数学C

数学C

特　色

本書は，学習指導要領をふまえ，各単元の標準的なレベルの問題を，年間を通じてじっくり完全マスターし，あわせて，受験への基礎対策用としても使用できるように編集されています。

数学は体系が整然としている学問ですから，１つの単元を把握するためには，それを構成している基本事項を正確に理解し，さらに，その単元における典型的な問題の解法パターンを習得することが必要です。

そこで本書では，各単元において，基本事項や重要事項を習得するための基本レベルの問題を取り上げ，それらを反復練習することでまず基礎を固め，続いて，単元の内容をより深く理解する上で必須となる標準レベルの問題を精選して，その解き方をパターンとして学ぶことによって，幅広い応用力が定着するようにしました。

構　成

○数学Cで学習する事項を，５章41セクションに分けました。
○各セクションは原則として見開き２ページ構成で，年間計画がたてやすいよう配慮されています。

☆１セクションの構成

（セクション）

学習の要点	言葉による基本事項の説明。 公式や計算法則の例示。
基本問題	新しく学習する内容についての理解度をチェックする。 基本レベルの問題で構成。
例　　題	単元を代表する標準レベルの問題を，解き方のパターンも含めて学習する。
標準問題 発展問題	例題の関連問題を解きながら，応用範囲の広い実戦力の養成をめざす。
章末問題	章全体のまとめと，程度の高い問題で応用力を養う。

もくじ

第1章　平面上のベクトル

1　ベクトル

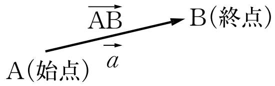
★学習の要点★

❶　**ベクトルの意味**

有向線分について，向きと大きさだけに着目したものを**ベクトル**という。

❷　**ベクトルの表し方**

ベクトルは右の図のように有向線分ABで表され，$\overrightarrow{AB}$，$\vec{a}$ などと書く。ベクトル$\overrightarrow{AB}$で，Aを**始点**，Bを**終点**という。



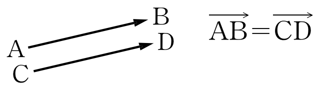
❸　**ベクトルの大きさ**

ベクトル$\overrightarrow{AB}$，$\vec{a}$ の大きさを，それぞれ$|\overrightarrow{AB}|$，$|\vec{a}|$ で表す。

特に，大きさが1であるベクトルを**単位ベクトル**という。

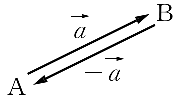
❹　**ベクトルの相等**

大きさが等しく，向きが同じであるベクトルは等しい。



❺　**逆ベクトル**

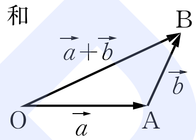
ベクトル$\vec{a}$ と大きさが等しく向きが反対のベクトルを，$\vec{a}$ の**逆ベクトル**といい，$-\vec{a}$ で表す。

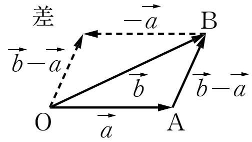


❻　**ベクトルの和・差**

右の図で，和……$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$

差……$\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$



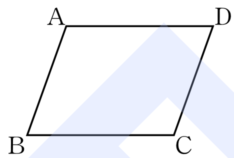


●基本問題●●

1　［**ベクトルの意味**］　右の図の平行四辺形について，次の問いに答えよ。

(1)　Aを始点，Dを終点とするとき，その有向線分をベクトルで表せ。

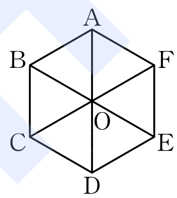
(2)　(1)と大きさの等しいベクトルを求めよ。



2　［**ベクトルの相等**］　右の図の正六角形について，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{AB}$と等しいベクトルを求めよ。

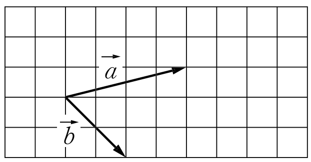
(2)　$\overrightarrow{OD}$の逆ベクトルを求めよ。



3　［**ベクトルの和・差**］　右の図の$\vec{a}$，$\vec{b}$ について，次の問いに答えよ。

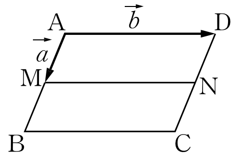
(1)　$\vec{a}+\vec{b}$ を図示せよ。

(2)　$\vec{a}-\vec{b}$ を図示せよ。



例題 ① ベクトルの和と差

右の図の平行四辺形ABCDにおいて，点M，Nはそれぞれ辺AB，DCの中点である。$\overrightarrow{AM}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



(1)　$\overrightarrow{DN}$　　(2)　$\overrightarrow{AN}$　　(3)　$\overrightarrow{MD}$　　(4)　$\overrightarrow{CM}$

着眼点　ベクトルは始点と終点で決まる向きと量である。いかなる経路を通ってもかまわない。

解

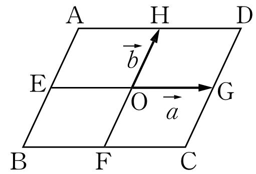
(1)　$\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{AM}=\vec{a}$ ……答

(2)　$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\vec{b}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{b}$ ……答

(3)　$\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AD}=-\vec{a}+\vec{b}$ ……答

(4)　$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{MA}+(-\overrightarrow{AD})=-\vec{a}+(-\vec{b})=-\vec{a}-\vec{b}$ ……答

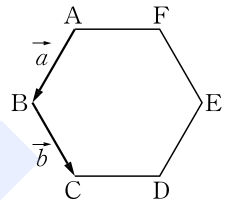
4 **類題**　平行四辺形ABCDの各辺の中点をE，F，G，Hとし，EG，FHの交点をOとする。$\overrightarrow{OG}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OH}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



(1)　$\overrightarrow{EH}$　　(2)　$\overrightarrow{OA}$　　(3)　$\overrightarrow{HG}$　　(4)　$\overrightarrow{GF}$

▶ 標準問題 ◀◀

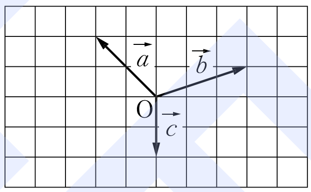
5　右の図は正六角形である。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。



(1)　$\overrightarrow{AC}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{CD}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

6　右の図で，次のベクトルを点Oを始点として作図せよ。



(1)　$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$　　(2)　$\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$

7　次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}=\vec{0}$　　(2)　$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$

◆ 発展問題 ◆◆

8　次のベクトルを簡単にせよ。

(1)　$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$　　(2)　$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BD}$

ヒント　ベクトルの加法，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ を利用する。(2)は，２つの組合せを工夫する。

2　ベクトルの演算

★学習の要点★

❶　ベクトルの加法の基本性質

(1)　交換法則　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$　　(2)　結合法則　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

❷　零ベクトルの性質

(1)　$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$　　(2)　$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$　　(3)　$|\vec{0}|=0$

❸　ベクトルの実数倍の基本性質　(k，l は実数)

(1)　結合法則　$k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$

(2)　分配法則　$(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$　　$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

❹　ベクトルの平行

(1)　平行条件　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}/\!/\vec{b}$　$\Longleftrightarrow$　$\vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k がある。

(2)　$\vec{a}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルは，$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ と $-\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

❺　ベクトルの分解

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ のとき，任意のベクトル $\vec{p}$ は，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ (s，t は実数) の形にただ1通りに表せる。

●基本問題●●

9　[**ベクトルの演算①**]　次の式を計算せよ。

(1)　$2\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{a}+\vec{b}$　　(2)　$2(3\vec{a}-\vec{b})+3(\vec{a}-2\vec{b})$

(3)　$3(\vec{a}-3\vec{b})-2(4\vec{a}-5\vec{b})$　　(4)　$2(3\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c})-(-\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c})$

10　[**ベクトルの演算②**]　次の等式を満たすベクトル $\vec{x}$，$\vec{y}$ を，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

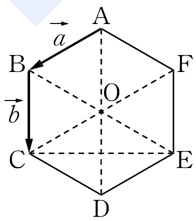
(1)　$\vec{a}+\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}$　　(2)　$2(\vec{a}-\vec{x})=4\vec{a}-3\vec{b}$

(3)　$\begin{cases}\vec{x}+2\vec{y}=\vec{a}\\2\vec{x}-\vec{y}=\vec{b}\end{cases}$　　(4)　$\begin{cases}\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}-\vec{b}\\2\vec{x}-3\vec{y}=\vec{a}+\vec{b}\end{cases}$

11　[**ベクトルの平行**]　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ である2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$2\vec{a}+k\vec{b}$ と $\vec{a}-3\vec{b}$ が平行であるとき，実数 k の値を求めよ。

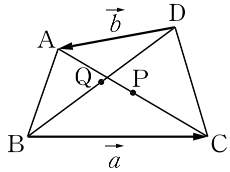
12　[**ベクトルの分解**]　右の図の正六角形ABCDEFにおいて，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ とおくとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(1)　$\overrightarrow{AD}$　　(2)　$\overrightarrow{DE}$　　(3)　$\overrightarrow{AF}$　　(4)　$\overrightarrow{CE}$



例題 2　ベクトルと実数の積

右の図のように，四角形ABCDの対角線AC，BDの中点をそれぞれP，Qとする。$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{DA}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{PQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



着眼点　中点連結定理を利用する。

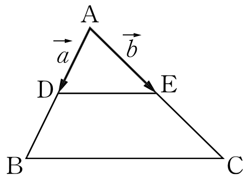
解　ABの中点をMとすると中点連結定理より，

MP∥BC，$MP=\frac{1}{2}BC$，MQ∥AD，$MQ=\frac{1}{2}AD$

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{MQ}-\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$ ……**答**

13　**類題**　△ABCの辺AB，ACの中点をそれぞれD，Eとし，$\overrightarrow{AD}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

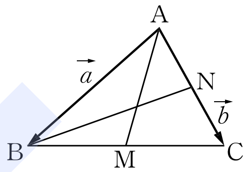
(1)　$\overrightarrow{DE}$　　(2)　$\overrightarrow{CB}$　　(3)　$\overrightarrow{BA}$　　(4)　$\overrightarrow{BE}$



▶ 標準問題 ◀◀

14　△ABCの辺BC，CAの中点をそれぞれM，Nとし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

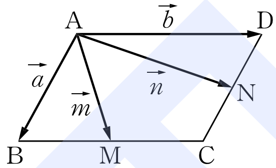
(1)　$\overrightarrow{BC}$　　(2)　$\overrightarrow{AM}$　　(3)　$\overrightarrow{BN}$



15　平行四辺形ABCDの辺BC，CDの中点をそれぞれM，Nとし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AM}=\vec{m}$，$\overrightarrow{AN}=\vec{n}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\vec{m}$，$\vec{n}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2)　$\vec{a}$，$\vec{b}$ を $\vec{m}$，$\vec{n}$ で表せ。

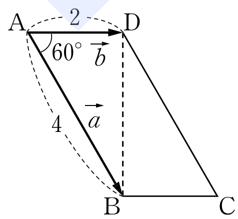


◆ 発展問題 ◆◆

16　平行四辺形ABCDにおいて，AB＝4，AD＝2，∠BAD＝60°で，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{BD}$ と向きが同じで大きさ1のベクトルを求めよ。

(2)　ベクトル $\vec{a}+\vec{b}$ の大きさを求めよ。



ヒント　(2)　三平方の定理を利用する。

第 2 章　空間のベクトル

1　空間のベクトル

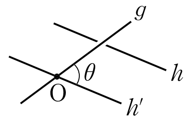
★学習の要点★

❶　空間のベクトル

空間内の有向線分について，向きと大きさだけに着目したものを空間のベクトルという。空間のベクトルについての定義や法則などは，平面のベクトルの場合と同様である。

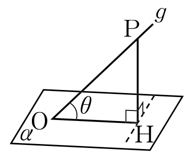
❷　空間における直線・平面のなす角

(1)　ねじれの位置にある 2 直線のなす角



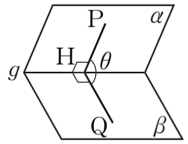
直線 g 上の 1 点 O を通り，直線 h に平行な直線 h' を引くとき，g と h' のなす角 θ を **2 直線 g と h のなす角**という。

(2)　交わる直線と平面のなす角



直線 g と平面 α の交点を O とする。g 上の点 P から平面 α に垂線 PH を引くとき，∠POH を**直線 g と平面 α のなす角**という。

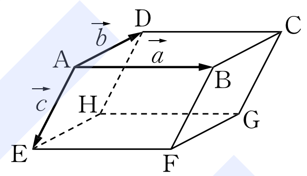
(3)　交わる 2 平面のなす角



交線 g 上に点 H をとり，平面 α 内で PH⊥g，平面 β 内で QH⊥g とするとき，∠PHQ を **2 平面 α と β のなす角**という。

● 基本問題 ●●

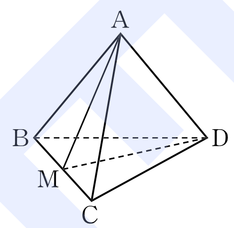
1　［**ベクトルの演算**］　右の図の平行六面体について，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とおくとき，次の問いに答えよ。



(1)　$\overrightarrow{AC}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2)　$\overrightarrow{AG}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

2　［**なす角①**］　右の図の正四面体について，次の問いに答えよ。

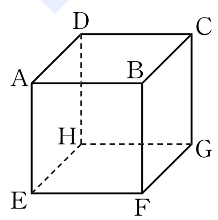


(1)　BC の中点を M とするとき，AM と BC のなす角を求めよ。

(2)　BC と AD のなす角を求めよ。

(3)　BC と平面 AMD のなす角を求めよ。

3　［**なす角②**］　右の図の立方体について，次の問いに答えよ。



(1)　平面 AEHD と平面 AEGC のなす角を求めよ。

(2)　AF と平面 EFGH のなす角を求めよ。

例題 ① 2平面のなす角

四面体A–BCDにおいて，AB＝AC＝AD＝bで，底面BCDは1辺の長さaの正三角形である。側面と底面のなす角をθとして$\cos\theta$の値を求めよ。

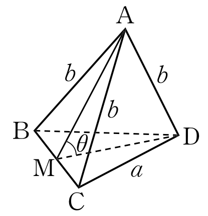
着眼点　辺BCの中点をMとすると，∠AMDが求めるなす角θである。△AMDに余弦定理を利用する。

解　辺BCの中点をMとすると，△ABCは二等辺三角形より，AM⊥BC
また，△DBCは正三角形だから，DM⊥BC
よって，∠AMDが側面と底面のなす角になる。

MA$=\sqrt{b^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$，MD$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，AD$=b$だから，

△AMDに余弦定理を用いて，$b^2=\left(b^2-\dfrac{a^2}{4}\right)+\dfrac{3}{4}a^2-2\sqrt{b^2-\dfrac{a^2}{4}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\cos\theta$

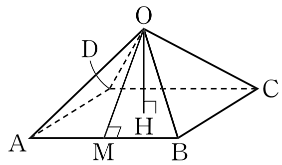
これより，$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{3}\sqrt{4b^2-a^2}}$ ……答



4　類題　正四角すいO–ABCDの側面は底辺の長さが2，等辺の長さが$\sqrt{3}$の二等辺三角形である。OからABに垂線OM，底面ABCDに垂線OHを引くとき，次の問いに答えよ。

(1)　OM，MHの長さを求めよ。

(2)　側面と底面のなす角を求めよ。

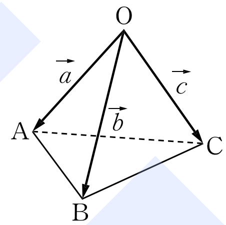


▶ 標準問題 ◀◀

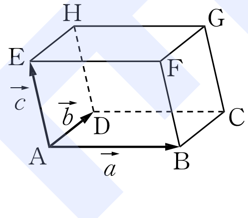
5　四面体O–ABCで，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$で表せ。

(2)　$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CA}$が成り立つことを示せ。



6　右の図の平行六面体について，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$とするとき，$\overrightarrow{AG}$，$\overrightarrow{BH}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。



◆ 発展問題 ◆◆

7　**6**の図において，次の等式が成り立つことを示せ。

(1)　$\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{CE}$　　(2)　$3\overrightarrow{BH}+2\overrightarrow{DF}=2\overrightarrow{AG}+3\overrightarrow{CE}+2\overrightarrow{BC}$

ヒント　(1)，(2)とも各ベクトルを$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$で表す。

2　空間の座標

★学習の要点★

❶ **空間座標**

点Pの座標……$P(a,\ b,\ c)$　　a，b，c をそれぞれ点Pの **x 座標**，**y 座標**，**z 座標**という。

❷ **２点間の距離**

$A(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$B(x_2,\ y_2,\ z_2)$とすると，

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

❸ **分点の公式**

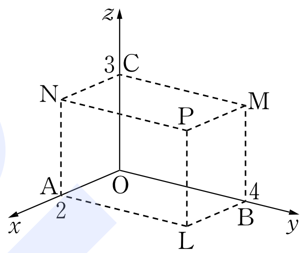
$A(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$B(x_2,\ y_2,\ z_2)$のとき，

ABを $m:n$ に内分する点の座標は，$\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \dfrac{ny_1+my_2}{m+n},\ \dfrac{nz_1+mz_2}{m+n}\right)$

ABの中点Mの座標は，$M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2},\ \dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$

●基本問題●●

8　［**点の座標**］　右の図で，立体OALB–CNPMは直方体である。次の問いに答えよ。



(1)　点A，点L，点Pの座標を求めよ。

(2)　点Pの xy 平面，yz 平面，zx 平面に関する対称点を求めよ。

(3)　点Pの x 軸，y 軸，z 軸に関する対称点を求めよ。

(4)　点Pの原点に関する対称点を求めよ。

9　［**２点間の距離**］　次の２点間の距離を求めよ。

(1)　$O(0,\ 0,\ 0)$，$A(3,\ 4,\ 5)$　　(2)　$A(4,\ 1,\ 2)$，$B(3,\ 0,\ 5)$

(3)　$A(0,\ 1,\ 3)$，$B(2,\ 3,\ -1)$　　(4)　$A(4,\ -2,\ -1)$，$B(-2,\ 1,\ 3)$

10　［**内分点・外分点**］　２点$A(2,\ 3,\ 4)$，$B(-1,\ 2,\ -3)$について，次の問いに答えよ。

(1)　線分ABを $2:1$ に内分する点の座標を求めよ。

(2)　線分ABを $2:1$ に外分する点の座標を求めよ。

(3)　線分ABの中点の座標を求めよ。

11　［**座標軸に垂直な平面の方程式**］　**8**の図について，次の問いに答えよ。

(1)　xy 平面，yz 平面，zx 平面の方程式を求めよ。

(2)　点Pを通り，x 軸に垂直な平面の方程式を求めよ。

例題 ② 空間座標

平行四辺形ABCDの3つの頂点の座標がA$(1,\ -2,\ 3)$，B$(3,\ 2,\ 1)$，C$(6,\ 4,\ 4)$であるとき，第4の頂点Dの座標を求めよ。

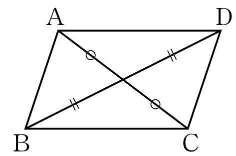
着眼点　平行四辺形の対角線は互いに他を2等分する。

解　平行四辺形だから対角線が互いに他を2等分する。すなわちD$(x,\ y,\ z)$とするとBDの中点とACの中点が一致する。

$\dfrac{3+x}{2}=\dfrac{1+6}{2}$，$\dfrac{2+y}{2}=\dfrac{-2+4}{2}$，$\dfrac{1+z}{2}=\dfrac{3+4}{2}$ から，

$x=7-3=4$，$y=2-2=0$，$z=7-1=6$

よって，D$(4,\ 0,\ 6)$ ……答



12　**類題**　3点A$(1,\ 2,\ 3)$，B$(2,\ 4,\ 6)$，C$(3,\ 3,\ 2)$でできる△ABCの重心の座標を求めよ。

▶ 標準問題 ◀◀

13　次の各点の座標を求めよ。

(1)　xy 平面に関して点$(-2,\ 1,\ 3)$と対称な点

(2)　y 軸に関して点$(1,\ 2,\ 3)$と対称な点

(3)　原点に関して点$(-2,\ 3,\ 0)$と対称な点

(4)　平面 $x=1$ に関して点$(2,\ 3,\ 4)$と対称な点

(5)　点$(1,\ 2,\ 3)$に関して点$(-1,\ 3,\ 6)$と対称な点

14　4点A$(2,\ 2,\ 3)$，B$(1,\ -3,\ 1)$，C$(1,\ 2,\ -1)$，D$(3,\ 4,\ 6)$がある。AB，AC，AD を3辺とする平行六面体の他の頂点の座標を求めよ。

15　2点A$(1,\ 2,\ 3)$，B$(2,\ 3,\ 4)$から等距離にある x 軸上の点Pの座標を求めよ。

◆ 発展問題 ◆◆

16　四面体OABCがある。辺OAの中点をM，辺BCの中点をNとし，辺OCを $p:(1-p)$ $(0<p<1)$ に内分する点をPとする。次の問いに答えよ。

(1)　$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ とするとき，$\overrightarrow{PM}$，$\overrightarrow{PN}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および p を用いて表せ。

(2)　辺ABを $p:(1-p)$ に内分する点をQとして，$\overrightarrow{PQ}=s\overrightarrow{PM}+t\overrightarrow{PN}$ で表されることを証明せよ。

ヒント　(1)　$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}$　　(2)　$\overrightarrow{OQ}=(1-p)\vec{a}+p\vec{b}$ とおける。$m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0}$ なら $m=0$，$n=0$ の利用。

第 3 章　複素数平面

1　複素数平面

★学習の要点★

❶　複素数平面

(1)　複素数 $z=a+bi$ を座標平面上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ で表すとき，この平面を**複素数平面**という。また，この点Pを $\mathbf{P}(z)$ または**点** z と書く。

(2)　x 軸を**実軸**，y 軸を**虚軸**という。

(3)　複素数 z の**共役複素数**を $\overline{z}$ で表す。$z=a+bi$ のとき，$\overline{z}=a-bi$

z が実数　$\Longleftrightarrow$　$\overline{z}=z$

z が純虚数　$\Longleftrightarrow$　$\overline{z}=-z$　　ただし，$z\neq 0$

(4)　複素数 z の**絶対値**を $|z|$ で表す。$z=a+bi$ のとき，$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

❷　複素数の性質

(1)　共役複素数

①　$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$　②　$\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$　③　$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$　④　$\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$

(2)　複素数の絶対値

①　$|z|=|-z|=|\overline{z}|$　②　$z\overline{z}=|z|^2$　③　$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$　④　$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$

❸　複素数の演算　$\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$ とする。

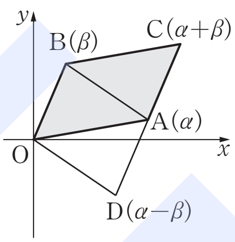
(1)　**複素数の実数倍**　3 点 0，α，β が一直線上にある　$\Longleftrightarrow$　$\beta=k\alpha$ となる実数 k がある

(2)　**複素数の和**　$\alpha+\beta=(a+c)+(b+d)i$

右の図で，四角形OACBは平行四辺形である。

(3)　**複素数の差**　$\alpha-\beta=(a-c)+(b-d)i$

右の図で，四角形ODABは平行四辺形である。



❹　2 点間の距離

2 点 α，β 間の距離は，$|\beta-\alpha|$

● 基本問題 ●●

1　**［複素数平面上の位置］**　複素数平面上に次の複素数を表す点を図示せよ。

(1)　$1+3i$　　(2)　$2-i$　　(3)　$(1+i)^2$

2　**［共役複素数］**　次の複素数の共役複素数を求めよ。

(1)　$(3-2i)+(1+4i)$　　(2)　$(1+i)(2-3i)$

3　**［複素数の絶対値］**　次の複素数の絶対値を求めよ。

(1)　$1+\sqrt{3}\,i$　　(2)　$(2+3i)(\sqrt{3}-i)$

4　**［2 点間の距離］**　次の 2 点間の距離を求めよ。

(1)　i，$2-3i$　　(2)　$3+2i$，$7-5i$

例題 1 共役複素数の性質

複素数 z について，$|z|=1$ のとき，$z+\dfrac{1}{z}$ は実数であることを証明せよ。

着眼点　α が実数 $\iff$ $\overline{\alpha}=\alpha$　が成り立つ。また，$|z|^2=1^2$ より，$z\overline{z}=1$ となる。

証明　$|z|=1$ の両辺を 2 乗すると，$|z|^2=1^2$　　$z\overline{z}=1$ より，$\overline{z}=\dfrac{1}{z}$

よって，$\overline{z+\dfrac{1}{z}}=\overline{z}+\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\overline{z}+\dfrac{1}{\overline{z}}=\dfrac{1}{z}+z=z+\dfrac{1}{z}$

つまり，$z+\dfrac{1}{z}$ は実数である。

5 **類題**　複素数 z について，$|z|=1$ のとき，$z^n+\dfrac{1}{z^n}$ （n は自然数）は実数であることを証明せよ。

▶ 標準問題 ◀◀

6　$|z|=\sqrt{5}$，$z+\overline{z}=2$ のとき，複素数 z を求めよ。

7　$\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(\overline{\alpha}+\dfrac{1}{\overline{\alpha}}\right)=4$ のとき，複素数 α の絶対値 $|\alpha|$ を求めよ。

8　x の n 次方程式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0$ が複素数 α を解にもつとき，共役複素数 $\overline{\alpha}$ もこの方程式の解になることを証明せよ。ただし，a_0，a_1，a_2，……，a_n は実数とする。

9　$\alpha=a+2i$，$\beta=6+3i$ とする。2 点 A(α)，B(β) と原点 O が一直線上にあるとき，実数 a を求めよ。

◆ 発展問題 ◆◆

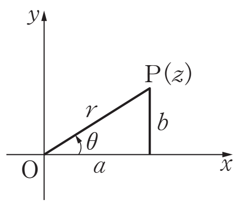
10　複素数 α，β が $|\alpha|=|\beta|=|\alpha-\beta|=1$ を満たすとき，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ を求めよ。

ヒント　$z=\dfrac{\beta}{\alpha}$ とおき，$z+\overline{z}$，$z\overline{z}$ の値を求めて，z を解にもつ 2 次方程式を考える。

2　複素数の極形式

★学習の要点★

❶　複素数の極形式



複素数 $z=a+bi$ を表す点をPとし，OP$=r$，OPが x 軸(実軸)の正の部分となす角を θ とすると，

$$\boldsymbol{z=r(\cos\theta+i\sin\theta)} \qquad r=\sqrt{a^2+b^2}=|z|$$

θ を z の**偏角**といい，$\theta=\mathbf{arg}\,\boldsymbol{z}$ で表す。

$z=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ より，$a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$

注　本書では，とくに指示がなければ，角 θ は弧度法(ラジアン)で表された一般角とする。

❷　極形式の積・商

$\alpha=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$\beta=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ とする。

・**積**　$\alpha\beta=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|=r_1r_2$　　$\arg\alpha\beta=\arg\alpha+\arg\beta=\theta_1+\theta_2$

・**商**　$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$

$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}=\dfrac{r_1}{r_2}$　　$\arg\dfrac{\alpha}{\beta}=\arg\alpha-\arg\beta=\theta_1-\theta_2$

●基本問題●●

11　[**極形式**]　次の複素数を極形式で表せ。

(1)　i　　(2)　$1+i$

(3)　$-\sqrt{3}+i$　　(4)　$-\sqrt{5}$

12　[**絶対値と偏角**]　次の複素数の絶対値，偏角を求めよ。

(1)　$2-2i$　　(2)　$2i$

13　[**極形式の計算①**]　$\alpha=1+\sqrt{3}\,i$，$\beta=1+i$ のとき，$\alpha\beta$ の極形式を求めよ。また，$\alpha\beta$ の絶対値，偏角を求めよ。ただし，偏角は絶対値が最小のものを答えよ。

14　[**極形式の計算②**]　$\alpha=1+\sqrt{3}\,i$，$\beta=1+i$ のとき，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ の極形式を求めよ。また，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ の絶対値，偏角を求めよ。ただし，偏角は絶対値が最小のものを答えよ。

例題 ② 極形式による計算

複素数$z=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$を計算することにより，$\cos 15^\circ$，$\sin 15^\circ$の値を求めよ。

着眼点　zを$a+bi$の形にする。また，$z=\dfrac{\alpha}{\beta}$を極形式で表して，実部と虚部を比べる。

解
$$z=\frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\frac{\sqrt{3}+1}{4}+\frac{\sqrt{3}-1}{4}i\ \cdots\cdots①$$

また，　$1+i=\sqrt{2}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$　　$\sqrt{3}+i=2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)$

よって，$z=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}=\dfrac{\sqrt{2}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)}{2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ)\ \cdots\cdots②$

①，②の実部，虚部を比べて，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos 15^\circ=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$

ゆえに，$\cos 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ……**答**

15　**類題**　複素数$z=(1+i)(1+\sqrt{3}i)$を計算することによって，$\cos 105^\circ$，$\sin 105^\circ$の値を求めよ。

▶ 標準問題 ◀◀

16　次の複素数を極形式で表せ。

(1)　$\sin\theta+i\cos\theta$　　　(2)　$2(\cos\theta-i\sin\theta)$

17　複素数$z=\dfrac{1-\sin\theta+i\cos\theta}{1-\sin\theta-i\cos\theta}$　$\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$について，$z$の絶対値と偏角を求めよ。

18　$\theta=\dfrac{\pi}{12}$のとき，$\dfrac{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)}{\cos 3\theta-i\sin 3\theta}$の値を求めよ。

◆ 発展問題 ◆◆

19　3つの複素数α，β，γの間に$\alpha+i\beta=(1+i)\gamma$の関係があるとき，$\alpha$，$\beta$，$\gamma$はどんな三角形をつくるか。

ヒント　まず$\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}$の絶対値，偏角を求める。$\beta=i\alpha$のとき，$\beta$は$\alpha$を原点の周りに$\dfrac{\pi}{2}$回転させたものである。

第 4 章　平面上の曲線

1　方程式の表す曲線

★学習の要点★

❶ **関数 $y=f(x)$ のグラフ**

関数 $y=f(x)$ のグラフは，変数 x が関数の定義域を動くとき，座標平面上の点$(x,\ f(x))$全体の作る図形である。

❷ **1 次関数 $y=mx+n$ のグラフ**

(1)　m の値が一定で，n の値が変化するとき，傾き m の直線群を表す。

(2)　n の値が一定で，m の値が変化するとき，定点$(0,\ n)$を通る直線群を表す。

❸ **方程式 $F(x,\ y)=0$ の表す曲線**

x，y の方程式 $F(x,\ y)=0$ が与えられたとき，座標平面上で，座標がこの方程式を満たす点 P$(x,\ y)$の軌跡を，この**方程式の表す曲線**，または**曲線 $F(x,\ y)=0$** という。

また，方程式 $F(x,\ y)=0$ を，この**曲線の方程式**という。

❹ **曲線の移動**

方程式 $F(x,\ y)=0$ の表す曲線を，

(1)　直線 $y=x$ に関して対称移動した曲線の方程式は，$F(y,\ x)=0$

(2)　x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した曲線の方程式は，$F(x-p,\ y-q)=0$

● 基本問題 ●●

1　［**関数 $y=f(x)$ のグラフ**］　次の関数について，x と y の対応表を完成させ，関数のグラフ上の点$(x,\ y)$をとってグラフの概形をかけ。

(1)　$y=x+\dfrac{4}{x}$

x	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
y								

(2)　$y=\dfrac{10}{x^2+2x+2}$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y							

2　［**方程式 $F(x,\ y)=0$ の表す曲線**］　次の方程式の表す曲線をかけ。

(1)　$x^2+y^2-8x-6y=0$

(2)　$3x-12=0$

3　［**曲線の移動**］　次の問いに答えよ。

(1)　曲線 $x^2+y=0$ を直線 $y=x$ に関して対称移動した曲線の方程式を求めよ。

(2)　曲線 $x^2+y^2+4x=5$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動した曲線の方程式を求めよ。

例題 1 方程式の表す曲線

2つの円 $x^2+y^2-9=0$ ……①，$x^2+y^2-8x+6y+9=0$ ……② について，次の問いに答えよ。

(1)　2つの円①，②は2点で交わることを示せ。

(2)　2つの円①，②の交点を通る直線の方程式を求めよ。

(3)　2つの円①，②の交点と原点を通る円の方程式を求めよ。

着眼点　2つの曲線 $f(x,\ y)=0$，$g(x,\ y)=0$ の交点を通る曲線は $f(x,\ y)+kg(x,\ y)=0$ と表される。

解　(1)　①を変形すると，$x^2+y^2=9$　　②を変形すると，$(x-4)^2+(y+3)^2=16$

よって，円①の中心は原点$(0,\ 0)$，半径は $r_1=3$

円②の中心は点$(4,\ -3)$，半径は $r_2=4$

中心間の距離は，$d=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$

$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$ が成り立つから，2つの円①，②は2点で交わる。

(2)　①，②の交点を通る図形の方程式は，次のように表される。

$$x^2+y^2-9+k(x^2+y^2-8x+6y+9)=0 \text{ ……③}$$

③の2次の項を消去するために $k=-1$ を代入して，$4x-3y-9=0$ ……答

(3)　③の式に $x=0$，$y=0$ を代入して，$k=1$

これを③に代入して，$x^2+y^2-4x+3y=0$ ……答

4　**類題**　2つの放物線 $y=x^2-2x-3$ ……①，$y=-x^2+1$ ……② について，次の問いに答えよ。

(1)　2つの放物線①，②の交点を通る直線の方程式を求めよ。

(2)　2つの放物線①，②の交点と原点を通る放物線の方程式を求めよ。

▶ 標準問題 ◂◂

5　定数 k が任意の値をとるとき，方程式 $(k+3)x-(2k-1)y+3k-5=0$ は，定点を通る直線群を表す。この定点の座標を求めよ。

6　曲線 $x^2-4x-y=0$ を直線 $y=x$ に関して対称に移動し，更に x 軸方向に2，y 軸方向に1だけ平行移動した曲線の方程式を求めよ。

◆ 発展問題 ◆◆

7　定数 t が任意の値をとるとき，円 $x^2+y^2-2tx+6ty-2y+10t^2-7t+3=0$ の中心Pの軌跡を求めよ。

ヒント　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の形に変形する。$r^2>0$ の条件に注意する。

2　放 物 線

★学習の要点★

❶ **放物線の方程式**　$p \neq 0$ とする。

$y^2=4px$　（x 軸に関して対称）　焦点$(p,\ 0)$，準線 $x=-p$，頂点$(0,\ 0)$

$x^2=4py$　（y 軸に関して対称）　焦点$(0,\ p)$，準線 $y=-p$，頂点$(0,\ 0)$

❷ **放物線の平行移動**　$p \neq 0$ とする。

放物線 $y^2=4px$，$x^2=4py$ を x 軸方向に m，y 軸方向に n だけ平行移動すると，それぞれ，

$(y-n)^2=4p(x-m)$　　$(x-m)^2=4p(y-n)$

❸ **放物線と領域**　$p \neq 0$ とする。

(1)　$y^2>4px \iff$ 放物線の外側　　$y^2<4px \iff$ 放物線の内側

(2)　$x^2>4py \iff$ 放物線の外側　　$x^2<4py \iff$ 放物線の内側

● 基本問題 ●●

8　［**放物線の頂点と軸**］　次の放物線について，頂点の座標，軸の方程式を求めよ。

(1)　$y^2=x$　　(2)　$y^2=6x$　　(3)　$x^2=-16y$

9　［**放物線の焦点と準線**］　次の放物線について，焦点の座標，準線の方程式を求めよ。

(1)　$y^2=8x$　　(2)　$y^2=-12x$　　(3)　$x^2=2y$

10　［**放物線の方程式**］　次の放物線の方程式を求めよ。

(1)　焦点$(-2,\ 0)$，準線 $x=2$　　(2)　焦点$\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$，準線 $y=-\dfrac{1}{4}$

(3)　頂点$(0,\ 0)$，準線 $y=\dfrac{1}{2}$　　(4)　頂点$(0,\ 0)$，焦点$(6,\ 0)$

11　［**放物線の平行移動**］　次の放物線は，原点を頂点とするどんな放物線をどのように平行移動すると得られるか。

(1)　$(y-2)^2=x$　　(2)　$(x+1)^2=-2y$　　(3)　$(y+3)^2=5(x+2)$

12　［**放物線と領域**］　次の不等式で表される領域を図示せよ。

(1)　$y^2>2x$　　(2)　$y^2<\dfrac{1}{4}x$　　(3)　$x^2 \geqq -3y$

例題 2 放物線の方程式の決定

焦点が$(2,\ 3)$，軸が$y=3$で，点$(2,\ 2)$を通る放物線の方程式を求めよ。

着眼点 放物線上の点をP，焦点をF，Pと準線の距離をPHとすると，PF＝PH つまり，$PF^2=PH^2$が成り立つ。

解 放物線上の点を$P(x,\ y)$，焦点を$F(2,\ 3)$とする。
また，準線は軸$y=3$に垂直だから，$x=k$とする。
Pから準線に垂線PHを下ろすと，PF＝PH つまり，$PF^2=PH^2$だから，

$$(x-2)^2+(y-3)^2=(x-k)^2 \quad \cdots\cdots①$$

①に$x=2$，$y=2$を代入して，$k=1,\ 3$
①に$k=1$を代入して，$(y-3)^2=2x-3$
①に$k=3$を代入して，$(y-3)^2=-2x+5$

答 $(y-3)^2=2x-3$，$(y-3)^2=-2x+5$

13 **類題** 焦点が$(-1,\ -2)$，軸が$x=-1$で，点$(1,\ -2)$を通る放物線の方程式を求めよ。

▶ 標準問題 ◀◀

14 焦点が$(1,\ 0)$，軸がx軸で，点$(4,\ 4)$を通り，準線の右側にある放物線の方程式を求めよ。

15 焦点が$(-3,\ -3)$で，準線の方程式が$y=1$である放物線の方程式を求めよ。

16 y軸に平行な直線を軸とし，3点$(0,\ 3)$，$(2,\ 11)$，$(-1,\ 2)$を通る放物線の方程式を求めよ。

17 次の放物線を，x軸方向に3，y軸方向に-2だけ平行移動した放物線の方程式を求めよ。

(1) $y^2=5x$　(2) $3x+2y^2=0$　(3) $x^2+2y=0$

18 次の方程式で表される図形が放物線であることを示せ。また，その焦点の座標と準線の方程式を求めよ。

(1) $y=x^2-2x+2$　(2) $y^2-2y+4x+5=0$

19 放物線$y^2=4x$と焦点を共有し，頂点がこの曲線上にあって，軸がy軸に平行な放物線の方程式を求めよ。

20 次の不等式で表される領域を図示せよ。

(1) $(y+1)^2 \leqq 4(x+1)$　(2) $y>2x^2-8x+3$　(3) $y^2 \geqq 4x$，$x^2 \leqq -8y$

◆ 発展問題 ◆◆

21 点$(4,\ 2)$を焦点として，直線$2x+y=0$を準線とする放物線の方程式を求めよ。

ヒント 放物線上の点を$P(x,\ y)$として，放物線の定義に従って求める。

第 5 章　数学的な表現の工夫―行列

1　行列の加法・減法と実数倍

★学習の要点★

❶ 2×2 行列の和，実数倍

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

$$k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

❷ 行列の計算法則

(1) **交換法則**　$A+B=B+A$　　(2) **結合法則**　$(A+B)+C=A+(B+C)$

(3) $(hk)A=h(kA)$　　(4) $(h+k)A=hA+kA$

(5) $h(A+B)=hA+hB$

●基本問題●●

1　**［行列の意味］**　次の行列は何行何列の行列か，答えよ。また，それぞれの行列の(2,1)成分をいえ。

(1) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 8 & -7 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$　　(3) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

2　**［行列の相等］**　次の等式が成り立つように，a，b，c，d の値を定めよ。

$$\begin{pmatrix} a-1 & -4 \\ b+2 & 2c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & 2d \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

3　**［行列の加減］**　次の計算をせよ。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & -8 & 4 \\ 9 & -1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

4　**［行列の実数倍］**　次の計算をせよ。

(1) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$　　(2) $-2\begin{pmatrix} -6 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

(3) $4\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(4) $5\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

例題 ① 行列の実数倍

$A=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 6 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -2 & 8\end{pmatrix}$ のとき，次の等式を満たす行列 X を求めよ。

$A+X=3(X-B)$

着眼点　まず，X について解いてから，成分を計算する。

解　等式を整理すると $2X=A+3B$, $X=\dfrac{1}{2}(A+3B)$

よって，$X=\dfrac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 6 & 0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2 & 4\\ -2 & 8\end{pmatrix}\right\}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & 8\\ 0 & 24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 12\end{pmatrix}$……答

5 類題　$A=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ のとき，次の等式を満たす行列 X を求めよ。

(1)　$3X-2B=X+4A$　　(2)　$2(X-A)=3(B-2A)$

▶ 標準問題 ◀◀

6　$A=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ のとき，次の行列を求めよ。

(1)　$-(-A)$　　(2)　$O-(A-B)$

(3)　$2A+O-3B$　　(4)　$4(A-B)+2B$

7　$X=\begin{pmatrix}x & x+1\\ y-1 & z+2\end{pmatrix}$ が等式 $2X=3\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}-X$ を満たすとき，x, y, z の値を求めよ。

8　$2\begin{pmatrix}x & 1\\ y & z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}y & z\\ x & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ z & 0\end{pmatrix}$ を満たす定数 x, y, z の値を求めよ。

9　次の各式を満たす行列 X, Y を求めよ。

(1)　$\begin{cases}X+2Y=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\\ Y-3X=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 5 & -4\end{pmatrix}\end{cases}$　　(2)　$\begin{cases}2X-Y=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\\ -3X+2Y=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}\end{cases}$

◆ 発展問題 ◆◆

10　零行列でない 2 次の正方行列 A, B が，互いに他の実数倍でないとき，次の等式を満たす a の値を求めよ。

$(a^2+a)A+(3a^2+4a)B=2A+4B$

ヒント　移項，整理して $kA=lB$ の形にする。$k\neq0$ とすると $A=\dfrac{l}{k}B$ となり，不適である。

2　行列の積

★学習の要点★

❶　行ベクトルと列ベクトルの積

$$(a \quad b)\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=ap+bq, \qquad (a \quad b \quad c)\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}=ap+bq+cr$$

❷　2×2行列の積

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ap+bq & ar+bs \\ cp+dq & cr+ds \end{pmatrix}$$

$l\times m$ 行列 A と $m'\times n$ 行列 B について，$m=m'$ である場合に積 AB が定義される。このときできた積 AB は $l\times n$ 行列になる。

● 基本問題 ●●

11　[行ベクトルと列ベクトルの積]　次の計算をせよ。

(1)　$(-4 \quad 6)\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2)　$(\cos\theta \quad \sin\theta)\begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$

12　[行列の積 ①]　次の計算をせよ。

(1)　$\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

(2)　$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

(3)　$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(4)　$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

13　[行列の積の定義]　次のうち，積が計算可能なものは計算し，そうでないものには×をつけよ。

(1)　$(1 \quad 4)(-2 \quad 1)$

(2)　$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}(-4 \quad 2)$

(3)　$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}(5 \quad 6)$

(4)　$(2 \quad 7)\begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$

14　[行列の積 ②]　$A=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，次の計算をせよ。

(1)　AB　　(2)　BA　　(3)　A^2　　(4)　B^2

例題 2 行列の積

行列 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$ について，$AX=O$ である 2 次の正方行列 X を求めよ。

着眼点　対応する成分を等置して定める。

解　$X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ とすると，$AX=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-c & b-d\\ 2a-2c & 2b-2d\end{pmatrix}$

$AX=O$ より，$a-c=0$，$2a-2c=0$，$b-d=0$，$2b-2d=0$

ゆえに，$a=c$，$b=d$　　よって，　$X=\begin{pmatrix}a & b\\ a & b\end{pmatrix}$　(a，b は任意の実数)……答

15　類題　次の行列 A について，$AX=O$ である 2 次の正方行列 X を求めよ。

(1)　$A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 2 & 3\end{pmatrix}$　　(2)　$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}$

▶ 標準問題 ◀◀

16　次の行列 A について，$AX=XA$ である 2 次の正方行列 X を求めよ。

(1)　$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$　　(2)　$A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

17　次の行列 A，B，C から 2 つを組み合わせたもののうち，積が求められるものをすべて計算せよ。

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & -1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}5\\ 1\end{pmatrix}$$

18　$\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}$ のとき，x，y の値を求めよ。

19　次の等式が成り立つとき，x の値を求めよ。

$$\begin{pmatrix}a & b\\ b & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-1 & x\\ ab & b-1\end{pmatrix}$$

◆ 発展問題 ◆◆

20　行列 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ b & 5\end{pmatrix}$ が等式 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ を満たすように，実数 a，b の値を定めよ。

ヒント　一般に $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$ である。

章末問題

A

1　$A=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$のとき，次の等式を満たす行列$X$を求めよ。

(1)　$2X-B=X+2(A-B)$　　(2)　$A+2B+X=3(A-2B+X)$

2　2つの2×2行列A，Bがあり，$A+B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$，$A-B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$の関係があるとき，次の計算をせよ。

(1)　A^2-B^2　　(2)　AB

3　行列$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ a & -2\end{pmatrix}$が$A^4=A$を満たすとき，$a$の値を求めよ。

4　$A=\begin{pmatrix}a & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$のとき，$A^2-A+E=O$となるように$a$の値を定めよ。また，このとき，$A^{125}$を求めよ。

5　行列$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a & b\\ 2 & -1\end{pmatrix}$と$2\times2$行列$X$とが$AX=B$および$XA=B$を満たしている。このとき，$a$，$b$の値と$X$を求めよ。

6　連立1次方程式$\begin{cases}2x+y=ax\\ x+2y=ay\end{cases}$が$x=y=0$以外の解をもつとき，$a$の値を求めよ。

7　行列$\begin{pmatrix}a & -1\\ 2 & b\end{pmatrix}$の表す1次変換によって，2点A$(1,\ 2)$，B$(-3,\ 0)$がともに直線$x-4y+3=0$上の点に移されるとき，$a$，$b$の値を求めよ。

8　行列$A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$について，$A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6$を計算せよ。

B

9　2×2 型の行列 A が 2 つの条件 $A^2-5A-2E=O$ ……①，$A\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ ……②　を満たしている。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$A\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ を求めよ。

(2)　②と(1)の結果を用いて $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ を求めよ。

(3)　A を求めよ。

10　$X+X^{-1}=\begin{pmatrix}4&1\\0&4\end{pmatrix}$ を満たす行列 X を求めよ。

11　$A=\begin{pmatrix}5&-1\\-1&5\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}1&1\\a&b\end{pmatrix}$ とする。P は逆行列をもつものとするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}4&0\\0&6\end{pmatrix}$ となる実数 a，b の値を求めよ。

(2)　A^n を求めよ。ただし，n は自然数とする。

12　行列 $A=\begin{pmatrix}2a+1&2b+1\\-b&a\end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ。ただし，a，b は $a^2+b^2=1$ を満たす実数とする。

(1)　A は逆行列をもつことを示せ。

(2)　連立 1 次方程式 $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\x+y\end{pmatrix}$ が $x=y=0$ 以外の解をもつとき，A を求めよ。

13　座標平面において，行列 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 f は原点と点の距離を変えないという。

(1)　$\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ となることを示せ。

(2)　合成変換 $f\circ f$ が各点を原点に関して対称な点に移すように，行列 A を定めよ。

ヒント　**9** $A\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=(5A+2E)\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$　**11**(2)$(P^{-1}AP)^n$ を考える。**12** $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 以外の解をもつ条件は $ad-bc=0$　**13**(2)原点に関して対称な点に移す 1 次変換を表す行列は $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

高校ゼミ
Essence

数学C

解答編

第 1 章　平面上のベクトル

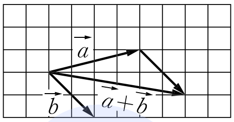
【p. 4】　❶ ベクトル

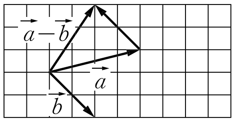
1 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

2 (1) $\overrightarrow{\mathrm{FO}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{ED}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DO}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$

3 (1)　(2)





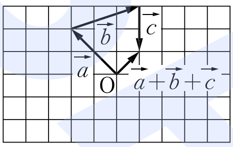
【p. 5】

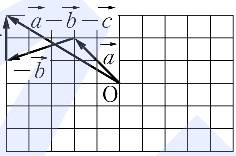
4 類題 (1) $\vec{a}+\vec{b}$　(2) $-\vec{a}+\vec{b}$

(3) $\vec{a}-\vec{b}$　(4) $-\vec{a}-\vec{b}$

5 (1) $\vec{a}+\vec{b}$　(2) $-\vec{a}+\vec{b}$

6 (1)　(2)





7 (1) 左辺$=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+(-\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\vec{0}=$右辺

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{DB}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{0}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}$

8 (1) 与式$=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\boldsymbol{\vec{0}}$

(2) 与式$=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}-(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}})$

$=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\boldsymbol{\vec{0}}$

【p. 6】　❷ ベクトルの演算

9 (1) $-2\vec{a}+4\vec{b}$　(2) $9\vec{a}-8\vec{b}$

(3) $-5\vec{a}+\vec{b}$　(4) $7\vec{a}-4\vec{b}+7\vec{c}$

10 (1) $\vec{x}=\vec{a}-3\vec{b}$　(2) $\vec{x}=-\vec{a}+\dfrac{3}{2}\vec{b}$

(3) $\vec{x}=\dfrac{1}{5}(\vec{a}+2\vec{b})$, $\vec{y}=\dfrac{1}{5}(2\vec{a}-\vec{b})$

(4) $\vec{x}=\dfrac{1}{5}(4\vec{a}-2\vec{b})$, $\vec{y}=\dfrac{1}{5}(\vec{a}-3\vec{b})$

11 $(2\vec{a}+k\vec{b})/\!/(\vec{a}-3\vec{b})$ より，l を実数として，

$2\vec{a}+k\vec{b}=l(\vec{a}-3\vec{b})$ と表せる。

よって，$(2-l)\vec{a}+(k+3l)\vec{b}=\vec{0}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから，

$2-l=0$, $k+3l=0$

したがって，$l=2$, $\boldsymbol{k=-6}$

12 (1) $2\vec{b}$　(2) $-\vec{a}$

(3) $-\vec{a}+\vec{b}$　(4) $-2\vec{a}+\vec{b}$

【p. 7】

13 類題 (1) $\vec{b}-\vec{a}$　(2) $2\vec{a}-2\vec{b}$

(3) $-2\vec{a}$　(4) $\vec{b}-2\vec{a}$

14 (1) $\vec{b}-\vec{a}$　(2) $\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{BN}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\boldsymbol{-\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}}$

15 (1) $\vec{m}=\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$ ……①　$\vec{n}=\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{a}$ ……②

(2) ①×2−② より，$\boldsymbol{\vec{a}=\dfrac{4}{3}\vec{m}-\dfrac{2}{3}\vec{n}}$

①−②×2 より，$\boldsymbol{\vec{b}=-\dfrac{2}{3}\vec{m}+\dfrac{4}{3}\vec{n}}$

16 (1) $\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$

△ABDで，$\mathrm{BD}=2\sqrt{3}$ より，

$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|}=\dfrac{\vec{b}-\vec{a}}{2\sqrt{3}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{6}(\vec{b}-\vec{a})}$

(2) $|\vec{a}+\vec{b}|=\mathrm{AC}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+4^2}=\boldsymbol{2\sqrt{7}}$

【p. 8】　❸ ベクトルの成分

17 (1) $-4\vec{e_1}+5\vec{e_2}$, $(-4,\ 5)$

(2) $9\vec{e_1}+\vec{e_2}$, $(9,\ 1)$

(3) $2\vec{e_1}-13\vec{e_2}$, $(2,\ -13)$

18 (1) $2\sqrt{10}$　(2) $2\sqrt{5}$　(3) $\sqrt{130}$

19 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ 2)$, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{5}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(6,\ -5)$, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{61}$

20 (1) $(-6,\ -4)$　(2) $(-3,\ -19)$

21 (1) $\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$　(2) $\left(-\dfrac{11}{4},\ \dfrac{9}{4}\right)$

【p. 9】

22 類題 $\vec{c}=(2+4t,\ -1+2t)$

$|\vec{c}|=\sqrt{20t^2+12t+5}=\sqrt{20\left(t+\dfrac{3}{10}\right)^2+\dfrac{16}{5}}$

$\boldsymbol{t=-\dfrac{3}{10}}$ **のとき，最小値** $\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{5}}{5}}$

23 (1) $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{c}\neq\vec{0}$ であるから，$\vec{a}/\!/\vec{c}$ のとき

$k\vec{a}=\vec{c}$ (k は実数)とおける。

よって，$(2k,\ -3k)=(x,\ x-2)$ より，

$k=\dfrac{2}{5}$, $\boldsymbol{x=\dfrac{4}{5}}$

(2) $(-4,\ 13)=(2m+n,\ -3m+2n)$ より，

$m=-3$, $n=2$

よって，$\boldsymbol{\vec{d}=-3\vec{a}+2\vec{b}}$

24 (1) $2\vec{a}-\vec{b}=2(1,\ -2)-(-1,\ 4)=(3,\ -8)$

$\dfrac{(3,\ -8)}{\sqrt{3^2+(-8)^2}}=\dfrac{(3,\ -8)}{\sqrt{73}}=\boldsymbol{\left(\dfrac{3}{\sqrt{73}},\ -\dfrac{8}{\sqrt{73}}\right)}$

(2) $\sqrt{5^2+(-2)^2}=\boldsymbol{\sqrt{29}}$

(3) $\vec{b}+p\vec{c}=(-1+2p,\ 4-3p)$

$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}+p\vec{c}\neq\vec{0}$ であるから，$k\vec{a}=\vec{b}+p\vec{c}$ (k は実数)とおける。

よって，$(k,\ -2k)=(-1+2p,\ 4-3p)$ より，

$k=-5$, $\boldsymbol{p=-2}$

(4) $\vec{a}+t\vec{b}=(1-t,\ -2+4t)$

$|\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{(1-t)^2+(-2+4t)^2}$

$=\sqrt{17\left(t-\dfrac{9}{17}\right)^2+\dfrac{4}{17}}$

第 2 章　空間のベクトル

【p. 24】 ❶ 空間のベクトル

1 (1) $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$　(2) $\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

2 (1) AM⊥BC より，∠AMB＝**90°**

(2) 面AMD上のADは，AD⊥BC より，**90°**

(3) BC は 2 直線MA，MD に垂直になるから，平面AMDに垂直より，**90°**

3 (1) 2 平面はAE を共有し，AE⊥AD，AE⊥AC，∠DAC＝45°

よって，2 平面のなす角は**45°**

(2) Aから平面EFGHへの垂線はAE，AF とFE のなす角は45°だから直線と平面のなす角は**45°**

【p. 25】

4 類題 (1) $\mathbf{OM}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{AM}^2}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$，$\mathbf{MH}=\mathrm{AM}=\mathbf{1}$

(2) $\cos\angle\mathrm{OMH}=\dfrac{\mathrm{MH}}{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，なす角は**45°**

5 (1) $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$，$\overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CB}=\vec{a}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CA}=\vec{b}+\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\vec{b}+\vec{a}-\vec{c}$

ゆえに，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CA}$

6 $\boldsymbol{\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}$，$\boldsymbol{\overrightarrow{BH}}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}$

7 (1) $\overrightarrow{DF}=-\vec{b}+\vec{a}+\vec{c}$，$\overrightarrow{CE}=-\vec{b}-\vec{a}+\vec{c}$ より，

$\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{CE}=-\vec{b}+\vec{a}+\vec{c}-(-\vec{b}-\vec{a}+\vec{c})=2\vec{a}$

$\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{BH}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=2\vec{a}$

ゆえに，$\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{CE}$

(2) $3\overrightarrow{BH}+2\overrightarrow{DF}=3(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+2(-\vec{b}+\vec{a}+\vec{c})$

$=-\vec{a}+\vec{b}+5\vec{c}$

$2\overrightarrow{AG}+3\overrightarrow{CE}+2\overrightarrow{BC}$

$=2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+3(-\vec{b}-\vec{a}+\vec{c})+2\vec{b}$

$=-\vec{a}+\vec{b}+5\vec{c}$

ゆえに，$3\overrightarrow{BH}+2\overrightarrow{DF}=2\overrightarrow{AG}+3\overrightarrow{CE}+2\overrightarrow{BC}$

【p. 26】 ❷ 空間の座標

8 (1) A(2，0，0)，L(2，4，0)，P(2，4，3)

(2) 求める対称点をそれぞれP_{xy}，P_{yz}，P_{zx}とすると

$\mathbf{P}_{xy}$**(2，4，−3)**，$\mathbf{P}_{yz}$**(−2，4，3)**，

$\mathbf{P}_{zx}$**(2，−4，3)**

(3) 求める対称点をそれぞれP_x，P_y，P_zとすると，

$\mathbf{P}_x$**(2，−4，−3)**，$\mathbf{P}_y$**(−2，4，−3)**，

$\mathbf{P}_z$**(−2，−4，3)**

(4) (−2，−4，−3)

9 (1) $5\sqrt{2}$　(2) $\sqrt{11}$　(3) $2\sqrt{6}$

(4) $\sqrt{61}$

10 (1) $\left(0,\ \dfrac{7}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$　(2) (−4，1，−10)

(3) $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

11 (1) それぞれ，$z=0$，$x=0$，$y=0$

(2) $x=2$

【p. 27】

12 類題 $\left(\dfrac{1+2+3}{3},\ \dfrac{2+4+3}{3},\ \dfrac{3+6+2}{3}\right)$

$=\left(\mathbf{2},\ \mathbf{3},\ \boldsymbol{\dfrac{11}{3}}\right)$

13 (1) (−2，1，−3)　(2) (−1，2，−3)

(3) (2，−3，0)　(4) (0，3，4)

(5) (3，1，0)

14 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(-2,\ -5,\ -6)$

よって，$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=(0,\ -3,\ -3)$

したがって，**E(0，−3，−3)**

同様にして，**F(2，−1，4)**，**G(1，−1，0)**

H(2，4，2)

15 P$(x,\ 0,\ 0)$とおくと，AP＝BP より，

$(x-1)^2+4+9=(x-2)^2+9+16$

$x=\dfrac{15}{2}$　よって，$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\dfrac{15}{2}},\ \mathbf{0},\ \mathbf{0}\right)$

16 (1) $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$，$\overrightarrow{OP}=p\vec{c}$

$\boldsymbol{\overrightarrow{PM}}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\vec{a}-p\vec{c}}$

$\boldsymbol{\overrightarrow{PN}}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\vec{b}+\left(\dfrac{1}{2}-p\right)\vec{c}}$

(2) $\overrightarrow{OQ}=(1-p)\vec{a}+p\vec{b}$ から

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(1-p)\vec{a}+p\vec{b}-p\vec{c}$

また，$s\overrightarrow{PM}+t\overrightarrow{PN}$

$=\dfrac{s}{2}\vec{a}-sp\vec{c}+\dfrac{t}{2}\vec{b}+t\left(\dfrac{1}{2}-p\right)\vec{c}$

$=\dfrac{s}{2}\vec{a}+\dfrac{t}{2}\vec{b}+\left(-sp+\dfrac{t}{2}-pt\right)\vec{c}$

$1-p=\dfrac{s}{2}$，$p=\dfrac{t}{2}$ として，

$-sp+\dfrac{t}{2}-pt=-2p(1-p)+p-2p^2=-p$

よって，$s=2(1-p)$，$t=2p$ とおけば，

$\overrightarrow{PQ}=s\overrightarrow{PM}+t\overrightarrow{PN}$ とおける。

【p. 28】 ❸ 空間ベクトルの成分

17 (1) (−7，3，1)　(2) $\overrightarrow{AB}=-7\vec{e_1}+3\vec{e_2}+\vec{e_3}$

18 (1) $\sqrt{5}$　(2) $\sqrt{42}$

19 (1) (2，1，2)　(2) (6，13，−9)

(3) (−2，−7，7)　(4) (2，7，−7)

20 $\vec{b}=k\vec{a}$ より，$\boldsymbol{x=-4}$，$\boldsymbol{y=8}$

【p. 29】

21 類題 $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ とおいて，

$\boldsymbol{x=\dfrac{2}{3}}$，$\boldsymbol{y=-4}$

22 (1) $\sqrt{29}$　(2) (3，−7，−3)

(3) $\sqrt{78}$　(4) (−9，8，15)

23 (1) $\vec{b}=k\vec{a}$ より，$(x,\ y,\ z)=k(1,\ 2,\ 3)$

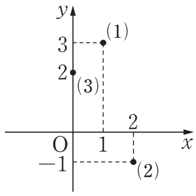
$|\vec{b}|=\sqrt{7}$ より，$k^2+(2k)^2+(3k)^2=14k^2=7$

$k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

第 3 章　複素数平面

【p. 40】 ❶ 複素数平面

1 (3)　$(1+i)^2=1+2i+i^2=1+2i-1=2i$



2 (1)　$z=4+2i$ より，$\bar{z}=\mathbf{4-2i}$

(2)　$z=2-3i^2-i=5-i$ より，$\bar{z}=\mathbf{5+i}$

3 (1)　$|1+\sqrt{3}i|=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}=\mathbf{2}$

(2)　$|(2+3i)(\sqrt{3}-i)|=|2+3i||\sqrt{3}-i|$
$=\sqrt{2^2+3^2}\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\mathbf{2\sqrt{13}}$

4 (1)　$\sqrt{(2-0)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{20}=\mathbf{2\sqrt{5}}$

(2)　$\sqrt{(7-3)^2+(-5-2)^2}=\mathbf{\sqrt{65}}$

【p. 41】

5 類題　$|z|^2=1^2$ より，$z\bar{z}=1$　　$\bar{z}=\dfrac{1}{z}$

$\overline{z^n+\dfrac{1}{z^n}}=\overline{z^n}+\dfrac{1}{\overline{z^n}}=(\bar{z})^n+\dfrac{1}{(\bar{z})^n}=\dfrac{1}{z^n}+z^n$
$=z^n+\dfrac{1}{z^n}$

よって，$z^n+\dfrac{1}{z^n}$ は実数である。

6 $z=a+bi$ とすると，$\bar{z}=a-bi$
$z+\bar{z}=2$ より，$2a=2$　　$a=1$
$|z|^2=(\sqrt{5})^2$　　$a^2+b^2=5$　　$b^2=4$　　$b=\pm 2$
よって，$\mathbf{z=1\pm 2i}$

7 $\alpha\bar{\alpha}+1+1+\dfrac{1}{\alpha\bar{\alpha}}=4$　　$|\alpha|^2-2+\dfrac{1}{|\alpha|^2}=0$

$\left(|\alpha|-\dfrac{1}{|\alpha|}\right)^2=0$　　$|\alpha|-\dfrac{1}{|\alpha|}=0$　　$|\alpha|^2=1$

$|\alpha|\geqq 0$ より，$\mathbf{|\alpha|=1}$

8 α は方程式の解だから，
$a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+a_2\alpha^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0$
$\overline{a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+a_2\alpha^{n-2}+\cdots\cdots+a_n}=\bar{0}$
$a_0(\bar{\alpha})^n+a_1(\bar{\alpha})^{n-1}+a_2(\bar{\alpha})^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0$
よって，共役複素数 $\bar{\alpha}$ も解である。

9 $\beta=k\alpha$ より，$6+3i=k(a+2i)$

$6=ka$，$3=2k$ を解いて，$k=\dfrac{3}{2}$，$\mathbf{a=4}$

10 $|\alpha|^2=|\beta|^2=|\alpha-\beta|^2=1^2$ より，$\alpha\bar{\alpha}=1$，$\beta\bar{\beta}=1$
$(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})=1$ より，$\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta=1$

$z=\dfrac{\beta}{\alpha}$ とおくと，$z+\bar{z}=\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}=\dfrac{\bar{\alpha}\beta+\alpha\bar{\beta}}{\alpha\bar{\alpha}}=1$

$z\bar{z}=\dfrac{\beta\bar{\beta}}{\alpha\bar{\alpha}}=1$　　z は $x^2-x+1=0$ の解だから，

$z=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$　　つまり，$\dfrac{\beta}{\alpha}=\mathbf{\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}}$

【p. 42】 ❷ 複素数の極形式

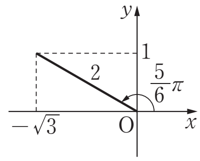
11 (1)　$\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$

(2)　$\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

(3)　$|-\sqrt{3}+i|=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$

図より，$\theta=\dfrac{5}{6}\pi$

与式$=\mathbf{2\left(\cos\dfrac{5}{6}\pi+i\sin\dfrac{5}{6}\pi\right)}$



(4)　$|-\sqrt{5}|=\sqrt{5}$
与式$=\mathbf{\sqrt{5}(\cos\pi+i\sin\pi)}$

12 (1)　$z=2-2i$ とおく。
絶対値　$|z|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=\mathbf{2\sqrt{2}}$

偏角　$\arg z=\mathbf{-\dfrac{\pi}{4}+2n\pi}$　**（n は整数）**

(2)　$z=2i$ とおく。
絶対値　$|z|=\sqrt{0^2+2^2}=\sqrt{4}=\mathbf{2}$

偏角　$\arg z=\mathbf{\dfrac{\pi}{2}+2n\pi}$　**（n は整数）**

13 $\alpha=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\beta=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\alpha\beta=2\cdot\sqrt{2}\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$

$=\mathbf{2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{12}\pi+i\sin\dfrac{7}{12}\pi\right)}$

絶対値　$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|=2\cdot\sqrt{2}=\mathbf{2\sqrt{2}}$

偏角　$\arg\alpha\beta=\arg\alpha+\arg\beta=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}=\mathbf{\dfrac{7}{12}\pi}$

14 $\alpha=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\beta=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$

$=\mathbf{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)}$

絶対値　$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\mathbf{\sqrt{2}}$

偏角　$\arg\dfrac{\alpha}{\beta}=\arg\alpha-\arg\beta=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=\mathbf{\dfrac{\pi}{12}}$

【p. 43】

15 類題　$z=(1+i)(1+\sqrt{3}i)$
$=(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i$ ……①
また，
$z=\{\sqrt{2}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)\}\{2(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)\}$
$=2\sqrt{2}(\cos 105^\circ+i\sin 105^\circ)$ ……②
①，②の実部，虚部を比べて，
$2\sqrt{2}\cos 105^\circ=1-\sqrt{3}$，$2\sqrt{2}\sin 105^\circ=1+\sqrt{3}$
よって，

$\mathbf{\cos 105^\circ=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$，$\mathbf{\sin 105^\circ=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$

16 (1)　$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

(2)　$2\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$

17 $z=\dfrac{(1-\sin\theta+i\cos\theta)^2}{(1-\sin\theta)^2+\cos^2\theta}$

$$=\frac{-2\sin\theta(1-\sin\theta)+2i(1-\sin\theta)\cos\theta}{2-2\sin\theta}$$
$$=-\sin\theta+i\cos\theta$$
$$=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$$

絶対値　$|z|=\mathbf{1}$

偏角　$\arg z=\boldsymbol{\theta+\frac{\pi}{2}+2n\pi}$　**（nは整数）**

18　分子$=\cos(\theta+2\theta)+i\sin(\theta+2\theta)$
$=\cos3\theta+i\sin3\theta$

$\theta=\dfrac{\pi}{12}$ のとき，与式$=\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}}$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i}{\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}$$
$$=\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}=\boldsymbol{i}$$

19　$\alpha+i\beta=(1+i)\gamma$ より，$\alpha-\gamma=-i(\beta-\gamma)$

よって，$\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}=i$ ……①

ゆえに，$\left|\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\right|=1$

①より，$\arg\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}=\arg i=\dfrac{\pi}{2}$

よって，点 γ を中心として点 α を $\dfrac{\pi}{2}$ 回転すると，点 β が得られるので，$\triangle\alpha\beta\gamma$ は**直角二等辺三角形**

【p. 44】 3 ド・モアブルの定理

20　(1)　与式$=\cos\left(6\cdot\dfrac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(6\cdot\dfrac{\pi}{12}\right)$

$$=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=\boldsymbol{i}$$

(2)　$\sqrt{3}+3i=2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

与式$=(2\sqrt{3})^5\left\{\cos\left(5\cdot\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(5\cdot\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$

$$=288\sqrt{3}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$
$$=288\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\boldsymbol{144\sqrt{3}-432i}$$

21　(1)　$\sqrt{3}-i=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)$

$$=2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

与式

$$=2^{-6}\left\{\cos(-6)\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin(-6)\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{64}(\cos\pi+i\sin\pi)$$
$$=\boldsymbol{-\frac{1}{64}}$$

(2)　$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$$\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

与式$=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{18}\left\{\cos\left(18\cdot\dfrac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(18\cdot\dfrac{\pi}{12}\right)\right\}$

$$=\frac{1}{2^9}\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$$
$$=\boldsymbol{-\frac{1}{512}i}$$

22　$\dfrac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}=\dfrac{\{(1+\sin\theta)+i\cos\theta\}^2}{(1+\sin\theta)^2-(i\cos\theta)^2}$

$$=\frac{2\sin\theta(1+\sin\theta)+2i\cos\theta(1+\sin\theta)}{2(1+\sin\theta)}$$
$$=\sin\theta+i\cos\theta$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

ド・モアブルの定理により，

左辺$=\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}^n$

$$=\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

＝右辺

23　$z^3=1$ ……①　　$|z^3|=1$　　よって，$|z|=1$

①の解は $z=\cos\theta+i\sin\theta$ ……② とおける。

②を①に代入して，

$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos3\theta+i\sin3\theta=1$

$\cos3\theta=1,\ \sin3\theta=0$

よって，$3\theta=0+2k\pi$　（k は整数）

$$\theta=\frac{2k\pi}{3}$$

$0\leqq\theta<2\pi$ とすると，$k=0,\ 1,\ 2$ だから，

$$\theta=0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$$

これらを②に代入して，①の虚数解は，

$z=\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi,\ \cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi$

【p. 45】

24　類題　z の極形式を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とすると，$z^3=r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)$ ……①

また，$z^3=-i=\cos\dfrac{3}{2}\pi+i\sin\dfrac{3}{2}\pi$ ……②

①，②の絶対値，偏角を比べて，

$r^3=1,\ 3\theta=\dfrac{3}{2}\pi+2k\pi$　（k は整数）

よって，$r=1,\ \theta=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{2k\pi}{3}$

$0\leqq\theta<2\pi$とすると，$k=0,\ 1,\ 2$

ゆえに，$\boldsymbol{z=i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}$

別解　1 の 3 乗根(虚数)を ω とする。

$z^3=i^3$ より，$\left(\dfrac{z}{i}\right)^3=1$　　よって，$\dfrac{z}{i}=1,\ \omega,\ \omega^2$

つまり，$z=i,\ i\omega,\ i\omega^2$

$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とすると，

$$\boldsymbol{z=i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}$$

25　(1)　$1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

第4章 平面上の曲線

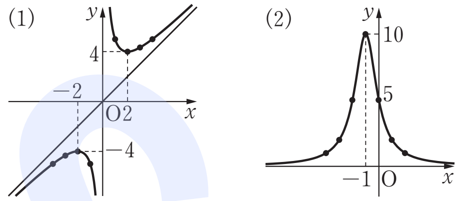
【p. 54】 ❶ 方程式の表す曲線

1 (1)

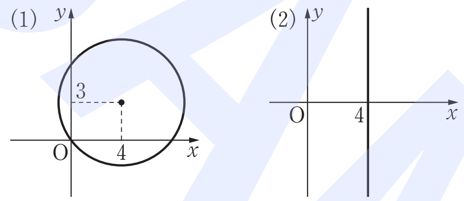
x	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
y	-5	$-\dfrac{13}{3}$	-4	-5	5	4	$\dfrac{13}{3}$	5

(2)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	1	2	5	10	5	2	1



2 (1) $x^2+y^2-8x-6y=0$
$(x-4)^2+(y-3)^2=25$
中心$(4,\ 3)$，半径 5 の円
(2) $3x-12=0$ $\quad x=4$



3 (1) $x^2+y=0$ の x と y を入れかえて，
$y^2+x=0$ $\quad \boldsymbol{x+y^2=0}$
(2) $x^2+y^2+4x=5$ の x，y にそれぞれ $x-2$，$y+1$を代入して，
$(x-2)^2+(y+1)^2+4(x-2)=5$
$\boldsymbol{x^2+y^2+2y=8}$

【p. 55】

4 類題 (1) ①，②の辺々を加えて，
$2y=-2x-2$
よって，$\boldsymbol{x+y+1=0}$
(2) $x^2-2x-3-y+k(x^2-1+y)=0$ ……①
$x=y=0$ を代入して，$k=-3$
$k=-3$ を①に代入して整理すると，
$\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x}$

5 $(k+3)x-(2k-1)y+3k-5=0$
k について整理して，
$(x-2y+3)k+(3x+y-5)=0$
求める定点の座標は，
$\begin{cases} x-2y+3=0 \\ 3x+y-5=0 \end{cases}$ を解いて $\boldsymbol{(1,\ 2)}$

6 直線 $y=x$ に関して対称移動して，
$y^2-4y-x=0$
平行移動して，
$(y-1)^2-4(y-1)-(x-2)=0$
よって，$\boldsymbol{y^2-6y-x+7=0}$

7 $(x-t)^2+(y+3t-1)^2=t-2$
中心の座標は$(t,\ -3t+1)$
$t-2>0$ より，$t>2$
$X=t$，$Y=-3t+1$ $(t>2)$ より t を消去して，
$Y=-3X+1$ $(X>2)$
求める軌跡は，**直線 $\boldsymbol{y=-3x+1}$ の $\boldsymbol{x>2}$ の部分**

【p. 56】 ❷ 放物線

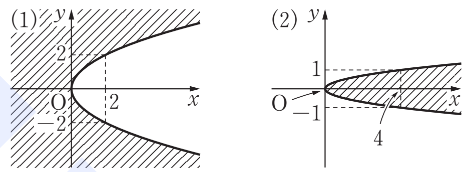
8 (1) $y^2=x$ は x 軸に関して対称。
頂点$(0,\ 0)$，軸 $\boldsymbol{y=0}$
(2) $y^2=6x$ は x 軸に関して対称。
頂点$(0,\ 0)$，軸 $\boldsymbol{y=0}$
(3) $x^2=-16y$ は y 軸に関して対称。
頂点$(0,\ 0)$，軸 $\boldsymbol{x=0}$

9 (1) $y^2=4\cdot 2x$ **焦点$(2,\ 0)$，準線 $\boldsymbol{x=-2}$**
(2) $y^2=4\cdot(-3)x$ **焦点$(-3,\ 0)$，準線 $\boldsymbol{x=3}$**
(3) $x^2=4\cdot\dfrac{1}{2}y$ **焦点$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，準線 $\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{2}}$**

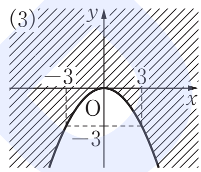
10 (1) $y^2=4(-2)x$ より，$\boldsymbol{y^2=-8x}$
(2) $x^2=4\cdot\dfrac{1}{4}y$ より，$\boldsymbol{x^2=y}$
(3) $x^2=4\left(-\dfrac{1}{2}\right)y$ より，$\boldsymbol{x^2=-2y}$
(4) $y^2=4\cdot 6x$ より，$\boldsymbol{y^2=24x}$

11 (1) 放物線 $y^2=x$ を y 軸方向に 2 だけ平行移動
(2) $\{x-(-1)\}^2=-2y$
放物線 $\boldsymbol{x^2=-2y}$ を $\boldsymbol{x}$ 軸方向に$\boldsymbol{-1}$だけ平行移動
(3) $\{y-(-3)\}^2=5\{x-(-2)\}$
放物線 $\boldsymbol{y^2=5x}$ を $\boldsymbol{x}$ 軸方向に $\boldsymbol{-2}$，$\boldsymbol{y}$ 軸方向に$\boldsymbol{-3}$だけ平行移動

12



(境界線を含まない)　(境界線を含まない)



(境界線を含む)

【p. 57】

13 類題 放物線上の点を$\mathrm{P}(x,\ y)$とする。
準線は軸 $x=-1$ に垂直だから，$y=k$ とおける。
$(x+1)^2+(y+2)^2=(y-k)^2$ ……① に $x=1$，$y=-2$ を代入して，$k=0$，-4
①に代入して整理すると，順に，
$\boldsymbol{(x+1)^2=-4(y+1)}$，$\boldsymbol{(x+1)^2=4(y+3)}$

14 放物線上の点を$\mathrm{P}(x,\ y)$とする。
準線は x 軸 $(y=0)$ に垂直だから，$x=k$ とおける。
$(x-1)^2+y^2=(x-k)^2$ ……① に $x=4$，$y=4$ を代入して，$k=-1$，9 $\quad$ ①に代入して整理すると，
順に，$\boldsymbol{y^2=4x}$ $\quad$ (準線 $x=-1$ の右側)
$y^2=-16(x-5)$ (準線 $x=9$ の左側)

15 放物線上の点を$\mathrm{P}(x,\ y)$とする。
$(x+3)^2+(y+3)^2=(y-1)^2$ $\quad$ 整理して，
$\boldsymbol{(x+3)^2=-8(y+1)}$

16 求める方程式は，$y=ax^2+bx+c$ と表される。
3 点の座標の値を代入して，
$3=c$，$11=4a+2b+c$，$2=a-b+c$
これを解いて，$a=1$，$b=2$，$c=3$

よって，$\boldsymbol{y=x^2+2x+3}$

17 与式の x，y をそれぞれ $x-3$，$y+2$ におき換える。

(1) $(y+2)^2=5(x-3)$

(2) $2(y+2)^2=-3(x-3)$

(3) $(x-3)^2=-2(y+2)$

18 (1) 式を整理して，$(x-1)^2=y-1$

これは，放物線 $x^2=y$ を x 軸方向に1，y 軸方向に1だけ平行移動した放物線である。

放物線 $x^2=y$ の焦点の座標は $\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$，準線の方程式は $y=-\dfrac{1}{4}$ だから，求める**焦点の座標は** $\boldsymbol{\left(1,\ \dfrac{5}{4}\right)}$，**準線の方程式は** $\boldsymbol{y=\dfrac{3}{4}}$

(2) 式を整理して，$(y-1)^2=-4(x+1)$

これは，放物線 $y^2=-4x$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に1だけ平行移動したものである。

放物線 $y^2=-4x$ の焦点の座標は $(-1,\ 0)$，準線の方程式は $x=1$ だから，求める**焦点の座標は $\boldsymbol{(-2,\ 1)}$，準線の方程式は $\boldsymbol{x=0}$**

19 放物線 $y^2=4x$ の焦点は $(1,\ 0)$ だから，求める放物線の頂点の x 座標は1で，y 座標は $y^2=4$ より，$y=\pm2$

よって，求める放物線の方程式は，

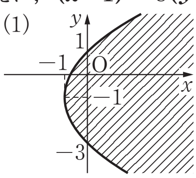
$(x-1)^2=4p(y\mp2)$ と表される。

この放物線の焦点は $(1,\ 0)$ だから，

$p\pm2=0 \qquad p=\mp2$

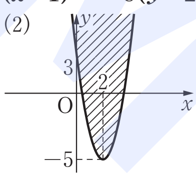
ゆえに，$\boldsymbol{(x-1)^2=8(y+2)}$，$\boldsymbol{(x-1)^2=-8(y-2)}$

20 (1)



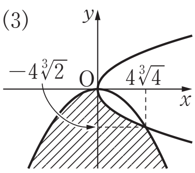
（境界線を含む）

(2)



（境界線を含まない）

(3)



（境界線を含む）

21 放物線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，P，F 間の距離と，P から準線までの距離が等しいから，

$\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}=\dfrac{|2x+y|}{\sqrt{2^2+1^2}}$

両辺を2乗して整理すると，

$\boldsymbol{x^2-4xy+4y^2-40x-20y+100=0}$

【p. 58】 ❸ 楕円

22 (1) $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$

$y=0$ のとき $x=\pm5$，$x=0$ のとき $y=\pm4$

頂点 $\boldsymbol{(\pm5,\ 0),\ (0,\ \pm4)}$

長軸 $2\times5=\boldsymbol{10}$ **短軸** $2\times4=\boldsymbol{8}$

(2) 両辺を16で割って，$\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$

$y=0$ のとき $x=\pm4$，$x=0$ のとき $y=\pm2$

頂点 $\boldsymbol{(\pm4,\ 0),\ (0,\ \pm2)}$

長軸 $2\times4=\boldsymbol{8}$ **短軸** $2\times2=\boldsymbol{4}$

23 (1) $\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$

$4>3$ より，焦点は x 軸上にある。

焦点 $(\pm\sqrt{4^2-3^2},\ 0)=\boldsymbol{(\pm\sqrt{7},\ 0)}$

中心 $\boldsymbol{(0,\ 0)}$

(2) $\dfrac{x^2}{(\sqrt{5})^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$

$\sqrt{5}<3$ より，焦点は y 軸上にある。

焦点 $(0,\ \pm\sqrt{9-5})=\boldsymbol{(0,\ \pm2)}$

中心 $\boldsymbol{(0,\ 0)}$

24 (1) 長軸の半分は3，短軸の半分は2である。

長軸が x 軸上にあるから，横長の楕円になる。

$\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$ より，$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1}$

(2) 長軸の半分は4，短軸の半分は2である。

長軸が x 軸上にあるから，横長の楕円になる。

$\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$ より，$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1}$

(3) 焦点が y 軸上にあるから，縦長の楕円になる。

$\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とおくと，焦点について，

$\sqrt{b^2-4}=3 \qquad b^2=13$

よって，$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{13}=1}$

25 与式の x，y をそれぞれ $x-2$，$y+3$ におき換える。

(1) $\dfrac{(x-2)^2}{3^2}+\dfrac{(y+3)^2}{2^2}=1$

(2) $\dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{(y+3)^2}{5}=1$

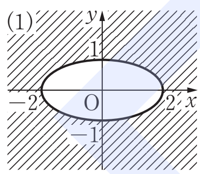
26 (1) $\dfrac{x^2}{4}+y^2>1$ は楕円 $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{1^2}=1$ の外部。

(2) $9x^2+4y^2\leqq36$ の両辺を36で割って，

$\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}\leqq1$

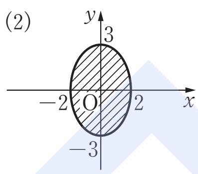
これは楕円 $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ の周上および内部を表す。

(1)



（境界線を含まない）

(2)



（境界線を含む）

【p. 59】

27 類題 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ の両辺を a^2b^2 で割って，

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \qquad a>b$ より，横長の楕円になるから，

焦点は $(\pm\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$

求める楕円は横長で，短軸の半分は a だから，

$\dfrac{x^2}{A^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ とおく。焦点について，

$\sqrt{A^2-a^2}=\sqrt{a^2-b^2}$ より，$A^2=2a^2-b^2$

よって，$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{2a^2-b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1}$

28 (1) 求める方程式は $\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (b>0)$ とお

第5章 数学的な表現の工夫—行列

【p. 76】 ❶ 行列の加法・減法と実数倍

1 (1) 2行2列，2

(2) 2行3列，0

(3) 3行2列，0

2 $a-1=13,\ -4=2d,\ b+2=0,$

$2c=-6$ より，

$\boldsymbol{a=14,\ b=-2,\ c=-3,\ d=-2}$

3 (1) $\begin{pmatrix}1 & -7\\ 6 & -1\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}-3 & -8 & 7\\ 1 & -8 & -9\end{pmatrix}$

4 (1) $\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}12 & 0 & 2\\ -6 & -8 & -18\end{pmatrix}$

(3) 与式 $=\begin{pmatrix}24 & 8\\ 20 & 12\\ -4 & 16\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 6\\ -2 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\mathbf{20} & \mathbf{14}\\ \mathbf{18} & \mathbf{16}\\ \mathbf{-4} & \mathbf{18}\end{pmatrix}$

(4) 与式 $=\begin{pmatrix}-10 & 5\\ 20 & -5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\mathbf{-12} & \mathbf{5}\\ \mathbf{19} & \mathbf{-4}\end{pmatrix}$

【p. 77】

5 類題 (1) $X=2A+B$

$=2\begin{pmatrix}5 & -1\\ 0 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\mathbf{11} & \mathbf{0}\\ \mathbf{3} & \mathbf{-5}\end{pmatrix}$

(2) $X=\frac{3}{2}B-2A$

$=\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}5 & -1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\mathbf{-\frac{17}{2}} & \mathbf{5}\\ \mathbf{\frac{9}{2}} & \mathbf{\frac{5}{2}}\end{pmatrix}$

6 (1) 与式 $=A=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{5}\\ \mathbf{2} & \mathbf{4}\end{pmatrix}$

(2) 与式 $=-A+B$

$=-\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{-2} & \mathbf{-5}\end{pmatrix}$

(3) 与式 $=2A-3B$

$=2\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 2 & 4\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{7} & \mathbf{-8}\\ \mathbf{4} & \mathbf{11}\end{pmatrix}$

(4) 与式 $=4A-2B$

$=4\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 2 & 4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{8}\\ \mathbf{8} & \mathbf{18}\end{pmatrix}$

7 $3X=3\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ より，$X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

よって，$x=0,\ x+1=1,\ y-1=1,\ z+2=0$

これより，$\boldsymbol{x=0,\ y=2,\ z=-2}$

8 $\begin{pmatrix}2x-y & 2-z\\ 2y-x & 2z-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ z & 0\end{pmatrix}$ より，

$2x-y=1,\ 2-z=1,\ 2y-x=z,\ 2z-2=0$

これより，$\boldsymbol{x=1,\ y=1,\ z=1}$

9 (1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}=A,\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 5 & -4\end{pmatrix}=B$ とおく。

$X+2Y=A$……①，$-3X+Y=B$……②

①−②×2 より，$7X=A-2B$

$\boldsymbol{X}=\frac{1}{7}(A-2B)$

$=\frac{1}{7}\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 5 & -4\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$

②に代入して，

$\boldsymbol{Y}=B+3X$

$=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 5 & -4\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$

(2) $X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

10 $(a^2+a)A+(3a^2+4a)B=2A+4B$

$(a^2+a-2)A=-(3a^2+4a-4)B$

$a^2+a-2\neq 0$ とすると，$A=\frac{3a^2+4a-4}{a^2+a-2}B$

これは，A が B の実数倍でないという仮定に反する。よって，$a^2+a-2=0$ より，$a=-2,\ 1$

同様にして，$3a^2+4a-4=0$ より，$a=-2,\ \frac{2}{3}$

したがって，$\boldsymbol{a=-2}$

【p. 78】 ❷ 行列の積

11 (1) 与式 $=-4\cdot(-3)+6\cdot 1=\mathbf{18}$

(2) 与式 $=\cos\theta\cdot(-\cos\theta)+\sin\theta\cdot(-\sin\theta)$

$=-\cos^2\theta-\sin^2\theta=\mathbf{-1}$

12 (1) 与式

$=\begin{pmatrix}4\cdot 1+(-8)\cdot 3 & 4\cdot 2+(-8)\cdot(-1)\\ 2\cdot 1+0\cdot 3 & 2\cdot 2+0\cdot(-1)\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\mathbf{-20} & \mathbf{16}\\ \mathbf{2} & \mathbf{4}\end{pmatrix}$

(2) 与式 $=\begin{pmatrix}(-4)\cdot(-6)+2\cdot 2\\ 1\cdot(-6)+3\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{28}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}5 & 20 & 25\\ 4 & 10 & 12\\ 5 & 5 & 5\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 6\\ 0 & 3 & -3\\ 1 & 8 & 4\end{pmatrix}$

13 (1) ×

(2) 与式 $=\begin{pmatrix}3\cdot(-4) & 3\cdot 2\\ 0\cdot(-4) & 0\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-12} & \mathbf{6}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$

(3) ×

(4) 与式 $=(2\cdot(-9)+7\cdot 8\quad 2\cdot 2+7\cdot 1)$

$=(\mathbf{38}\quad \mathbf{11})$

14 (1) $\begin{pmatrix}-4 & 6\\ 8 & 1\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}-6 & 17\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

(3) $A^2=AA=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\mathbf{11} & \mathbf{10}\\ \mathbf{4} & \mathbf{19}\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}16 & -5\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

【p. 79】

15 類題 $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ とする。

(1) $AX=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a+6c & b+6d\\ 2a+3c & 2b+3d\end{pmatrix}$

$AX=O$ だから，$a+6c=0$，$b+6d=0$，
$2a+3c=0$，$2b+3d=0$
よって，$a=0$，$b=0$，$c=0$，$d=0$

ゆえに，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$

(2) $AX=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ 3a+6c & 3b+6d\end{pmatrix}$

$AX=O$ だから，$a+2c=0$，$b+2d=0$，
$3a+6c=0$，$3b+6d=0$
よって，$a=-2c$，$b=-2d$

ゆえに，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{2k} & \boldsymbol{2l}\\ \boldsymbol{-k} & \boldsymbol{-l}\end{pmatrix}$

($\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{l}$ は任意の実数)

16 $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ とする。$AX=XA$ より，

(1) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

よって，$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

この等式はつねに成り立つ。

ゆえに，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d}\end{pmatrix}$

($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ は任意の実数)

(2) $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

よって，

$\begin{pmatrix}-a+c & -b+d\\ a+2c & b+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a+b & a+2b\\ -c+d & c+2d\end{pmatrix}$

したがって，
$-a+c=-a+b$，$-b+d=a+2b$
$a+2c=-c+d$，$b+2d=c+2d$
これより，$b=c$，$d=a+3b$

ゆえに，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a+3b}\end{pmatrix}$

($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は任意の実数)

17 $\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\ \mathbf{10}\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{BA}=(4\ \ -1)\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}=(\mathbf{-6}\ \ \mathbf{12})$

$\boldsymbol{BC}=(4\ \ -1)\begin{pmatrix}5\\ 1\end{pmatrix}=\mathbf{19}$

$\boldsymbol{CB}=\begin{pmatrix}5\\ 1\end{pmatrix}(4\ \ -1)=\begin{pmatrix}\mathbf{20} & \mathbf{-5}\\ \mathbf{4} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$

18 $\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+5y\\ x+3y\end{pmatrix}$

よって，$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2x+5y\\ x+3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}$

したがって，

$\begin{cases}2x+5y+2(x+3y)=1\\ 3(2x+5y)+4(x+3y)=4\end{cases}$

整理して，$4x+11y=1$，$10x+27y=4$

これを連立させて，$\boldsymbol{x=\frac{17}{2}}$，$\boldsymbol{y=-3}$

19 $\begin{pmatrix}a+ab & a^2+b^2\\ a+b & ab+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-1 & x\\ ab & b-1\end{pmatrix}$

よって，$a+ab=a-1$，$a^2+b^2=x$
$a+b=ab$，$ab+b=b-1$
したがって，$x=a^2+b^2$，$a+b=ab=-1$
ゆえに，$x=(a+b)^2-2ab=(-1)^2-2\cdot(-1)=\mathbf{3}$

20 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ より，
$(A+B)(A+B)=A^2+2AB+B^2$
$A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2$
よって，$BA=AB$

$\begin{pmatrix}3 & 4\\ b & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\ b & 5\end{pmatrix}$

ゆえに，$\begin{pmatrix}8 & 3+4a\\ 10 & b+5a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & 5\\ 6+ab & 8+5a\end{pmatrix}$

これより，$b=8$，$3+4a=5$，$10=6+ab$
$b+5a=8+5a$

したがって，$\boldsymbol{a=\frac{1}{2}}$，$\boldsymbol{b=8}$

【p. 80】 ❸ 行列の乗法の性質

21 (1) 与式$=(5\ \ 7)\begin{pmatrix}-2\\ 2\end{pmatrix}=\mathbf{4}$

(2) 与式$=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 5 & 10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 3\\ 10 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{8} & \mathbf{9}\\ \mathbf{15} & \mathbf{16}\end{pmatrix}$

(3) 与式$=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\right\}$

$=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{3} & \mathbf{5}\end{pmatrix}$

22 (1) 与式$=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}^2$

よって，$A^2=(a+c)A-(ac-b)E$

(2) $a+c=t,\ ac-b=\delta$ とおくと，(1)より

$A^2=tA-\delta E$ で

$A^3=A\cdot(tA-\delta E)$

$\quad=t(tA-\delta E)-\delta A$

$\quad=(t^2-\delta)A-t\delta E$

これを $A^3=(b-1)^2A$ に代入して，

$\{(t^2-\delta)-(b-1)^2\}A=t\delta E$

ここで，$A\neq kE$ であるから，

$t\delta=0,\ t^2-\delta-(b-1)^2=0$

$a,\ c$ は正の整数なので，

$t=a+c>0 \quad \therefore\ \delta=0$

このとき，$t^2=(b-1)^2$ で，$t>0$,

$b-1\geqq 0 \quad \therefore\ t=b-1$

すなわち，$a+c=b-1$

ここで，$\delta=0$ より $b=ac$ なので

$a+c=ac-1 \quad \therefore\ (a-1)(c-1)=2$

$a,\ c$ は正の整数

ゆえに，$\boldsymbol{(a,\ b,\ c)=(2,\ 6,\ 3),\ (3,\ 6,\ 2)}$

【p. 93】

80 類題 (1) $P^{-1}AP$

$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{1}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{3}\end{pmatrix}$

(2) $A^n=P(P^{-1}AP)^nP^{-1}$

$=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}^n\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\frac{3^n+1}{2}}&\boldsymbol{\frac{3^n-1}{2}}\\\boldsymbol{\frac{3^n-1}{2}}&\boldsymbol{\frac{3^n+1}{2}}\end{pmatrix}$

81 $A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&a\end{pmatrix}$ のとき，

$A^2=\begin{pmatrix}1&-(1+a)\\0&a^2\end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix}1&-(1+a+a^2)\\0&a^3\end{pmatrix}$

よって，$A^n=\begin{pmatrix}1&-(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1})\\0&a^n\end{pmatrix}$

……(＊)

と予想される。

(i) $n=1$ のとき，(＊)は成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき，(＊)が成り立つとすると，

$A^{k+1}=A^kA$

$\quad=\begin{pmatrix}1&-(1+a+a^2+\cdots+a^{k-1})\\0&a^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&a\end{pmatrix}$

$\quad=\begin{pmatrix}1&-(1+a+\cdots+a^{k-1}+a^k)\\0&a^{k+1}\end{pmatrix}$

よって，$n=k+1$ のときも(＊)は成り立つ。

ゆえに，$\boldsymbol{A^n=\begin{pmatrix}1&-(1+a+\cdots+a^{n-1})\\0&a^n\end{pmatrix}}$

82 (1) $A^2=2A$

(2) (1)の結果を繰り返し用いると，

$A^{2m}=2A^{2m-1}=2^2A^{2m-2}$

$\quad=\cdots\cdots=\boldsymbol{2^{2m-1}A}$

(3) (2)と同様に $A^k=2^{k-1}A\ (k=1,\ 2,\ \cdots)$

これを用いると，

$S=A^{2m-1}+A^{2m-2}+\cdots+E$

$\quad=(2^{2m-2}+2^{2m-3}+\cdots+1)A+E$

$\quad=\frac{2^{2m-1}-1}{2-1}A+E$

$\quad=(2^{2m-1}-1)\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\quad=\begin{pmatrix}\boldsymbol{2^{2m-1}}&\boldsymbol{1-2^{2m-1}}\\\boldsymbol{1-2^{2m-1}}&\boldsymbol{2^{2m-1}}\end{pmatrix}$

83 (1) $x^n=(x^2-x-12)Q(x)+ax+b$

とおくと，$x=-3,\ 4$ とおいて

$-3a+b=(-3)^n,\ 4a+b=4^n$

これを解いて，

$a=\frac{4^n-(-3)^n}{7},\ b=\frac{3\cdot4^n+4\cdot(-3)^n}{7}$

よって求める余りは，

$\boldsymbol{\frac{4^n-(-3)^n}{7}x+\frac{3\cdot4^n+4\cdot(-3)^n}{7}}$

(2) $A^2-A-12E=(A+3E)(A-4E)$

$=\begin{pmatrix}5&5\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&5\\2&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}$

(3) $A^n=(A^2-A-12E)Q(A)+aA+bE$

ただし，$Q(A)$ では，Q の定数 c には cE とおく。

$A^2-A-12E=O$ だから，

$\begin{pmatrix}r&s\\t&u\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}2&5\\2&-1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

ゆえに，

$r=2a+b=\boldsymbol{\frac{5\cdot4^n+2\cdot(-3)^n}{7}}$

【p. 94】 章末問題

1 (1) $X=2A-B=\begin{pmatrix}\boldsymbol{8}&\boldsymbol{-5}\\\boldsymbol{1}&\boldsymbol{3}\end{pmatrix}$

(2) $X=-A+4B=\begin{pmatrix}\boldsymbol{3}&\boldsymbol{13}\\\boldsymbol{-4}&\boldsymbol{2}\end{pmatrix}$

2 (1) $A=\begin{pmatrix}2&0\\4&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&-2\end{pmatrix}$

ゆえに，

$A^2-B^2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{4}&\boldsymbol{3}\\\boldsymbol{5}&\boldsymbol{-3}\end{pmatrix}$

(2) $AB=\begin{pmatrix}-2&2\\-4&4\end{pmatrix}$

3 $A^2=-A+(a+2)E$ が成り立つから，

$A^4=-(2a+5)A+(a+3)(a+2)E=A$

かつ，$A\neq kE$ より，

$\boldsymbol{a=-3}$

4 $A^2-A=\begin{pmatrix}a^2-a-1 & -a+1\\ a-1 & -1\end{pmatrix}$

$A^2-A+E=O$ より $a^2-a=0,\ a-1=0$

$\therefore\ \boldsymbol{a=1}$

$A^2=A-E$ だから

$A^3=A^2\cdot A=(A-E)A=A^2-A=A-E-A$

$\quad=-E$

$\therefore\ A^{125}=(A^3)^{41}\cdot A^2=(-E)^{41}(A-E)$

$$=E-A=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

5 $AX=B$ より $AXA=BA\cdots$①

$XA=B$ より $AXA=AB\cdots$②

①=②だから,

$AB=BA$

よって, $\begin{pmatrix}2a+2 & 2b-1\\ a+2 & b-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+b & a+b\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

$\therefore\ \boldsymbol{a=1,\ b=2}$

$\therefore\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

$\Delta(A)=1\neq 0$ より A^{-1} が存在して,

$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

$AX=B$ の両辺左から A^{-1} をかけると,

$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{3}\\ \mathbf{3} & \mathbf{-4}\end{pmatrix}$

6 $\begin{cases}2x+y=ax\\ x+2y=ay\end{cases}$

$\begin{cases}(2-a)x+y=0\\ x+(2-a)y=0\end{cases}$

よって, $\begin{pmatrix}2-a & 1\\ 1 & 2-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\cdots(*)$

したがって, $(*)$ が $x=y=0$ 以外の解をもつならば,

$(2-a)^2-1=0$

$\therefore\ \boldsymbol{a=1,3}$

7 $\begin{pmatrix}a & -1\\ 2 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-2\\ 2+2b\end{pmatrix}$ ……①

$\begin{pmatrix}a & -1\\ 2 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3a\\ -6\end{pmatrix}$ ……②

これらがともに直線 $x-4y+3=0$ 上の点だから,

②より, $-3a-4(-6)+3=0,\quad a=9$

これと①より, $7-4(2+2b)+3=0,\quad b=\dfrac{1}{4}$

$\boldsymbol{a=9,\quad b=\dfrac{1}{4}}$

8 行列 A は, 原点を中心に 60° だけ回転する1次変換を表している。

よって, A^2, A^3, A^4, A^5, A^6, は, 順に, 120°, 180°, 240°, 300°, 360° だけ回転する1次変換を表している。これより,

$A=-A^4,\ A^2=-A^5\quad A^3=-A^6$ が成り立つ。

したがって, $A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6=O$

【p. 95】

9 (1) $A\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}=(5A+2E)\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$

$=5\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{13}\\ \mathbf{29}\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}$ とおくと,

$\alpha=\dfrac{3}{11},\ \beta=\dfrac{1}{11}$

$\therefore\ A\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\dfrac{3}{11}A\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}+\dfrac{1}{11}A\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}$

$=\dfrac{3}{11}\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}+\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix}13\\ 29\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\ \mathbf{4}\end{pmatrix}$

(3) (2)と同様にして,

$\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=-\dfrac{5}{11}\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}+\dfrac{2}{11}\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}$ より

$A\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=-\dfrac{5}{11}\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}+\dfrac{2}{11}\begin{pmatrix}13\\ 29\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$

となるので

$A\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 4\end{pmatrix}$ より

$\boldsymbol{A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}}$

10 $X+X^{-1}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ の左右から X をかけて,

$X^2+E=X\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix},\ X^2+E=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}X$

よって

$X\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}X$ で $X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & u\end{pmatrix}$

とおけば,

$\begin{pmatrix}4x & x+4y\\ 4z & z+4u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x+z & 4y+u\\ 4z & 4u\end{pmatrix}$

$\therefore\ z=0,\ x=u$

したがって,

$\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & x\end{pmatrix}^2+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & x\end{pmatrix}$

$\therefore\ x=2\pm\sqrt{3},\ y=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって,

$X=\begin{pmatrix}\mathbf{2\pm\sqrt{3}} & \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\pm\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}\\ \mathbf{0} & \mathbf{2\pm\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ **(複号同順)**

11 (1) $AP=P\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$ より,

$\begin{pmatrix}5 & -1\\ -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}5-a & 5-b\\ -1+5a & -1+5b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 4a & 6b\end{pmatrix}$

よって，$5-a=4, 5-b=6,$
$-1+5a=4a, -1+5b=6b$
したがって，$\boldsymbol{a=1, b=-1}$
このとき，P は逆行列をもつから適する。

(2) (1)より，$(P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}^n$

よって，$P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}4^n & 0\\ 0 & 6^n\end{pmatrix}$

したがって，

$$A^n=P\begin{pmatrix}4^n & 0\\ 0 & 6^n\end{pmatrix}P^{-1}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4^n & 0\\ 0 & 6^n\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4^n & 6^n\\ 4^n & -6^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4^n+6^n & 4^n-6^n\\ 4^n-6^n & 4^n+6^n\end{pmatrix}}$$

12 (1) $\Delta=(2a+1)a-(2b+1)(-b)$
$=2a^2+a+2b^2+b$
$=2(a^2+b^2)+a+b$
$=a+b+2$

$a+b+2=k$ とおくと，$b=k-a-2$
これを $a^2+b^2=1\cdots$①に代入して a について整理すると，
$2a^2+2(2-k)a+k^2-4k+3=0$
a は実数であるから，
$D/4=(2-k)^2-2(k^2-4k+3)\geqq 0$
$k^2-4k+2\leqq 0$
よって，$2-\sqrt{2}\leqq k\leqq 2+\sqrt{2}$
すなわち，$\Delta\neq 0$ だから，A は逆行列をもつ。

(2) $\begin{pmatrix}2a+1 & 2b+1\\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\ x+y\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2a+1 & 2b+1\\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

$\left\{\begin{pmatrix}2a+1 & 2b+1\\ -b & a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2a & 2b+2\\ -b-1 & a-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

$x=y=0$ 以外の解をもつ条件は，
$\Delta=2a(a-1)-(2b+2)(-b-1)=0$
$2(a^2+b^2)-2a+4b+2=0$
①より，$a=2b+2$
①に代入して整理すると，$5b^2+8b+3=0$
これを解いて，$b=-1, -\dfrac{3}{5}$

よって，$a=0, \dfrac{4}{5}$

ゆえに，$\boldsymbol{A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix}13 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}}$

13 (1) $(ax+by)^2+(cx+dy)^2=x^2+y^2$ より，
$(a^2+c^2-1)x^2+(b^2+d^2-1)y^2+2(ab+cd)xy=0$

これが，任意の x，y に対して成り立つから，
$a^2+c^2-1=0$，$b^2+d^2-1=0$，$ab+cd=0$

よって，$\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+c^2 & ab+cd\\ ab+cd & b^2+d^2\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(2) $F=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ とおくと，$f\circ f$ を表す行列は F^2

であり，$F^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-E\cdots\cdots$①

(1)より，$\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}F=E$，$\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}F^2=F$，

これと①より，$-\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

よって，$\begin{cases}a=d=0\\ b=-c\end{cases}$
また，$a^2+c^2=1$，$b^2+d^2=1$ より，$b^2=c^2=1$
したがって，$\boldsymbol{A=\begin{pmatrix}0 & \pm1\\ \mp1 & 0\end{pmatrix}}$ **（複号同順）**

23－1－1