$a+19d=41$ ……②

$d=2$，$a=3$　したがって，

$S_{10}=\dfrac{10(6+18)}{2}=\mathbf{120}$

(2)　$\dfrac{18(27\times 2+17d)}{2}=27$ より　$d=\mathbf{-3}$

$a_n=27-3(n-1)=30-3n\geqq 0$，$n\leqq 10$ より和が最大になるのは

$S_{10}=\dfrac{10(27\times 2-3\times 9)}{2}=\mathbf{135}$

2　(1)　順に　$3\cdot 2^{n-1}$，$3\cdot(2^n-1)$

(2)　1，−2

3　順に　2，3，3^n-1，$2n\cdot 3^n$，$\dfrac{(2n-1)\cdot 3^n+1}{2}$

4　1，a，b が等差数列のとき　$2a=b+1$

1，b^2，a^2 が等比数列のとき，$b^4=a^2$

$\boldsymbol{a=1}$，$\boldsymbol{b=1}$ **または** $\boldsymbol{a=\dfrac{1}{4}}$，$\boldsymbol{b=-\dfrac{1}{2}}$

5　(1)　$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ において，

$k=1$ のとき，$2^3-1^3=3\cdot 1^2+3\cdot 1+1$

$k=2$ のとき，$3^3-2^3=3\cdot 2^2+3\cdot 2+1$

…………

$k=n$ のとき，$(n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1$

辺々を加えると，
$(n+1)^3-1^3=3(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)$
$+3(1+2+3+\cdots\cdots+n)+n$
よって，$3(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)$
$=(n+1)^3-1^3-3(1+2+3+\cdots\cdots+n)-n$
$=(n+1)^3-1-3\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n$
$=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$
ゆえに
$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\boldsymbol{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

(2) $\sum_{k=1}^{50}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{50}(4k^2-4k+1)$
$=4\times\frac{50\times51\times101}{6}-4\times\frac{50\times51}{2}+50$
$=\mathbf{166650}$

6 (1) $a_n=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}$ より
$a_n+a_{n+1}+\cdots\cdots+a_{2n-1}=\boldsymbol{\frac{1}{n}}$

(2) $2\left(1-\frac{1}{13}\right)=\frac{24}{13}$ よって **13**

7 (1) $n\geqq2$ のとき，$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-k-1)$
$=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}-\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)$
$=\frac{1}{3}(n-1)(n+1)(n-3)$ ……①
①で，$a_1=0$ より，$n=1$ のときも成り立つ。
よって，$n\geqq1$ のとき，
$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{3}(n-1)(n+1)(n-3)}$

(2) $a_{n+1}-1=3(a_n-1)$ より
$\{a_n-1\}$ は公比 3，初項 1 の等比数列となる。
$\boldsymbol{a_n=3^{n-1}+1}$

【p. 25】

8 (1) $1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31$ ……$\{a_n\}$
$2\quad 4\quad 8\quad 16$ ……$\{b_n\}$
階差数列は $b_n=2^n$ より，$n\geqq2$ のとき
$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=\boldsymbol{2^n-1}$
$(n\geqq1)$

(2) $\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n=\boldsymbol{2^{n+1}-n-2}$

9 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ より，
$a_{n+1}=(n+1-a_{n+1})-(n-a_n)$
よって，$2a_{n+1}=a_n+1$ ……①
①を変形すると，$a_{n+1}-1=\frac{1}{2}(a_n-1)$ ……②
ここで，$S_1=1-a_1=a_1$ より，$a_1=\frac{1}{2}$
②より，$\{a_n-1\}$は，初項 $\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$，
公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから，
$a_n-1=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{1}{2^n}$
したがって，$\boldsymbol{a_n=-\frac{1}{2^n}+1}$

10 (1) $x_{n+2}-x_{n+1}=2(x_{n+1}-x_n)$ となるので
$y_{n+2}=2y_{n+1}$，$y_1=1$
$\{y_n\}$は公比 2，初項 1 の等比数列である。
$\boldsymbol{y_n=2^{n-1}}$

(2) $x_{n+1}-x_n=2^n$ より，階差数列は等比数列である。$\boldsymbol{x_n}=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=3+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=\boldsymbol{2^n+1}$

11 ア $a_{n+1}=a_n=a_1$ とおく。$a_1=\frac{a_1}{2a_1+3}$
分母を払って整理すると，$a_1{}^2+a_1=0$
$a_1(a_1+1)=0$ よって，$a_1=\mathbf{0,\ -1}$
イ $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+3}{a_n}$ より，$\frac{1}{a_{n+1}}=2+\frac{3}{a_n}$
$b_{n+1}=2+3b_n$，$\boldsymbol{b_{n+1}+1=3(b_n+1)}$
ウ $b_n+1=(b_1+1)\cdot3^{n-1}=2\cdot3^{n-1}$
$b_n=2\cdot3^{n-1}-1$ よって，$a_n=\boldsymbol{\frac{1}{2\cdot3^{n-1}-1}}$
エ $\sum_{k=1}^{100}b_k=\sum_{k=1}^{100}(2\cdot3^{k-1}-1)=2\sum_{k=1}^{100}3^{k-1}-\sum_{k=1}^{100}1$
$=2\times\frac{3^{100}-1}{3-1}-100=\mathbf{3^{100}-101}$

12 (1)
$$\begin{array}{rl} & x_{n+1}=5x_n-2y_n \\ -) & 2y_{n+1}=2x_n+4y_n \\ \hline & x_{n+1}-2y_{n+1}=3(x_n-2y_n) \end{array}$$
$\{x_n-2y_n\}$は，公比 3，初項 $x_1-2y_1=3$ の等比数列である。$x_n-2y_n=3\cdot3^{n-1}=\mathbf{3^n}$ ……①

(2) $x_{n+1}=5x_n-2y_n$
$y_{n+1}=x_n+2y_n$
辺々引いて，$x_{n+1}-y_{n+1}=4(x_n-y_n)$
$\{x_n-y_n\}$は公比 4，初項 $x_1-y_1=2$ の等比数列だから，$x_n-y_n=2\cdot4^{n-1}$ ……②
②×2−① より $\boldsymbol{x_n=4^n-3^n}$

(3) ②より $y_n=4^n-3^n-2\cdot4^{n-1}$
$=4^{n-1}(4-2)-3^n=2\cdot4^{n-1}-3^n$
$\sum_{k=1}^{n}(2\cdot4^{k-1}-3^k)=\frac{2(4^n-1)}{4-1}-\frac{3(3^n-1)}{3-1}$
$=\frac{2}{3}\cdot4^n-\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\cdot3^n+\frac{3}{2}=\boldsymbol{\frac{2}{3}\cdot4^n-\frac{3^{n+1}}{2}+\frac{5}{6}}$

13 (1) Ⅰ．$n=1$ のとき，左辺$=1-x$，
右辺$=1-x$ となるので，成り立つ。
Ⅱ．$n=k$ のとき
$(1-x)(1+2x+3x^2+\cdots\cdots+kx^{k-1})$
$=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{k-1}-kx^k$ ……①
が成り立つと仮定すると，
$n=k+1$ のとき，
$(1-x)\{1+2x+3x^2+\cdots\cdots+kx^{k-1}+(k+1)x^k\}$
$=(1-x)\{1+2x+3x^2+\cdots\cdots+kx^{k-1}\}$

$+(1-x)(k+1)x^k$
$=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{k-1}-kx^k$
$+(1-x)(k+1)x^k$
$=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{k-1}+x^k-(k+1)x^{k+1}$
となり，$n=k+1$ のときも成り立つ。
よって，Ⅰ，Ⅱより，すべての自然数 n で成り立つ。

(2) (1)より
$(1-x)\{1+2x+3x^2+\cdots\cdots+(n+1)x^n\}$
$=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n-(n+1)x^{n+1}$
これに $x=2$ を代入すると
$-\{1+2\cdot2+3\cdot2^2+\cdots\cdots+(n+1)\cdot2^n\}$
$=1+2+2^2+\cdots\cdots+2^n-(n+1)2^{n+1}$ だから
$2\cdot2+3\cdot2^2+\cdots\cdots+(n+1)\cdot2^n$
$=(n+1)2^{n+1}-(1+2+2^2+\cdots\cdots+2^n)-1$
$=(n+1)2^{n+1}-\dfrac{2^{n+1}-1}{2-1}-1$
$=\boldsymbol{n\cdot2^{n+1}}$ となる。

14 Ⅰ．$n=1$ のとき　左辺$=2^2=4$
右辺$=1^2+1+1=3$　左辺>右辺 で成り立つ。
Ⅱ．$n=k$ のとき，$2^{k+1}>k^2+k+1$ が成り立つと仮定すると，
$n=k+1$ のとき，$2^{k+2}=2^{k+1}\cdot2$ だから，
仮定した式の両辺に 2 をかける。
$2^{k+1}\cdot2>2(k^2+k+1)$
次に，$2(k^2+k+1)-\{(k+1)^2+(k+1)+1\}$
$=k^2-k-1=k(k-1)-1$
$k\geqq2$ では，$k(k-1)-1>0$ となるので，
$2^{k+2}>2(k^2+k+1)>(k+1)^2+(k+1)+1$ となり，$n=k+1$ のときも成り立つ。
よって，Ⅰ，Ⅱより，すべての自然数 n で成り立つ。

第2章 統計的な推測

【p. 26】 ❶ 確率変数と確率分布

1 (1)

X	0	1	2	計
P	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

(2)

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

(3)

X	1	2	3	計
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

2 (1)

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	1

(2)

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$	1

(3) 2個一致するときは，すべて一致する場合になるので $X=2$ は不要

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$	1

3 (1)

X	0	100	1000	5000	計
P	$\frac{888}{1000}$	$\frac{100}{1000}$	$\frac{10}{1000}$	$\frac{2}{1000}$	1

(2)

X	1	2	3	4	5	6	7	計
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

【p. 27】

4 類題　カードの入り方は，${}_4P_4=24$(通り)。
$X=4$ のとき，$P(X=4)=\dfrac{1}{24}$
$X=3$ のときはない。
$X=2$ のとき，2つが一致し，残りが異なるので，一致する2つの選び方は ${}_4C_2$ 通りより，
$P(X=2)=\dfrac{6}{24}=\dfrac{1}{4}$
$X=1$ のとき，一致する番号は4通り。残りのカードの入れ方は2通り。よって，$4\times2=8$
$P(X=1)=\dfrac{8}{24}=\dfrac{1}{3}$
$X=0$ のとき，今までの余事象を考えればよいので，
$P(X=0)=1-\left(\dfrac{1}{24}+\dfrac{6}{24}+\dfrac{8}{24}\right)=\dfrac{3}{8}$
よって，確率分布は下記の通り。

X	0	1	2	3	4	計
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{24}$	1

5 すべての場合は ${}_8C_3=56$(通り)。

$X=0$ のとき，$P(X=0)=0$ になり，$X=k$ のとき，

$P(X=k)=\dfrac{{}_6C_k\times{}_2C_{3-k}}{{}_8C_3}$　$(k=1,\ 2,\ 3)$

よって，$k=1,\ 2,\ 3$ をそれぞれ代入して確率分布を求めると，

X	0	1	2	3	計
P	0	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{14}$	1

6　一般に，$X=k$ のときを求めると，

$P(X=k)=\left(\dfrac{k}{6}\right)^2-\left(\dfrac{k-1}{6}\right)^2=\dfrac{2k-1}{36}$ より，k に 1 から 6 を代入して，確率分布を求める。

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

7　$X=1$ のとき，$P(X=1)=\dfrac{1}{6}$

$X=2$ のとき，2 回の出た目の数の和が 6 の倍数となるのは $(1,\ 5)(2,\ 4)(3,\ 3)(4,\ 2)(5,\ 1)$ の 5 通りより，

$P(X=2)=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{36}$

$X=3$ のとき，1，2 回の目の数の和が 6 の倍数にならないのは $5\times5=25$(通り) より，

$P(X=3)=\left(\dfrac{5}{6}\right)^2\cdot\dfrac{1}{6}$

$X=n$ のとき，(1 回目)＋(2 回目)＋……＋(n 回目)が 6 の倍数となる目が出るのは，

$P(X=n)=\dfrac{5}{6}\cdots\cdots\dfrac{5}{6}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)=\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{6}$

以上より，

X	1	2	3	…	n	…	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2\frac{1}{6}$	…	$\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}$	…	1

【p. 28】 ❷ 確率変数の期待値と分散

8　(1)

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

(2)　Xの期待値を $E(X)$ とすると，

$E(X)=1\times\dfrac{1}{6}+2\times\dfrac{1}{6}+3\times\dfrac{1}{6}+4\times\dfrac{1}{6}$

$+5\times\dfrac{1}{6}+6\times\dfrac{1}{6}$

$=\mathbf{3.5}$

9　(1)

X	0	100	200	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

よって，期待値 $E(X)$ は，

$E(X)=0\times\dfrac{1}{4}+100\times\dfrac{2}{4}+200\times\dfrac{1}{4}=\mathbf{100}$

(2)　分散 $V(X)$

$=0^2\times\dfrac{1}{4}+100^2\times\dfrac{2}{4}+200^2\times\dfrac{1}{4}-100^2=\mathbf{5000}$

標準偏差 $\sigma(X)=\sqrt{5000}=\mathbf{50\sqrt{2}}$

10　(1)　$X=0$ のとき，$P=\dfrac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{1}{10}$

$X=1$ のとき，$\dfrac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}=\dfrac{6}{10}$

$X=2$ のとき，$\dfrac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{3}{10}$

よって，期待値 $E(X)$ は，

$E(X)=0\times\dfrac{1}{10}+1\times\dfrac{6}{10}+2\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{6}{5}=\mathbf{1.2}$

(2)　分散 $V(X)=0^2\times\dfrac{1}{10}+1^2\times\dfrac{6}{10}+2^2\times\dfrac{3}{10}$

$-\left(\dfrac{6}{5}\right)^2$

$=\mathbf{0.36}$

標準偏差 $\sigma(X)=\sqrt{0.36}=\mathbf{0.6}$

11　$Y=3X+2$ とおくと，

$E(Y)=3E(X)+2$ ……①

期待値 $E(X)=1\times\dfrac{1}{6}+2\times\dfrac{1}{6}+3\times\dfrac{1}{6}+4\times\dfrac{1}{6}$

$+5\times\dfrac{1}{6}+6\times\dfrac{1}{6}=3.5$

これを①に代入

$E(Y)=3\times3.5+2=\mathbf{12.5}$

分散 $V(X)=1^2\times\dfrac{1}{6}+2^2\times\dfrac{1}{6}+3^2\times\dfrac{1}{6}+4^2\times\dfrac{1}{6}$

$+5^2\times\dfrac{1}{6}+6^2\times\dfrac{1}{6}-3.5^2$

$=\dfrac{91}{6}-\left(\dfrac{7}{2}\right)^2=\dfrac{35}{12}$

よって，

分散 $V(Y)=V(3X+2)=3^2V(X)=9\times\dfrac{35}{12}=\dfrac{105}{4}$

$=\mathbf{26.25}$

【p. 29】

12　類題　(1)　確率変数Xの確率 $P(X=k)$ を求めると，

$P(X=0)=\dfrac{{}_5C_3}{{}_8C_3}=\dfrac{5}{28}$，$P(X=1)=\dfrac{{}_3C_1\cdot{}_5C_2}{{}_8C_3}=\dfrac{15}{28}$

$P(X=2)=\dfrac{{}_3C_2\cdot{}_5C_1}{{}_8C_3}=\dfrac{15}{56}$，$P(X=3)=\dfrac{{}_3C_3}{{}_8C_3}=\dfrac{1}{56}$

よって，確率分布は次の通り。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$	1

期待値 $E(X)=0\times\dfrac{5}{28}+1\times\dfrac{15}{28}+2\times\dfrac{15}{56}$

$+3\times\dfrac{1}{56}=\mathbf{\dfrac{9}{8}}$

分散 $V(X)=0^2\times\dfrac{5}{28}+1^2\times\dfrac{15}{28}+2^2\times\dfrac{15}{56}$

$+3^2\times\dfrac{1}{56}-\left(\dfrac{9}{8}\right)^2=\mathbf{\dfrac{225}{448}}$

標準偏差 $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\dfrac{225}{448}}=\mathbf{\dfrac{15\sqrt{7}}{56}}$

(2) 期待値 $E(4X-3)=4E(X)-3$

$$=4\times\frac{9}{8}-3=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

分散 $V(4X-3)=4^2V(X)=16\times\frac{225}{448}=\mathbf{\frac{225}{28}}$

標準偏差 $\sigma(4X-3)=\sqrt{4^2V(X)}=\sqrt{\frac{225}{28}}$

$$=\mathbf{\frac{15\sqrt{7}}{14}}$$

13 期待値 $E(X)=1\times0.1+2\times0.2+3\times0.4$
$+4\times0.3=2.9$

$E(Y)=E(5X-3)=5E(X)-3$
$=5\times2.9-3=\mathbf{11.5}$

分散 $V(X)=1^2\times0.1+2^2\times0.2+3^2\times0.4$
$+4^2\times0.3-2.9^2=9.3-8.41=0.89$

よって，$V(Y)=V(5X-3)=5^2V(X)=25\times0.89$
$=\mathbf{22.25}$

14 $Y=\frac{1}{\sigma}X-\frac{m}{\sigma}$ より，

期待値 $E(Y)=\frac{1}{\sigma}E(X)-\frac{m}{\sigma}=\frac{1}{\sigma}\cdot m-\frac{m}{\sigma}=0$

よって，$\mathbf{E(Y)=0}$

分散 $V(Y)=\frac{1}{\sigma^2}V(X)=\frac{1}{\sigma^2}\cdot\sigma^2=1$

したがって，$\mathbf{V(Y)=1}$

【p. 30】 ❸ 確率変数の和と期待値

15 (1) Xのとりうる値は 0，1 で，

$P(X=0)=\frac{7}{10}$，$P(X=1)=\frac{3}{10}$

$X=1$ のとき，残り 9 本の中に当たりが 3 本，はずれが 6 本あるから，

$P(X=0,\ Y=0)=\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}=\frac{7}{15}$

$P(X=0,\ Y=1)=\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{7}{30}$

$X=1$ のとき，残り 9 本の中に当たりが 2 本，はずれが 7 本あるから，

$P(X=1,\ Y=0)$
$=\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{7}{30}$

$P(X=1,\ Y=1)$
$=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{15}$

よって，同時分布は右のようになる。

X \ Y	0	1	計
0	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{7}{10}$
1	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{10}$
計	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

(2) Xのとりうる値は 0，1 で，

$P(X=0)=\frac{1}{3}$，$P(X=1)=\frac{2}{3}$

$X=0$ のとき，Bは赤球 6 個，白球 2 個の中から 2 個を取り出すから，

$P(X=0,\ Y=0)=\frac{1}{3}\times\frac{{}_2C_2}{{}_8C_2}=\frac{1}{84}$

$P(X=0,\ Y=1)=\frac{1}{3}\times\frac{{}_6C_1\times{}_2C_1}{{}_8C_2}=\frac{1}{7}$

$P(X=0,\ Y=2)=\frac{1}{3}\times\frac{{}_6C_2}{{}_8C_2}=\frac{5}{28}$

$X=1$ のとき，Bは赤球 5 個，白球 3 個の中から 2 個を取り出すから，

$P(X=1,\ Y=0)=\frac{2}{3}\times\frac{{}_3C_2}{{}_8C_2}=\frac{1}{14}$

$P(X=1,\ Y=1)$
$=\frac{2}{3}\times\frac{{}_5C_1\times{}_3C_1}{{}_8C_2}$
$=\frac{5}{14}$

$P(X=1,\ Y=2)$
$=\frac{2}{3}\times\frac{{}_5C_2}{{}_8C_2}=\frac{5}{21}$

X \ Y	0	1	2	計
0	$\frac{1}{84}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{2}{3}$
計	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	1

よって，同時分布は右のようになる。

16 (1) Xの期待値は，

$E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}$
$+6\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$

同様に，$E(Y)=\frac{7}{2}$ であるから，

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=\mathbf{7}$

(2) Xのとりうる値は 0，1，2 で，

期待値 $E(X)=0\times\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}+1\times\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}$
$+2\times\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{4}{5}$

Yのとりうる値は 0，1 で，

$E(Y)=0\times\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}+1\times\frac{{}_1C_1\times{}_3C_1}{{}_4C_2}=\frac{1}{2}$

よって，

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{4}{5}+\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{13}{10}}$

(3) 50円，100円，500円硬貨についての確率変数をそれぞれX，Y，Zとする。
X，Y，Zの期待値は，

$E(X)=0\times\frac{1}{2}+50\times\frac{1}{2}=25$

$E(Y)=0\times\frac{1}{2}+100\times\frac{1}{2}=50$

$E(Z)=0\times\frac{1}{2}+500\times\frac{1}{2}=250$

よって，
$E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)$
$=25+50+250=\mathbf{325}$

17 期待値 $E(X)=\frac{7}{2}$，$E(Y)=\frac{7}{2}$ である。

(1) $E(2X+Y)=2E(X)+E(Y)$
$=2\times\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=\mathbf{\frac{21}{2}}$

(2) $E(4X-3Y)=4E(X)-3E(Y)$
$=4\times\frac{7}{2}-3\times\frac{7}{2}=\mathbf{\frac{7}{2}}$

【p. 31】

18 類題 Xのとりうる値は0，1であり，

$P(X=0)=\dfrac{3}{4}$，$P(X=1)=\dfrac{1}{4}$

$X=0$ のとき

$P(X=0,\ Y=0)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{{}_5C_2}{{}_7C_2}=\dfrac{5}{14}$

$P(X=0,\ Y=1)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{{}_2C_1\times{}_5C_1}{{}_7C_2}=\dfrac{5}{14}$

$P(X=0,\ Y=2)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{{}_2C_2}{{}_7C_2}=\dfrac{1}{28}$

$X=1$ のとき

$P(X=1,\ Y=0)$

$=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{{}_6C_2}{{}_7C_2}=\dfrac{5}{28}$

$P(X=1,\ Y=1)$

$=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{{}_1C_1\times{}_6C_1}{{}_7C_2}=\dfrac{1}{14}$

$P(X=1,\ Y=2)=0$

同時分布は右のようになる。

X \ Y	0	1	2	計
0	$\frac{5}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{3}{4}$
1	$\frac{5}{28}$	$\frac{1}{14}$	0	$\frac{1}{4}$
計	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{28}$	1

$E(X)=0\times\dfrac{3}{4}+1\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$

$E(Y)=0\times\dfrac{5}{28}+1\times\dfrac{3}{7}+2\times\dfrac{1}{28}=\dfrac{1}{2}$ より，

$E(X)+E(Y)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}$

また，$E(X+Y)=0\times\dfrac{5}{14}+1\times\left(\dfrac{5}{14}+\dfrac{5}{28}\right)$

$\qquad+2\times\left(\dfrac{1}{28}+\dfrac{1}{14}\right)=\dfrac{3}{4}$

よって，$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

が成り立ち，$E(X+Y)=\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$

19 Xのとる値は2，1であり，

$P(X=2)=\dfrac{4}{9}$，$P(X=1)=\dfrac{5}{9}$

$X=2$ のとき

2回目に偶数を引く確率は，

$P(X=2,\ Y=3)=\dfrac{4}{9}\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{1}{6}$

2回目に奇数を引く確率は，

$P(X=2,\ Y=2)=\dfrac{4}{9}\times\dfrac{5}{8}=\dfrac{5}{18}$

$X=1$ のとき

2回目に偶数を引く確率は，

$P(X=1,\ Y=3)=\dfrac{5}{9}\times\dfrac{4}{8}=\dfrac{5}{18}$

2回目に奇数を引く確率は，

$P(X=1,\ Y=2)$

$=\dfrac{5}{9}\times\dfrac{4}{8}=\dfrac{5}{18}$

XとYの同時分布は右のようになる。

X \ Y	3	2	計
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}$
1	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{9}$
計	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$	1

期待値 $E(X)=2\times\dfrac{4}{9}+1\times\dfrac{5}{9}=\dfrac{13}{9}$

$E(Y)=3\times\dfrac{4}{9}+2\times\dfrac{5}{9}=\dfrac{22}{9}$

よって，$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\dfrac{13}{9}+\dfrac{22}{9}$

$=\boldsymbol{\dfrac{35}{9}}$

20 1枚目，2枚目，3枚目の絵札の枚数をそれぞれX，Y，Zとする。Xのとりうる値は0，1であり，

$P(X=0)=\dfrac{40}{52}=\dfrac{10}{13}$，$P(X=1)=\dfrac{12}{52}=\dfrac{3}{13}$

よって，期待値 $E(X)=0\times\dfrac{10}{13}+1\times\dfrac{3}{13}=\dfrac{3}{13}$

Y，Zについても，Xと同じ確率分布になり，

期待値 $E(Y)=E(Z)=E(X)$ であるから，

$E(T)=E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)$

$=\dfrac{3}{13}+\dfrac{3}{13}+\dfrac{3}{13}=\boldsymbol{\dfrac{9}{13}}$

21 1枚目のカードの数字をX，2枚目のカードの数字をYとすると，もらえる金額は

$100X+10Y$(円) と表せる。Xのとりうる値は1，2，……，nであり，

$P(X=1)=P(X=2)=\cdots\cdots=P(X=n)=\dfrac{1}{n}$

平均 $E(X)=1\times\dfrac{1}{n}+2\times\dfrac{1}{n}+\cdots\cdots+n\times\dfrac{1}{n}$

$=\dfrac{1}{n}\times\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n+1}{2}$

Yについても，Xと同じ確率分布になる。

よって，もらえる金額の平均について，

$E(100X+10Y)=100E(X)+10E(Y)$

$=100\times\dfrac{n+1}{2}+10\times\dfrac{n+1}{2}=275$

これを解いて，$\boldsymbol{n=4}$

【p. 32】 ❹ 独立な確率変数と期待値・分散

22 (1) $P(A)=\dfrac{13}{52}=\dfrac{1}{4}$，$P(B)=\dfrac{12}{52}=\dfrac{3}{13}$ より，

$P(A)P(B)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{13}=\dfrac{3}{52}$

また，$P(A\cap B)=\dfrac{3}{52}$

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$ が成り立つので，**独立である**。

(2) $P(A)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

目の和が5になるのは，(大，小)の順に，

(1，4)，(2，3)，(3，2)，(4，1)の4通り。

よって，$P(B)=\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$

ゆえに，$P(A)P(B)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{18}$

また，目の和が5になる場合で，大きいさいこ