数学Ⅰ

■数学Ⅰ

●ねらいと特色

本書は，高校の必修科目の１つである数学Ⅰの内容を，基本的な事柄を中心に，じっくり時間をかけて理解することを目標として編集されています。

数学Ⅰは高校数学の土台となる重要な科目であり，その内容をおろそかにしたままでは，あとで学習する上級の科目の理解はおぼつかなくなります。ですから，数学Ⅰの基礎を確実に固めておくことはとても大切なのです。そのためには，基本となる事柄をしっかり把握したうえで，個々の問題の考え方，定理・公式の使い方に慣れることが何よりも大切です。

本書では，各単元の重要な学習項目，新しい学習項目，定理・公式・計算方法などを各項目ごとに例を用いてわかりやすく示したり，例題の考え方や解答を示したりすることで修得が速やかになるように工夫しました。また，理解を確かなものにするために，例や例題のあとでは精選された類題を生徒自身が解くようにしてあります。

さらに，いくつかの関連する項目をまとめて繰り返し問題を解くことで復習が絶えず可能となり，理解が定着できるようにしてあります。

本書を最大限に活用することで，数学Ⅰの基礎力を大いに養ってください。

●構成と使い方

例・**例題**…**例**は，重要な学習項目，新しい学習項目，重要な定理・公式・計算方法などを確実に修得するために設けてあります。また，**例題**は，新しく学習する項目の基本的かつ最重要な問題です。じっくり時間をかけて読み，理解することが大切です。

類題…**例**や**例題**で学習した考え方，解き方を時間をおかずに自分自身の力で解くことで，理解を確かなものにします。

問題A・B…いくつかの関連する項目をまとめて反復練習します。A問題は類題と同一レベル，B問題はやや発展した問題を収録してあります。

章末問題…各章のまとめの問題です。基本問題・発展問題の２段階構成で，やや程度の高い問題も含まれています。各章の学習の仕上げとしてアタックしてください。

もくじ

第1章　数と式

1　整式 …… 4
2　整式の乗法 …… 6
問題A・B …… 10
3　因数分解 …… 12
問題A・B …… 16
4　実数 …… 18
5　平方根 …… 23
問題A・B …… 26
6　１次不等式 …… 28
問題A・B …… 32
7　集合 …… 34
8　命題と条件 …… 36
9　命題と証明 …… 40
問題A・B …… 42
章末問題 …… 44

第2章　2次関数

1　関数とグラフ …… 46
2　２次関数のグラフ …… 49
問題A・B …… 54
3　２次関数の最大・最小 …… 56
問題A・B …… 60
4　２次関数の決定 …… 62
問題A・B …… 65
5　２次方程式 …… 66
問題A・B …… 70
6　２次関数のグラフとx軸の位置関係 …… 72
問題A・B …… 77
7　２次不等式 …… 78
問題A・B …… 85
章末問題 …… 87

第3章　図形と計量

1　鋭角の三角比 …… 90
問題A・B …… 93
2　鈍角の三角比 …… 94
問題A・B …… 97
3　三角比の相互関係 …… 98
問題A・B …… 101
4　正弦定理と余弦定理 …… 102
問題A・B …… 108
5　三角形の面積 …… 110
6　空間図形への応用 …… 112
問題A・B …… 114
章末問題 …… 116

第4章　データの分析

1　データの散らばり …… 118
2　データの相関 …… 122
3　仮説検定の考え方 …… 125
問題A・B …… 127
章末問題 …… 129

重要事項 —— 131
平方・立方・平方根の表 —— 135
三角比の表 —— 136

第 1 章　数と式

1　整式

1　単項式の係数と次数

❶　単項式において，数の部分をその単項式の**係数**といい，かけ合わせた文字の個数を，その単項式の**次数**という。

例　(1)　$3x^2$ の係数は　3，次数は　2　　(2)　$4abx^3$ の係数は　4，次数は　5

❷　単項式が 2 種類以上の文字を含むとき，特定の文字に着目して次数を考えることがある。この場合，残りの文字は数と同じように扱う。

例　単項式 $4abx^3$ において，x に着目すると，係数は　$4ab$，次数は　3
　a と b に着目すると，係数は　$4x^3$，次数は　2

1　次の単項式の係数と次数をいえ。

(1)　$-3a^2$　　(2)　$2x$　　(3)　a^2　　(4)　$-x^3$　　(5)　$4ab^2$

2　単項式 $5a^3bx^2$ において，次の文字に着目するとき，その係数と次数をいえ。

(1)　x　　(2)　a　　(3)　a と b

2　整式の次数

❶　単項式と多項式を合わせて**整式**という。

❷　整式において，最も次数の高い項の次数を，その整式の**次数**という。
また，次数が n の整式を **n 次式**という。

例　$3x^2-4x+1$ の次数は　2 だから，2 次式である。

❸　整式が 2 種類以上の文字を含むとき，特定の文字に着目して次数を考えることがある。整式の項の中で，着目した文字を含まない項を**定数項**という。

例　整式 $3x^2y-4x+1$ の次数
(1)　x に着目すると　2　　(2)　y に着目すると　1　　(3)　x と y に着目すると　3

3　次の整式は何次式か。

(1)　x^3+3x^2+2x+4　　(2)　$3+2a+4a^2$

4　整式 $2x^3+3x^2y^4+1$ において，次の文字に着目するとき，その次数と定数項をいえ。

(1)　x　　(2)　y　　(3)　x と y

3 整式の整理

❶ 整式において，文字の部分が同じである項を，**同類項**（どうるいこう）という。

> **同類項をまとめる**
> $$\boldsymbol{ma+na=(m+n)a}$$

❷ 整式の整理は，一般的に次のように行う。

［1］ 同類項をまとめ，各項を次数の高い方(低い方)から順に並べる。

［2］ 文字が 2 種類以上ある場合は，指定された文字について［1］のように整理する。

❸ 次数の高い方から並べる並べ方を，**降べきの順**に整理するという。

例　$x^2+9x-1-6x-2x^3-5x^2$ を降べきの順に整理すると，
$-2x^3+(1-5)x^2+(9-6)x-1=-2x^3-4x^2+3x-1$

例　$x^2+xy+y^2+x+y+2$ を，x について降べきの順に整理すると，
$x^2+(y+1)x+(y^2+y+2)$

5　次の整式を降べきの順に整理せよ。

(1)　$3-4x+3x^2+6x$　　(2)　$2x-4x^3+6x^2-x+3x^3$

6　次の整式を，［　］内の文字について降べきの順に整理せよ。

(1)　$x^2+y^2+xy+2x+4$　［x］　　(2)　$2y-2x^2y^2+xy^2+y+1$　［y］

4 整式の加法と減法

●整式の和，差を求めるためには，同類項をまとめて計算すればよい。

例　$A=2x^3+2x^2+6x-1$，$B=-x^3+3x^2-x+8$ のとき，

(1)　$A+B=(2x^3+2x^2+6x-1)+(-x^3+3x^2-x+8)$
$=2x^3+2x^2+6x-1-x^3+3x^2-x+8$
$=(2-1)x^3+(2+3)x^2+(6-1)x+(-1+8)$
$=x^3+5x^2+5x+7$

(2)　$A-B=(2x^3+2x^2+6x-1)-(-x^3+3x^2-x+8)$
$=2x^3+2x^2+6x-1+x^3-3x^2+x-8$
$=(2+1)x^3+(2-3)x^2+(6+1)x+(-1-8)$
$=3x^3-x^2+7x-9$

(1)
$$\begin{array}{rr} & 2x^3+2x^2+6x-1 \\ +) & -x^3+3x^2-x+8 \\ \hline & x^3+5x^2+5x+7 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rr} & 2x^3+2x^2+6x-1 \\ -) & -x^3+3x^2-x+8 \\ \hline & 3x^3-x^2+7x-9 \end{array}$$

7　次の整式 A，B について，$A+B$，$A-B$ を計算せよ。

(1)　$A=2x^2+3xy+y^2$，　$B=x^2+xy-y^2$

(2)　$A=x^2+xy-y^2$，　$B=-x^2+2xy-2y^2$

(3)　$A=x^3-2x^2-xy+y$，　$B=-x^3+2x^2+y^2+y$

2 整式の乗法

5 単項式の乗法

❶　n 個の a の積を **a の n 乗**といい，a^n と書く。n を a^n の**指数**（しすう）という。また，a，a^2，a^3，…… をまとめて a の**累乗**（るいじょう）という。

例　(1)　$a^2a^3=(a\times a)\times(a\times a\times a)=a^5=a^{2+3}$

(2)　$(a^2)^3=a^2\times a^2\times a^2=(a\times a)\times(a\times a)\times(a\times a)=a^6=a^{2\times 3}$

(3)　$(ab)^3=(ab)\times(ab)\times(ab)=(a\times a\times a)\times(b\times b\times b)=a^3b^3$

❷　上の例からもわかるように，累乗について，次の**指数法則**が成り立つ。

m，n が正の整数のとき，

1　$\boldsymbol{a^ma^n=a^{m+n}}$　　2　$\boldsymbol{(a^m)^n=a^{mn}}$　　3　$\boldsymbol{(ab)^n=a^nb^n}$

例　(1)　$a\times a^3\times a^2=a^{1+3+2}=a^6$

(2)　$(a^4)^3=a^{4\times 3}=a^{12}$　　(3)　$(-2a^2b)^3=-8a^6b^3$

1　次の計算をせよ。

(1)　$a^3\times a^7$　　(2)　$(2x^2)^4$　　(3)　$(-3xy^3)^2$

(4)　$a^2b\times 3ab^3$　　(5)　$(-2ab^2)\times a^3b$　　(6)　$(-2xy^2)^3\times(-2x^2y)^2$

6 整式の乗法

●整式の積の形で表された式を，分配法則を用いて単項式の和の形に表すことを，**展開**するという。

分配法則
$\boldsymbol{A(B+C)=AB+AC}$
$\boldsymbol{(A+B)C=AC+BC}$

例　(1)　$-3x(2x^2-6x+1)=-6x^3+18x^2-3x$

(2)　$(1-x^2-3x)\times(-8x)=-8x+8x^3+24x^2$

$=8x^3+24x^2-8x$

例　(1)　$(x+3y)(5x-2y)=x(5x-2y)+3y(5x-2y)$

$=5x^2-2xy+15xy-6y^2=5x^2+13xy-6y^2$

(2)　$(4x-3y)(2x+y)=4x(2x+y)-3y(2x+y)$

$=8x^2+4xy-6xy-3y^2=8x^2-2xy-3y^2$

2　次の式を展開せよ。

(1)　$2x(x^2-3x+1)$　　(2)　$2x^2(x+1-x^3)$

(3)　$(x^2-3x+1)\times 2x$　　(4)　$(x^3+x^2-1)\times(-3x)$

3　次の式を展開せよ。

(1)　$(2x-1)(3x+1)$　　(2)　$(4x+y)(2x-3y)$

(3)　$(-x+2)(4x+1)$　　(4)　$(a-2)(a^2+a-1)$

7 公式による展開①

●乗法公式(Ⅰ)

$\boxed{1}$　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$　　（和の平方）

$\boxed{1}'$　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$　　（差の平方）

$\boxed{2}$　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$　　（和と差の積）

$\boxed{3}$　$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

例　(1)　$(2x+3)^2=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 3+3^2=4x^2+12x+9$

(2)　$(x+5)(x-5)=x^2-5^2=x^2-25$

(3)　$(x+2y)(x+3y)=x^2+(2y+3y)x+2y\cdot 3y=x^2+5xy+6y^2$

補足　上で用いた・は積を表し，×と同じ意味である。

4　次の式を展開せよ。

(1)　$(2x+1)^2$　　(2)　$(3x-1)^2$

(3)　$(3x+2y)^2$　　(4)　$(5a-2b)^2$

(5)　$(4x+5)(4x-5)$　　(6)　$(2x-5y)(2x+5y)$

(7)　$(x+3)(x-6)$　　(8)　$(x-3)(x-5)$

8 公式による展開②

●乗法公式(Ⅱ)

$\boxed{4}$　$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

$$(ax+b)(cx+d)=\underset{①}{acx^2}+(\underset{②}{ad}+\underset{③}{bc})x+\underset{④}{bd}$$

例　(1)　$(3x+1)(4x+3)=3\cdot 4x^2+(3\cdot 3+1\cdot 4)x+1\cdot 3$
$=12x^2+13x+3$

(2)　$(2x-y)(4x+3y)=2\cdot 4x^2+\{2\cdot 3+(-1)\cdot 4\}xy+(-1)\cdot 3y^2$
$=8x^2+2xy-3y^2$

(3)　$(3x-2y)(4x-3y)=3\cdot 4x^2+\{3\cdot(-3)+(-2)\cdot 4\}xy+(-2)\cdot(-3)y^2$
$=12x^2-17xy+6y^2$

5　次の式を展開せよ。

(1)　$(2x+1)(3x+2)$　　(2)　$(4x+3)(6x+1)$

(3)　$(3x-5)(4x+1)$　　(4)　$(2x+y)(3x+y)$

(5)　$(2x+3y)(3x-2y)$　　(6)　$(3x-y)(5x-2y)$

9 公式による展開③

●乗法公式(Ⅲ)

5　$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$　（３乗の和になる）

5′　$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$　（３乗の差になる）

例　(1)　$(x+2)(x^2-2x+4)=(x+2)(x^2-x\cdot2+2^2)$
$=x^3+2^3=x^3+8$

(2)　$(2x+1)(4x^2-2x+1)=(2x+1)\{(2x)^2-(2x)\cdot1+1^2\}$
$=(2x)^3+1^3=8x^3+1$

(3)　$(2x-3)(4x^2+6x+9)=(2x-3)\{(2x)^2+2x\cdot3+3^2\}$
$=(2x)^3-3^3=8x^3-27$

(4)　$(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)=(2x-y)\{(2x)^2+2x\cdot y+y^2\}$
$=(2x)^3-y^3=8x^3-y^3$

6　次の式を展開せよ。

(1)　$(3x+4)(9x^2-12x+16)$

(2)　$(4x-3y)(16x^2+12xy+9y^2)$

(3)　$(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$

10 公式による展開④

●乗法公式(Ⅳ)

6　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$　（和の３乗）

6′　$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$　（差の３乗）

例　(1)　$(2x+1)^3=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot1+3\cdot(2x)\cdot1^2+1^3$
$=8x^3+12x^2+6x+1$

(2)　$(3x-2)^3=(3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot2+3\cdot(3x)\cdot2^2-2^3$
$=27x^3-54x^2+36x-8$

(3)　$(x-2y)^3=x^3-3\cdot x^2\cdot2y+3\cdot x\cdot(2y)^2-(2y)^3$
$=x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$

7　次の式を展開せよ。

(1)　$(x+3)^3$　　(2)　$(2x-4)^3$

(3)　$(3x-y)^3$　　(4)　$(3x-2y)^3$

(5)　$(2x+5y)^3$　　(6)　$(2xy+1)^3$

11 式の展開の工夫①

例 題　次の式を展開せよ。

(1)　$(x+y-2)^2$　　(2)　$(a-2b+c)(a+2b+c)$

考え方　項数の多い式や複雑な式の展開は，おき換えをすることで，乗法公式が使える形にする。

解 答　(1)　$x+y=A$ とおくと，

$$(x+y-2)^2=(A-2)^2=A^2-4A+4$$
$$=(x+y)^2-4(x+y)+4$$
$$=\boldsymbol{x^2+2xy+y^2-4x-4y+4}\quad \boxed{答}$$

(2)　$a+c=A$ とおくと，

$$(a-2b+c)(a+2b+c)=(A-2b)(A+2b)=A^2-4b^2$$
$$=(a+c)^2-4b^2=\boldsymbol{a^2+2ac+c^2-4b^2}\quad \boxed{答}$$

8　次の式を展開せよ。

(1)　$(-x+y+z)^2$　　(2)　$(a+2b+3c)^2$

(3)　$(x+y+1)(x+y+2)$　　(4)　$(x-2y+2)(x+2y-2)$

12 式の展開の工夫②

例 題　次の式を展開せよ。

(1)　$(x-2)(x-4)(x+1)(x-1)$　　(2)　$(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)^2$

考え方　かける組み合わせを工夫することで，乗法公式が使える形にする。

解 答　(1)　$(x-2)(x-4)(x+1)(x-1)=(x-2)(x-1)\times(x-4)(x+1)$

$$=\{(x^2-3x)+2\}\{(x^2-3x)-4\}$$
$$=(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)-8$$
$$=x^4-6x^3+9x^2-2x^2+6x-8$$
$$=\boldsymbol{x^4-6x^3+7x^2+6x-8}\quad \boxed{答}$$

(2)　$(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)^2=\{(x-1)(x+1)(x^2+1)\}^2$

$$=\{(x^2-1)(x^2+1)\}^2$$
$$=(x^4-1)^2=\boldsymbol{x^8-2x^4+1}\quad \boxed{答}$$

9　次の式を展開せよ。

(1)　$(x+1)(x-1)(x-3)(x-5)$

(2)　$(x+2y)^2(x-2y)^2$

(3)　$(a+2)(a^3-8)(a^2-2a+4)$

問題 A

1　**［整式の次数］**　次の整式は何次式か。また，［　］内の文字に着目した場合は何次式か。

(1)　ax^3+bx^2+cx+d　$[x]$

(2)　$ax^2+2bxy-cy^2$　$[x$ と $y]$

2　**［整式の整理］**　次の整式を，x について降べきの順に整理せよ。

(1)　$2x^2+y^2-3xy-2y^2+4xy-x^2$

(2)　$ax^3+a^2x-2x^2-a^3-3ax^3+4a^3$

3　**［整式の加法と減法］**　$A=7x-5y+17z$，$B=6x+13y-5z$ であるとき，次の式を計算せよ。

(1)　$A+B$　(2)　$A-B$　(3)　$2A-3B$

4　**［単項式の乗法］**　次の計算をせよ。

(1)　$x\times x^4$　(2)　$3x^2\times(-2x^4)$　(3)　$(2a^3)^2$

(4)　$a^2\times(-2b^3)^2$　(5)　$xy^3\times 4x^2y$　(6)　$(2x^2y^2)^3\times(-2x^3y)^2$

5　**［公式による展開］**　次の式を展開せよ。

(1)　$(4x-3y)^2$　(2)　$(2x-3)(2x+3)$　(3)　$(3x-y)(2x+3y)$

(4)　$(2a-b)(2a+b)$　(5)　$(3x+4y)(5x-6y)$　(6)　$(4a-3b)(3a-4b)$

(7)　$(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$　(8)　$(2x-3)^3$　(9)　$(a+5b)^3$

6　**［式の展開の工夫］**　次の式を展開せよ。

(1)　$(a-b+c)^2$　(2)　$(x+y-1)^2$

(3)　$(x+y+3)(x-4+y)$　(4)　$(x^2-x+1)(x^2-x+2)$

(5)　$(x+2)^2(x-2)^2$　(6)　$x(x+1)(x+2)(x+3)$

問題 B

1 次の整式A，B，Cについて，あとの計算をせよ。

$A=2a^2+3ab+b^2$，　$B=a^2+ab-b^2$，　$C=3ab-2a^2-b^2$

(1) $A+B-C$　　(2) $2A-(A-B+2C)$

2 次の式を展開せよ。

(1) $(3x+4y)(2x-y)$　　(2) $(3ab+1)(2ab-3)$

(3) $(-2b-a)(a-2b)$　　(4) $(x-2)(x^2+2x+4)$

(5) $(2x+3y)^3$　　(6) $(a+b+c)(a+b-c)$

(7) $(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$　　(8) $(x-2)(x-6)(x+4)(x+8)$

(9) $(a+b)^3(a-b)^3$　　(10) $(x-1)(x+1)(x^2+1)$

3 次の式を展開せよ。

$(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3$

4 $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

が成り立つことを用いて，次の式を展開せよ。

$(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)$

5 $(2x^2-3xy-y^2)(3x^2-2xy+y^2)$ を展開したとき，次のものを求めよ。

(1) x^3yの項の係数

(2) x^2y^2の項の係数

(3) xy^3の項の係数

章末問題

基本問題

1 次の式を展開せよ。

(1) $(4x+3y)(3y+5x)$　(2) $(a-b)^3-(b-a)^3$

(3) $(3x+3y-z)(x+y+z)$　(4) $(x-1)(x-2)(x^2-3x)$

2 次の式を因数分解せよ。

(1) $3x^2+17xy+10y^2$　(2) $24x^3+81y^3$

(3) $(x+y)^3-z^3$　(4) $x^2-(3y+1)x+(y+4)(2y-3)$

3 次の不等式を解け。

(1) $\begin{cases} 4x+2 \leqq 5x+7 \\ -x+4>2(x-1)-2 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 0.1x-0.2<0.3x+0.5 \\ 2x+10 \leqq 11-2x \end{cases}$

(3) $|x-3| \geqq 2$　(4) $\sqrt{(2x+5)^2}<2$

4 $x=\sqrt{2}-1$ のとき，$x+\dfrac{1}{x}$，$x^2+\dfrac{1}{x^2}$ の値を求めよ。

5 ある長方形の1辺の長さは，もう1辺の長さより 8 cm短い。この長方形の短い方の辺を 2 cm長くし，長い方の辺を 4 cm短くしたところ，もとの長方形の面積より大きくなった。もとの長方形の短い方の辺の長さの範囲を求めよ。

6 $U=\{x \mid -5 \leqq x \leqq 5,\ x \in Z\}$ を全体集合とするとき，その部分集合 $A=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$，$B=\{-4,\ -2,\ 0,\ 2\}$ について，次の集合を求めよ。ただし，Z は整数全体の集合とする。

(1) $A \cap B$　(2) $A \cup B$　(3) $\overline{A} \cap B$　(4) $\overline{A} \cup \overline{B}$

7 次の$\boxed{}$に，必要，十分，必要十分のうち，最も適するものを入れよ。

(1) $|a|=1$ は $a^2=1$ であるための$\boxed{}$条件である。

(2) $a \geqq 1$ は $a>1$ であるための$\boxed{}$条件である。

(3) 四角形ABCDが平行四辺形であることは，AB // DC であるための$\boxed{}$条件である。

8 次の命題の真偽を調べよ。また，その命題の逆，裏，対偶を述べ，それらの真偽を調べよ。ただし，x は実数，n は整数とする。

(1) $x>2 \Rightarrow |x|>2$　(2) $x \neq 1 \Rightarrow x^2-6x+5 \neq 0$

(3) $x^2-x=0 \Rightarrow$「$x=0$ または $x=1$」　(4) n は偶数 $\Rightarrow n+1$ は奇数

発展問題

9 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2-4(y+z)^2$　　(2) $a^2-ab+3a+2b-10$

(3) $x^2+5xy+6y^2+y-1$　　(4) $3x^2-2xy-y^2+16x+4y+5$

10 $(5x^3-6x^2+3x-4)(2x^4+3x^3-x^2-7x+8)$ を展開したときの，x^5 の係数を求めよ。

11 次の問いに答えよ。

(1) $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{3}$ のとき，$x^3+\dfrac{1}{x^3}$ の値を求めよ。

(2) $\sqrt{x^2}+\sqrt{(x-3)^2}$ の根号をはずし，簡単にせよ。

(3) $\sqrt{4+\sqrt{15}}+\dfrac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}}$ を簡単にせよ。

12 次の方程式，不等式を解け。

(1) $|1-2x|=x+5$　　(2) $2|x-2|\leqq 3x+1$

(3) $|x|+|x-1|>4$　　(4) $|x|+|1-2x|=5$

13 連立不等式 $\begin{cases} 3x+2>4x-5 \\ x+a\leqq 2x+1 \end{cases}$ を同時に満たす整数 x がちょうど 2 個あるような a の値の範囲を定めよ。

14 次の $\boxed{}$ の中に，記号 $\subset$，$=$，$\supset$ のうち最も適当なものを入れよ。

整数全体の集合を Z とする。集合 $A=\{x|0\leqq x\leqq 6,\ x\in Z\}$，$B=\{x|x^2-6x+8=0\}$，$C=\{2n|n=1,\ 2\}$ について，$A\boxed{}B$，$B\boxed{}C$，$A\boxed{}C$ である。

15 対偶を利用して，次の命題を証明せよ。ただし，x，y は実数，n は整数とする。

(1) $xy(x+y)>0 \Rightarrow$「$x>0$ または $y>0$」

(2) $4n$ は 3 の倍数 $\Rightarrow n$ は 3 の倍数

16 自然数 a，b，c が $a^2+b^2=c^2$ を満たすならば，a，b のうち少なくとも 1 つは偶数であることを背理法を用いて証明せよ。

第 2 章　2次関数

1　関数とグラフ

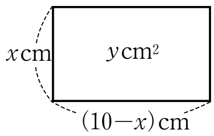
1　関数，定義域

❶　2つの変数 x，y があって，x の値を決めるとそれに対応して y の値がただ1つ定まるとき，y は x の**関数**であるという。

例　分速80mで x 分間歩くときに進む道のりを y m とすると，$y=80x$
y は x の関数である。

❷　y が x の関数のとき，変数 x のとりうる値の範囲を，その関数の**定義域**という。

例　縦と横の長さの和が10cmの長方形をつくる。
縦の長さを x cm，面積を $y\,\mathrm{cm}^2$ とすると，
$y=x(10-x)$　　すなわち，$y=-x^2+10x$
定義域は，$x>0$ かつ $10-x>0$ から，$0<x<10$
このことを，$y=-x^2+10x\ (0<x<10)$ と書く。



1　次の y を x の式で表し，定義域も示せ。

(1)　1200mの道のりを分速80mで歩く。x 分間歩いたときの残りの道のりを y m とする。

(2)　周の長さが10cmの長方形をつくる。縦の長さを x cm，面積を $y\,\mathrm{cm}^2$ とする。

2　関数の値

❶　x の関数 y を表す式を $f(x)$，$g(x)$ などと書くことがある。
関数 $\boldsymbol{y=f(x)}$ を，単に**関数** $\boldsymbol{f(x)}$ ともいう。

例　(1)　関数 $f(x)=-2x+3$　　(2)　関数 $f(x)=x^2+2x-3$

❷　関数 $y=f(x)$ の x に a を代入したときの y の値を $\boldsymbol{f(a)}$ と書く。
これを関数 $f(x)$ の $x=a$ における**値**という。

例　関数 $f(x)=-2x+3$ について，
(1)　$f(3)=-2\cdot3+3=-3$　　(2)　$f(-1)=-2\cdot(-1)+3=5$

2　関数 $f(x)=x^2+2x-3$ について，次の値を求めよ。

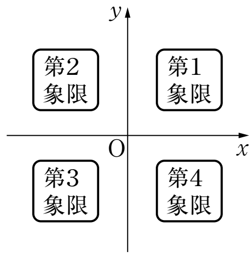
(1)　$f(0)$　　(2)　$f(2)$　　(3)　$f(-3)$　　(4)　$f(a-1)$

3 座標平面

❶ 座標軸の定められた平面を**座標平面**という。

座標軸で分けられた座標平面の 4 つの部分を，図のようにそれぞれ**第 1 象限，第 2 象限，第 3 象限，第 4 象限**という。

ただし，座標軸はどの象限にも属さないものとする。



各象限の x 座標，y 座標の符号を$(+,\ +)$のように表すと，次のようになる。

第 1 象限…$(+,\ +)$，第 2 象限…$(-,\ +)$

第 3 象限…$(-,\ -)$，第 4 象限…$(+,\ -)$

例　点$(-3,\ 2)$は第 2 象限の点で，点$(-1,\ -5)$は第 3 象限の点である。

❷ 点P$(a,\ b)$と，座標軸や原点に関して対称な点の座標は，次のようになる。

x 軸に関して対称な点Q…$\boldsymbol{(a,\ -b)}$

y 軸に関して対称な点R…$\boldsymbol{(-a,\ b)}$

原点に関して対称な点S…$\boldsymbol{(-a,\ -b)}$

例　点$(3,\ -4)$と，x 軸，y 軸，原点に関して対称な点の座標は，それぞれ，
x 軸…$(3,\ 4)$，y 軸…$(-3,\ -4)$，原点…$(-3,\ 4)$

3　次の点は，第何象限の点か。

(1)　$(2,\ 5)$　　(2)　$(3,\ -2)$　　(3)　$(-4,\ -1)$　　(4)　$(-1,\ 3)$

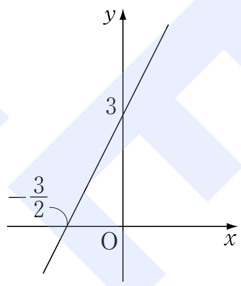
4　点$(-2,\ 1)$と，①x 軸，②y 軸，③原点　に関して対称な点の座標をそれぞれ求めよ。

4 関数のグラフ

● 関数 $y=f(x)$ について，$y=f(x)$ を満たす点$(x,\ f(x))$全体でつくられる座標平面上の図形を，この関数の**グラフ**という。

例　1 次関数 $y=2x+3$ のグラフは，点$(0,\ 3)$を通り，傾きが 2 の直線で，グラフは右の図のようになる。

この直線は，$y=2x+3$ を満たす点$(x,\ 2x+3)$全体でつくられる図形である。



5　次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y=-2x+6$　　(2)　$y=-\dfrac{1}{2}x^2$

5 関数の値域

●関数 $y=f(x)$ について，x が定義域全体を動くとき，x に対応する $f(x)$ のとりうる値の範囲，すなわち y の変域を，この関数の**値域**という。

例　関数 $y=2x-1$ $(1\leqq x<3)$ の値域

この関数のグラフは，関数 $y=2x-1$ のグラフのうち，$1\leqq x<3$ に対応する部分である。

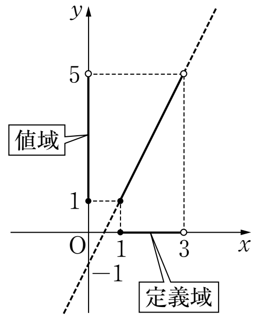
$x=1$ のとき，　$y=2\cdot1-1=1$

$x=3$ のとき，　$y=2\cdot3-1=5$

よって，グラフは右の図の実線部分である。

ただし，点$(1,\ 1)$を含み，点$(3,\ 5)$は含まない。

求める値域は，　$1\leqq y<5$



6　次の関数のグラフをかき，その値域を求めよ。

(1)　$y=\dfrac{1}{2}x+4$　$(-2<x<4)$　　(2)　$y=-x+4$　$(-1<x\leqq4)$

6 関数の最大値・最小値

●関数の値域に最大の値があるとき，その値を関数の**最大値**という。

また，最小の値があるとき，その値を**最小値**という。

例　(1)　関数 $y=-2x+5$ $(-1\leqq x\leqq3)$ の最大・最小

この関数のグラフは，右の図の実線部分である。

よって，関数の値域は，$-1\leqq y\leqq7$ であり，

$x=-1$ で最大値 7，$x=3$ で最小値 -1 をとる。

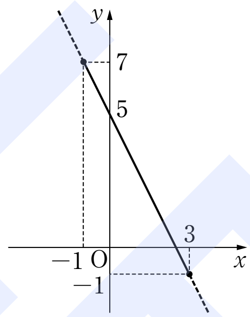
(2)　関数 $y=2x-1$ $(1\leqq x<3)$ の最大・最小

この関数の値域は，$1\leqq y<5$ である。（5 の例）

よって，この関数は，

$x=1$ で最小値 1 をとる。最大値はない。

補足　y は 5 にいくらでも近い値をとるが，$y=5$ となることはない。最大値は存在しない。



7　次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=3x-1$　$(-1\leqq x\leqq2)$　　(2)　$y=-\dfrac{1}{2}x+6$　$(2\leqq x<6)$

2　2次関数のグラフ

7　2次関数

●関数 y が x の 2 次式で表されるとき，y は x の **2 次関数**であるという。

一般形は，$a \neq 0$ として，$y=ax^2+bx+c$ と表される。

例　(1)　半径が x cmの円の面積を y cm^2 とすると，$y=\pi x^2$

y は x の 2 次関数である。一般形で，$a=\pi$，$b=c=0$ の場合。

(2)　縦と横の長さの和が10 cmの長方形で，縦を x cm，面積を y cm^2 とすると，

$y=-x^2+10x$ $(0<x<10)$ … 1 ❷の例

y は x の 2 次関数である。一般形で，$a=-1$，$b=10$，$c=0$ の場合。

1　次の y を x で表せ。また，y が x の 2 次関数であるものを選べ。

(1)　対角線の長さが x cm，$(x-2)$ cmのひし形の面積を y cm^2 とする。

(2)　面積が10 cm^2 のひし形の 2 つの対角線の長さを x cm，y cmとする。

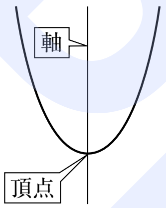
(3)　1 辺が $(x+3)$ cmの正方形と 1 辺が x cmの正方形の面積の和を y cm^2 とする。

(4)　1 辺が $(x+3)$ cmの正方形と 1 辺が x cmの正方形の面積の差を y cm^2 とする。

8　$y=ax^2$ のグラフ

❶　2 次関数 $y=ax^2$ のグラフの形の曲線を**放物線**という。放物線は対称の軸をもつ。この直線を放物線の**軸**という。

また，軸と放物線の交点を**頂点**という。



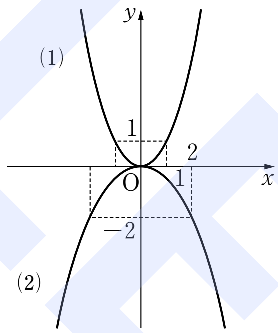
❷　**2 次関数 $y=ax^2$ のグラフ**

軸は **y 軸**，頂点は**原点**である放物線。

$a>0$ のとき，**下に凸**となり，

$a<0$ のとき，**上に凸**となる。

例　(1)　$y=x^2$ のグラフ　　(2)　$y=-\frac{1}{2}x^2$ のグラフ



2　次の 2 次関数のグラフをかけ。また，その放物線は上，下どちらに凸か。

(1)　$y=2x^2$　　(2)　$y=-x^2$　　(3)　$y=-\frac{1}{4}x^2$

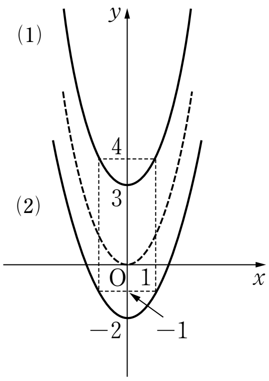
9 $y=ax^2+q$ のグラフ

❶ 平面上で，図形上の各点を一定の方向に一定の距離だけ動かすことを**平行移動**という。

❷ **２次関数 $y=ax^2+q$ のグラフ**

$y=ax^2$ のグラフを **y 軸方向に q だけ平行移動した放物線**。

軸は **y 軸**，頂点は**点$(0,\ q)$**



例　(1)　$y=x^2+3$ のグラフ

$y=x^2$ のグラフを y 軸方向に 3 だけ平行移動。

軸は y 軸，頂点は点$(0,\ 3)$

(2)　$y=x^2-2$ のグラフ $\longrightarrow y=x^2+(-2)$

$y=x^2$ のグラフを y 軸方向に -2だけ平行移動

（y 軸の負の方向に 2 だけ平行移動）。

軸は y 軸，頂点は点$(0,\ -2)$

3　次の 2 次関数のグラフをかけ。また，その頂点を求めよ。

(1)　$y=x^2+2$　　(2)　$y=\dfrac{1}{2}x^2-4$　　(3)　$y=-2x^2+5$

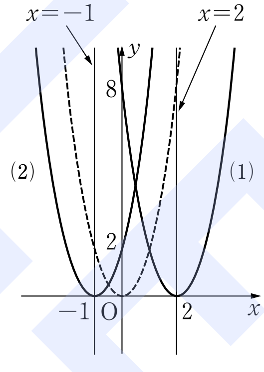
10 $y=a(x-p)^2$ のグラフ

❶ 点$(p,\ 0)$を通り y 軸に平行な直線を，**直線 $x=p$** という。

❷ **２次関数 $y=a(x-p)^2$ のグラフ**

$y=ax^2$ のグラフを **x 軸方向に p だけ平行移動した放物線**。

軸は**直線 $x=p$**，頂点は**点$(p,\ 0)$**



例　(1)　$y=2(x-2)^2$ のグラフ

$y=2x^2$ のグラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動。

軸は直線 $x=2$，頂点は点$(2,\ 0)$

(2)　$y=2(x+1)^2$ のグラフ $\longrightarrow y=2\{x-(-1)\}^2$

$y=2x^2$ のグラフを x 軸方向に -1だけ平行移動。

軸は直線 $x=-1$，頂点は点$(-1,\ 0)$

4　次の 2 次関数のグラフをかけ。また，その軸と頂点を求めよ。

(1)　$y=(x-3)^2$　　(2)　$y=-(x+2)^2$　　(3)　$y=-\dfrac{1}{2}(x-2)^2$

11　$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

● **2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフ**

$y=ax^2$ のグラフを **x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した放物線。**

軸は**直線 $x=p$**，頂点は**点 $(p,\ q)$**

例　(1)　$y=2(x-1)^2-2$ のグラフ

$y=2x^2$ のグラフを

x 軸方向に1，y 軸方向に -2 だけ平行移動。

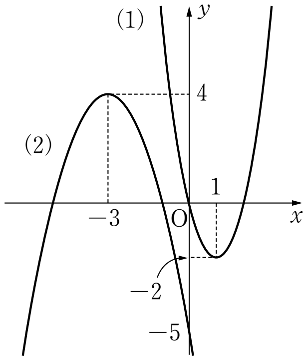
軸は直線 $x=1$，頂点は点 $(1,\ -2)$

(2)　$y=-(x+3)^2+4$ のグラフ

$y=-x^2$ のグラフを

x 軸方向に -3，y 軸方向に4だけ平行移動。

軸は直線 $x=-3$，頂点は点 $(-3,\ 4)$



5　次の2次関数のグラフをかけ。また，その軸と頂点を求めよ。

(1)　$y=(x-2)^2+1$　　(2)　$y=2(x+1)^2-4$

(3)　$y=-2(x-3)^2+8$　　(4)　$y=-\dfrac{1}{2}(x+2)^2-2$

12　平方完成

● 2次式 ax^2+bx+c を $a(x-p)^2+q$ の形に変形することを，**平方完成**するという。

例　(1)　x^2+6x+4

$=(x^2+6x)+4$　……①

6の半分　(6の半分)^{2}を引く

$=\{(x+3)^2-3^2\}+4$　……②

$=(x+3)^2-3^2+4$　……③

$=(x+3)^2-5$

(2)　$2x^2-8x+9$

$=2(x^2-4x)+9$　……①

4の半分　(4の半分)^{2}を引く

$=2\{(x-2)^2-2^2\}+9$　……②　←$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$ から，

$=2(x-2)^2-2\cdot2^2+9$　……③　$x^2+2ax=(x+a)^2-a^2$

$=2(x-2)^2+1$

平方完成の手順

① x を含む項だけを，x^2 の係数でくくる。

② ①のかっこの中を，次のように変形する。

$$x^2+\blacksquare x=\left(x+\frac{\blacksquare}{2}\right)^2-\left(\frac{\blacksquare}{2}\right)^2$$

③ { }をはずし，整理する。

6　次の２次式を平方完成せよ。

(1)　x^2+8x+9　　(2)　$-x^2+6x+4$

(3)　$2x^2+2x-1$　　(4)　$\dfrac{1}{2}x^2-2x-3$

13　$y=ax^2+bx+c$ のグラフ

例　題　２次関数 $y=-x^2+4x-1$ のグラフをかけ。また，その軸と頂点を求めよ。

考え方　右辺を平方完成して，$y=a(x-p)^2+q$ の形に変形する。

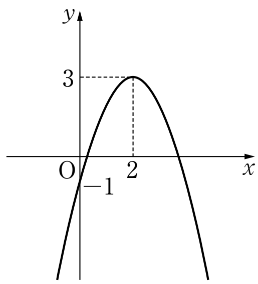
解　答　$-x^2+4x-1=-(x^2-4x)-1$

$$=-\{(x-2)^2-2^2\}-1$$
$$=-(x-2)^2+2^2-1$$
$$=-(x-2)^2+3$$

よって，　$y=-(x-2)^2+3$

したがって，この関数のグラフは右の図のような放物線である。

また，軸は**直線 $x=2$**，頂点は**点 $(2,\ 3)$**　答



7　次の２次関数のグラフをかけ。また，その軸と頂点を求めよ。

(1)　$y=x^2-4x+3$　　(2)　$y=-2x^2-4x+3$

(3)　$y=\dfrac{1}{2}x^2+3x$　　(4)　$y=x^2+3x+1$

14　放物線の平行移動①

例　題　放物線 $y=x^2+2x+4$ は，どのように平行移動すると，放物線 $y=x^2-4x+5$ に重なるか。

考え方　２つの放物線は，x^2 の係数が等しいとき，一方を平行移動して，他方に重ねることができる。

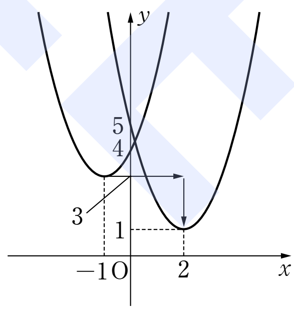
２つの放物線の頂点の移動に着目する。

解　答　$y=x^2+2x+4$ を変形すると，　$y=(x+1)^2+3$

$y=x^2-4x+5$ を変形すると，　$y=(x-2)^2+1$

よって，頂点は点 $(-1,\ 3)$ から点 $(2,\ 1)$ に移る。

したがって，**x 軸方向に 3，y 軸方向に -2** だけ平行移動すればよい。　答



8　放物線 $y=2x^2+4x+3$ は，どのように平行移動すると，次の放物線に重なるか。

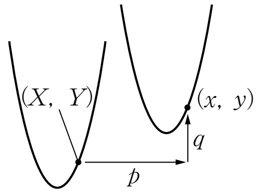
(1)　$y=2x^2-4x-1$　　　　(2)　$y=2x^2+8x+11$

15 放物線の平行移動②

● 放物線 $y=ax^2+bx+c$　……(*)

を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した放物線の方程式は，(*)において　x を $x-p$，　y を $y-q$

でおき換えた　$y-q=a(x-p)^2+b(x-p)+c$　である。



$$\begin{cases} X=x-p \\ Y=y-q \end{cases}$$

例　放物線 $y=2x^2-4x+1$ を

x 軸方向に -3，y 軸方向に 2 だけ平行移動した放物線の方程式は，x を $x-(-3)$ すなわち $x+3$，

y を $y-2$ でおき換えて，

$y-2=2(x+3)^2-4(x+3)+1$

整理して，$y=2x^2+8x+9$

9　放物線 $y=-x^2+2x+2$ を，x 軸方向に 2，y 軸方向に -4 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

16 放物線の対称移動

❶　平面上で，図形上の各点を，直線や点に関して対称な位置に移すことを**対称移動**という。

❷　放物線 $y=ax^2+bx+c$ ……(*) を，x 軸，y 軸，原点に関してそれぞれ対称移動した放物線の方程式は，(*)において，

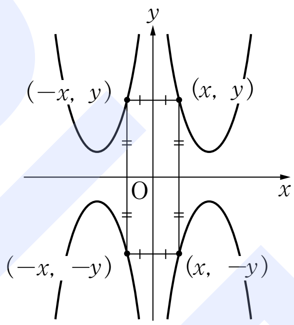
x 軸対称：y を $-y$ でおき換えて，　$-y=ax^2+bx+c$

y 軸対称：x を $-x$ でおき換えて，

$$y=a(-x)^2+b(-x)+c$$

原点対称：x を $-x$，y を $-y$ でおき換えて，

$$-y=a(-x)^2+b(-x)+c$$



例　放物線 $y=-x^2+6x-4$ を

x 軸に関して対称移動した放物線の方程式は，

y を $-y$ でおき換えて，　$-y=-x^2+6x-4$

すなわち，　$y=x^2-6x+4$

10　放物線 $y=2x^2-8x-5$ を，x 軸，y 軸，原点に関してそれぞれ対称移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

問題 A

1　**［関数，定義域］**　次の y を x で表し，定義域も示せ。

(1)　60Lの水の入った水槽から，毎分５Lの割合で水を流し出す。流し始めてから x 分後に水槽に残っている水の量を y Lとする。

(2)　横が縦より長い長方形をつくる。周の長さが40cmのとき，縦の長さを x cm，面積を y cm^2 とする。

2　**［関数の値］**　関数 $f(x)=-2x^2+5x+3$ について，次の値を求めよ。

(1)　$f(0)$　　(2)　$f(-2)$　　(3)　$f(2a)$　　(4)　$f(a+2)$

3　**［関数の値域，最大値・最小値］**　次の関数のグラフをかき，その値域を求めよ。また，最大値，最小値があればそれを求めよ。

(1)　$y=2x-5\quad(-1\leqq x\leqq 3)$　　(2)　$y=-3x+6\quad(0<x\leqq 2)$

(3)　$y=\dfrac{1}{2}x-1\quad(-2<x<6)$　　(4)　$y=-\dfrac{1}{3}x+5\quad(-3\leqq x<6)$

4　**［$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ］**　次の２次関数のグラフをかけ。

(1)　$y=x^2-4$　　(2)　$y=-\dfrac{1}{2}x^2+2$　　(3)　$y=\dfrac{1}{2}(x+2)^2$

(4)　$y=-2(x-1)^2$　　(5)　$y=(x-3)^2-1$　　(6)　$y=2(x+1)^2-3$

5　**［$y=ax^2+bx+c$ のグラフ］**　次の２次関数のグラフをかけ。また，軸と頂点を求めよ。

(1)　$y=x^2+6x+10$　　(2)　$y=2x^2-8x+4$

(3)　$y=-\dfrac{1}{2}x^2+x+2$　　(4)　$y=-x^2-x+2$

6　**［放物線の平行移動］**　放物線 $y=-3x^2+6x$ は，どのように平行移動すると，次の放物線に重なるか。

(1)　$y=-3x^2+12x-13$　　(2)　$y=-3x^2-6x+2$

問題 B

1　1次関数 $f(x)=ax+b$ について，$f(1)=-4$，$f(3)=0$ のとき，定数 a，b の値を求めよ。

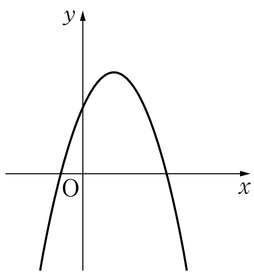
2　次の2次関数のグラフをかけ。また，軸と頂点を求めよ。

(1)　$y=x^2+5x+5$　　(2)　$y=2x-\frac{1}{2}x^2$

(3)　$y=(x+1)(x-3)$　　(4)　$y=-x(2x-1)$

(5)　$y=\frac{1}{2}(x-1)(x-5)$　　(6)　$y=-2(x+2)(x-2)$

3　2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが右の図のようになるとき，a，b，c の値の符号を求めよ。



4　放物線 $y=x^2-6x+7$ を，次のように平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

(1)　x 軸方向に2，y 軸方向に3だけ平行移動する。

(2)　x 軸方向に -5，y 軸方向に -1 だけ平行移動する。

5　x 軸方向に3，y 軸方向に -4 だけ平行移動すると，放物線 $y=-x^2+4x-5$ に重なるような放物線の方程式を求めよ。

6　放物線 $y=2x^2-5x+4$ を，次の直線または点に関して，それぞれ対称移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

(1)　x 軸　　(2)　y 軸　　(3)　原点

7　次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y=|x|$　　(2)　$y=|x-2|$　　(3)　$y=|x+1|+|x-1|$

第3章　図形と計量

1　鋭角の三角比

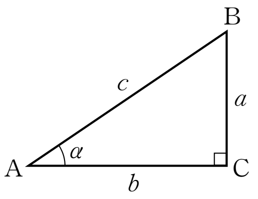
1　鋭角の三角比

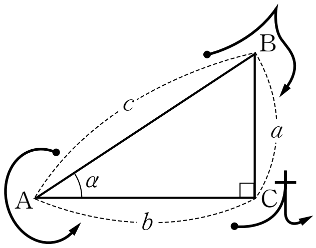
● 図のような $\angle C=90^\circ$ の直角三角形ABCにおいて，$\angle A=\alpha$ のとき，

α の正弦　$\sin\alpha=\dfrac{a}{c}$

α の余弦　$\cos\alpha=\dfrac{b}{c}$

α の正接　$\tan\alpha=\dfrac{a}{b}$





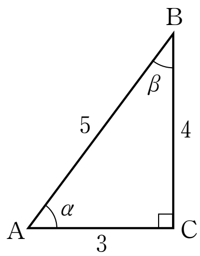
正弦，余弦，正接をまとめて**三角比**という。

例　右の図で，α の三角比の値は，

$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，　$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，　$\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$

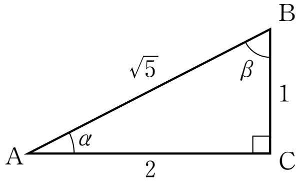
また，β の三角比は，$\angle B$ と各辺の位置関係に注意して（Bが左下にくるようにかき直してもよい），

$\sin\beta=\dfrac{3}{5}$，　$\cos\beta=\dfrac{4}{5}$，　$\tan\beta=\dfrac{3}{4}$

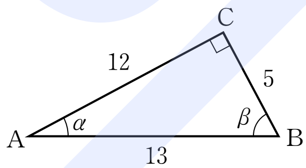


1　下の図において，α，β の三角比の値を求めよ。分母は有理化しなくてよい。

(1)



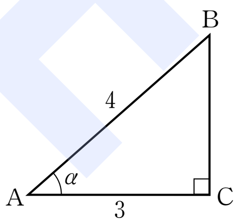
(2)



2　右の図の△ABCについて，次の問いに答えよ。

(1)　三平方の定理を使って，辺BCの長さを求めよ。

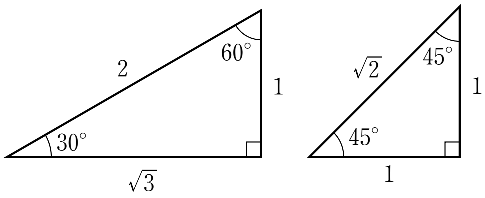
(2)　α の三角比の値を求めよ。



2 特別な角の三角比

例 題　右の図を使って，30°，45°，60°の三角比の値をそれぞれ求めよ。

考え方　三角比の値は，とくに指示のない限り，分母を有理化しなくてよい。



解 答　表にまとめると

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{\frac{1}{\sqrt{2}}}$	$\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$
$\cos\alpha$	$\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$	$\mathbf{\frac{1}{\sqrt{2}}}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$
$\tan\alpha$	$\mathbf{\frac{1}{\sqrt{3}}}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{\sqrt{3}}$

補足　以後の問題は，30°，45°，60°の三角比の値は既知のものとして出題される。覚えておくか，上の図を思い出してすぐに導けるようにしておく。

3　次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin 30°+\cos 60°$　　(2)　$\tan 45°\sin 60°\cos 30°$

3 三角比の表

例 題　巻末の三角比の表を使って，次の問いに答えよ。

(1)　$\sin 23°$，$\cos 50°$，$\tan 64°$ の値を求めよ。

(2)　$\sin\theta=0.68$，$\cos\theta=0.14$ となるような θ を求めよ。

考え方　三角比の表は，それぞれの値の小数第5位を四捨五入して第4位まで載せられている。(2)は，表の中から近い値をとる角を探す。

解 答　(1)　$\sin 23°=\mathbf{0.3907}$，　$\cos 50°=\mathbf{0.6428}$，　$\tan 64°=\mathbf{2.0503}$　答

(2)　$\sin\theta=0.68$ のとき，　$\theta\fallingdotseq\mathbf{43°}$　　$\cos\theta=0.14$ のとき，　$\theta\fallingdotseq\mathbf{82°}$　答

補足　$a\fallingdotseq b$ は，a と b がほぼ等しいことを表す。

4　三角比の表から，次の値を求めよ。

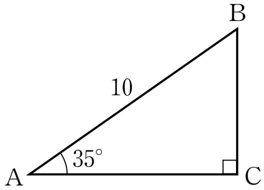
(1)　$\sin 65°$　　(2)　$\cos 18°$　　(3)　$\tan 37°$

5　三角比の表から，次のような θ を求めよ。

(1)　$\sin\theta=0.95$　　(2)　$\cos\theta=0.67$　　(3)　$\tan\theta=1.28$

4 三角比の利用

例 題　右の図の直角三角形ABCで，辺BC，ACの長さを求めよ。



考え方　$\sin 35° = \dfrac{BC}{AB}$，　$\cos 35° = \dfrac{AC}{AB}$

$\sin 35°$，$\cos 35°$の値は三角比の表から求める。

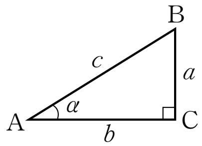
解 答　$\sin 35° = \dfrac{BC}{AB}$，$\cos 35° = \dfrac{AC}{AB}$ から，

$BC = AB \times \sin 35°$，　$AC = AB \times \cos 35°$

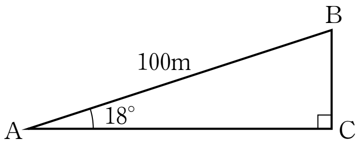
よって，$BC = 10 \times 0.5736 = \mathbf{5.736}$

$AC = 10 \times 0.8192 = \mathbf{8.192}$　答

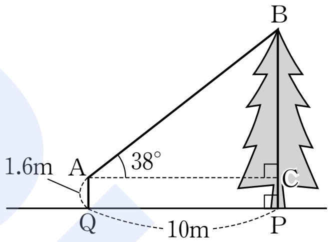
$\boldsymbol{a = c\sin\alpha}$
$\boldsymbol{a = b\tan\alpha}$
$\boldsymbol{b = c\cos\alpha}$



6　傾斜角18°の坂道をまっすぐに100m登ると，鉛直方向には何m登ったことになるか。また，水平方向には何m進んだことになるか。1m未満は四捨五入せよ。



7　木の根元から10m離れた地点に立って木の先端を見たら，見上げる角は38°であった。目の高さを1.6mとして，木の高さを求めよ。小数第２位を四捨五入せよ。



5 90°−θ の三角比

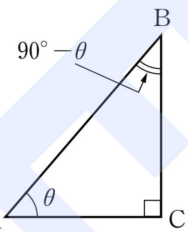
●90°−θ の三角比

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$
$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$
$\tan(90° - \theta) = \dfrac{1}{\tan\theta}$

例　(1)　$\sin 72° = \sin(90° - 18°) = \cos 18°$

(2)　$\cos 48° = \cos(90° - 42°) = \sin 42°$

(3)　$\tan 56° = \tan(90° - 34°) = \dfrac{1}{\tan 34°}$



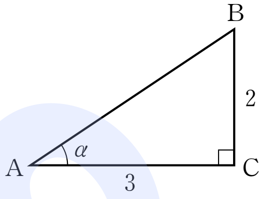
8　次の三角比を45°以下の角の三角比で表せ。

(1)　$\sin 55°$　　(2)　$\cos 78°$　　(3)　$\tan 67°$

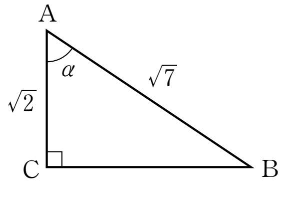
問題 A

1 ［鋭角の三角比］　次の図の直角三角形において，α の三角比の値を求めよ。

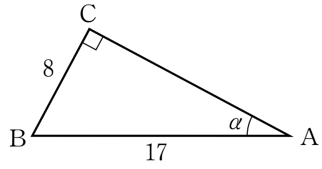
(1)



(2)

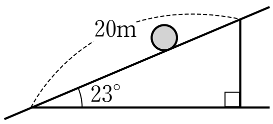


(3)

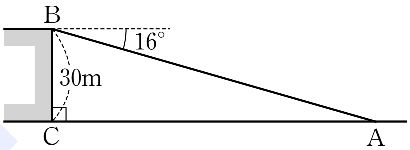


2 ［三角比の利用］　次の問いに答えよ。答えは，四捨五入して小数第1位まで求めよ。

(1)　ボールが傾斜角23°の斜面をまっすぐに20m転がった。ボールは鉛直方向には何m落下したことになるか。また，水平方向には何m進んだことになるか。



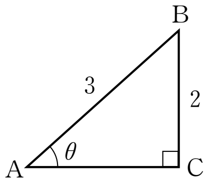
(2)　高さ30mの建物の屋上Bから地上の地点Aを見下ろす角は16°であった。建物からAまでの距離CAは約何mか。



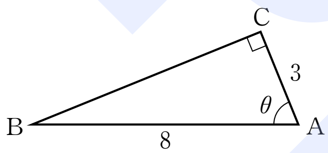
問題 B

1 次の図の直角三角形ABCにおいて，θ のおよその大きさを求めよ。

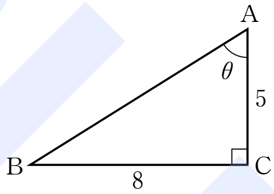
(1)



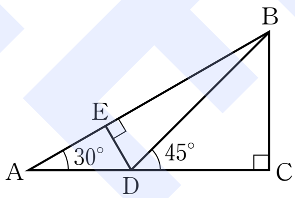
(2)



(3)



2 右の図において，AD＝2のとき，BCの長さを求めよ。
　また，図を利用して，sin15°の値を求めよ。ただし，分母は有理化して答えること。



3 三角形の3つの内角を α，β，γ とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\cos\dfrac{\gamma}{2}$　　(2)　$\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}\tan\dfrac{\gamma}{2}$

5 三角形の面積

24 三角形の面積の公式

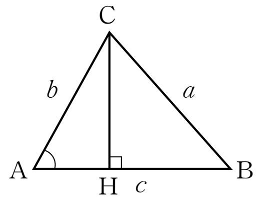
●△ABCの面積をSとすると，

$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C}$$

例　右の図で，△ABCの面積をSとすると，

$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CH}$　　ここで，$\mathrm{CH}=b\sin A$ であるから，

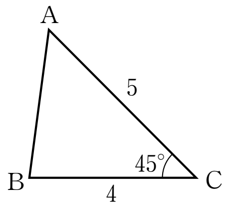
$S=\dfrac{1}{2}cb\sin A=\dfrac{1}{2}bc\sin A$



例　$a=4$，$b=5$，$C=45°$ のとき，△ABCの面積Sを求めてみよう。

$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot5\sin45°$

$=10\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$



1　次のような△ABCの面積Sを求めよ。

(1)　$a=4$，$c=6$，$B=30°$　　(2)　$b=5$，$c=8$，$A=120°$

(3)　$a=7$，$b=4$，$C=135°$　　(4)　1辺の長さがaである正三角形

25 三角形の面積（3辺の長さ）

例題　△ABCにおいて，3辺の長さが$a=4$，$b=6$，$c=5$のとき，次のものを求めよ。

(1)　$\cos B$　　(2)　$\sin B$　　(3)　面積S

考え方　(1)　余弦定理を使う。

(2)　三角比の相互関係 $\sin^2 B+\cos^2 B=1$ から求める。

(3)　面積の公式 24 を使う。

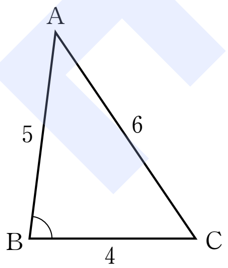
解答　(1)　余弦定理により，

$\cos B=\dfrac{5^2+4^2-6^2}{2\cdot5\cdot4}=\dfrac{5}{2\cdot5\cdot4}=\boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$　答

(2)　$\sin B>0$ であるから，

$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{8}\right)^2}=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{7}}{8}}$　答

(3)　$S=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot4\cdot\dfrac{3\sqrt{7}}{8}=\boldsymbol{\dfrac{15\sqrt{7}}{4}}$　答



補足　AやCを使ってもよい。計算過程は異なるが，もちろん面積は同じ結果となる。

2　△ABCにおいて，3辺の長さが $a=7$，$b=5$，$c=6$ のとき，次のものを求めよ。

(1)　$\cos A$　　(2)　$\sin A$　　(3)　面積 S

3　△ABCにおいて，3辺の長さが $a=5$，$b=7$，$c=8$ のとき，面積 S を求めよ。

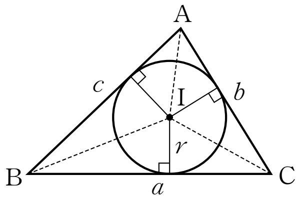
26 三角形の面積と内接円

❶　三角形のどの辺にも接する円を，その三角形の**内接円**という。

❷　△ABCの面積を S，内接円の半径を r とすると，

$$\boxed{S=\frac{1}{2}r(a+b+c)}$$

(右の図の点Ｉは内接円の中心)



例　$a=8$，$c=5$，$B=60°$ である△ABCの内接円の半径 r を求めてみよう。

余弦定理により，　$b^2=5^2+8^2-2\cdot5\cdot8\cos60°=49$

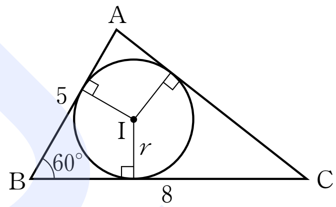
$b>0$ であるから，　$b=7$

よって，△ABCの面積を S とすると，

$S=\frac{1}{2}r(8+7+5)=10r$

一方，　$S=\frac{1}{2}\cdot5\cdot8\sin60°=10\sqrt{3}$

よって，$10r=10\sqrt{3}$ より，　$r=\sqrt{3}$



4　次のような三角形の内接円の半径 r を求めよ。

(1)　3辺の長さが8，15，17である直角三角形

(2)　$a=5$，$b=3$，$C=120°$ である△ABC

5　3辺の長さが $a=4$，$b=3$，$c=2$ である△ABCにおいて，次のものを求めよ。

(1)　面積 S

(2)　内接円の半径 r

(3)　外接円の半径 R

6　空間図形への応用

27 正四面体

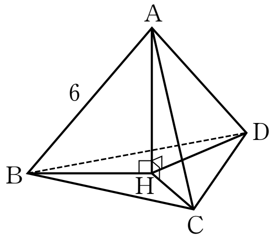
例 題　１辺の長さが６である正四面体ABCDにおいて，頂点Aから底面の△BCDに垂線AHを下ろす。

次の問いに答えよ。

(1)　点Hが△BCDの外接円の中心であることを示せ。

(2)　BHの長さを求めよ。

(3)　正四面体ABCDの体積Vを求めよ。



考え方　(1)　△ABH≡△ACH≡△ADH をいえばよい。

(2)　BHは△BCDの外接円の半径である。△BCDは正三角形である。

(3)　高さAHは三平方の定理により求める。

解 答　(1)　△ABH，△ACH，△ADHにおいて，

∠AHB＝∠AHC＝∠AHD＝90°，　AB＝AC＝AD，　AHは共通

直角三角形の斜辺と他の１辺がそれぞれ等しいので，

△ABH≡△ACH≡△ADH　　よって，　BH＝CH＝DH

ゆえに，Hは△BCDの外接円の中心である。

(2)　BHは△BCDの外接円の半径であるから，正弦定理により，

$\dfrac{6}{\sin 60^\circ}=2\mathrm{BH}$　　よって，　$\mathrm{BH}=\dfrac{6}{2\sin 60^\circ}=\dfrac{6}{\sqrt{3}}=\mathbf{2\sqrt{3}}$　答

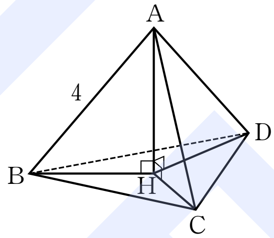
(3)　三平方の定理により，　$\mathrm{AH}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{3}\,)^2}=2\sqrt{6}$

よって，　$V=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 6^2\sin 60^\circ\cdot 2\sqrt{6}=\mathbf{18\sqrt{2}}$　答

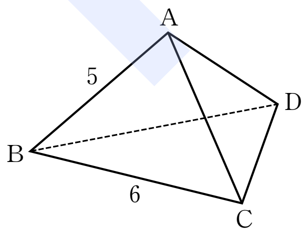
1　１辺の長さが４である正四面体において，頂点Aから底面の△BCDに垂線AHを下ろす。次のものを求めよ。

(1)　BHの長さ

(2)　正四面体の体積V

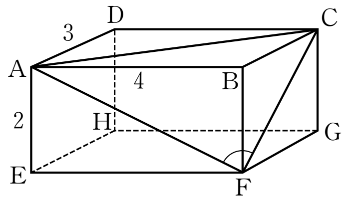


2　AB＝AC＝AD＝5，BC＝CD＝DB＝6 である四面体ABCDの体積Vを求めよ。



28 他の立体への応用

例 題　右の図のような，AB＝4，AD＝3，AE＝2 である直方体ABCD−EFGHがある。次のものを求めよ。



(1)　cos∠AFCの値

(2)　△AFCの面積 S

考え方　(1)　△AFCの 3 辺の長さについて調べ，余弦定理を用いる。

(2)　(1)から sin∠AFCの値を求め，面積の公式を使う。

解 答　(1)　三平方の定理により，

$AF^2=AB^2+BF^2=4^2+2^2=20$，　$CF^2=BC^2+BF^2=3^2+2^2=13$

$AC^2=AB^2+BC^2=4^2+3^2=25$

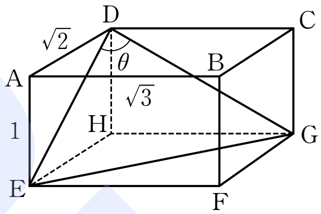
よって，△AFCにおいて，余弦定理により，

$\cos\angle AFC=\dfrac{AF^2+CF^2-AC^2}{2\cdot AF\cdot CF}=\dfrac{20+13-25}{2\cdot\sqrt{20}\cdot\sqrt{13}}=\dfrac{8}{4\sqrt{65}}=\dfrac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{65}}}$　答

(2)　(1)から，　$\sin\angle AFC=\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{\sqrt{65}}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{61}}{\sqrt{65}}$

よって，　$S=\dfrac{1}{2}\cdot AF\cdot CF\sin\angle AFC=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{20}\cdot\sqrt{13}\cdot\dfrac{\sqrt{61}}{\sqrt{65}}=\sqrt{\mathbf{61}}$　答

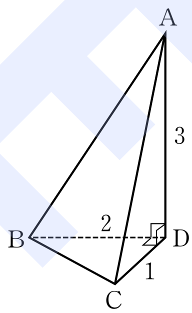
3　右の図のような，$AB=\sqrt{3}$，$AD=\sqrt{2}$，AE＝1 である直方体ABCD−EFGHがある。次のものを求めよ。



(1)　∠EDG＝θ とするとき，$\cos\theta$ の値

(2)　△DEGの面積 S

4　右の図は，∠ADB＝∠ADC＝∠BDC＝90° の三角錐ABCDである。AD＝3，BD＝2，CD＝1 のとき，次のものを求めよ。



(1)　△ABCの面積 S

(2)　頂点Dから面ABCに下ろした垂線DHの長さ

問題 A

1　［三角形の面積の公式］　次のような△ABCの面積Sを求めよ。

(1)　$b=7$，$c=8$，$A=60°$　　(2)　$c=5$，$a=4$，$B=150°$

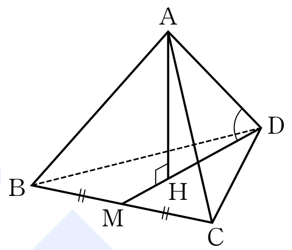
2　［三角形の面積（３辺の長さ）］　次のような△ABCの面積Sを求めよ。

(1)　$a=5$，$b=3$，$c=6$　　(2)　$a=4$，$b=5$，$c=\sqrt{31}$

3　［三角形の面積と内接円］　３辺の長さが$a=4$，$b=5$，$c=7$である△ABCにおいて，次のものを求めよ。

(1)　$\cos B$の値　　(2)　面積S　　(3)　内接円の半径r

4　［正四面体］　１辺の長さが６の正四面体ABCDにおいて，辺BCの中点をMとし，頂点Aから線分DMに下ろした垂線をAHとする。このとき，AHは△BCDを底面としたときの正四面体の高さになっている。次のものを求めよ。

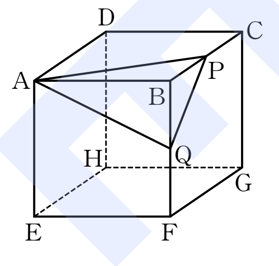


(1)　cos∠ADHの値

(2)　垂線AHの長さ

(3)　正四面体ABCDの体積V

5　［他の立体への応用］　右の図のような，１辺の長さが６である立方体ABCD−EFGHがある。点Pは辺BC上の点で，BP：PC＝1：2である。また，点Qは辺BFの中点である。次のものを求めよ。



(1)　cos∠PAQの値

(2)　△PAQの面積S

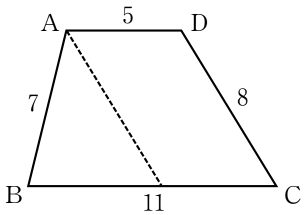
(3)　頂点Bから面APQに下ろした垂線の長さ

問題 B

1 △ABCの面積をS，外接円の半径をRとするとき，次の等式が成り立つことを示せ。

(1) $S=\dfrac{abc}{4R}$ (2) $S=2R^2\sin A\sin B\sin C$

2 AD∥BC の台形ABCDにおいて，
AB＝7，BC＝11，CD＝8，DA＝5 であるとき，
この台形の面積を求めよ。

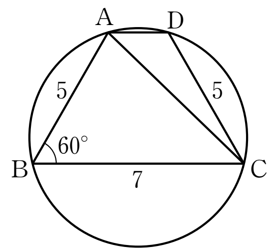


3 円に内接する四角形ABCDにおいて，AB＝5，BC＝7，CD＝5，∠B＝60° のとき，次のものを求めよ。

(1) 線分ACの長さ

(2) 線分ADの長さ

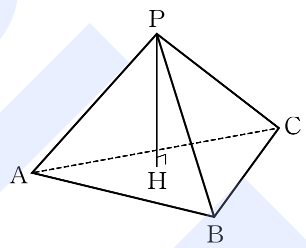
(3) 四角形ABCDの面積



4 右の図の三角錐PABCで，PA＝PB＝PC＝4，AB＝5，BC＝4，CA＝6 である。頂点Pから面ABCに下ろした垂線をPHとするとき，次のものを求めよ。ただし，(1)，(2)の分母は有理化しなくてよい。

(1) △ABCの外接円の半径 (2) 高さPH

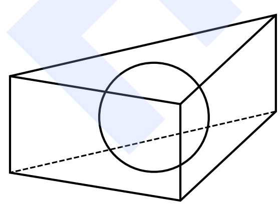
(3) 三角錐PABCの体積V



5 右の図のように，3辺の長さが13，14，15である三角形を底面とする三角柱に，三角柱の高さと同じ直径の球が内接している。次の問いに答えよ。

(1) 球の半径rを求めよ。

(2) 球の体積をV，表面積をSとし，三角柱の体積をV'，表面積をS'とするとき，$V:V'=S:S'$ であることを示せ。



第 4 章　データの分析

1　データの散らばり

1　範囲

●データの最大値から最小値を引いた差を，データの**範囲**という。

例　次のデータは，A市とB市の，ある年の月ごとの雨の日数を調べた結果である。

A市　8，12，8，11，5，14，14，8，13，11，9，7

B市　17，20，14，13，8，18，18，14，16，6，7，10　（日）

A市のデータの範囲は，14－5＝9（日）　←最大値は14，最小値は5

B市のデータの範囲は，20－6＝14（日）　←最大値は20，最小値は6

1　次のデータは，11人の生徒の身長を示している。データの範囲を求めよ。

161.5　150.2　160.9　148.8　158.0　156.6　162.4　156.9　152.0　161.3　167.1（cm）

2　四分位数

❶　データを値の大きさの順に並べたとき，4等分する位置にくる数を**四分位数**という。四分位数は，小さい方から順に**第1四分位数**，**第2四分位数**，**第3四分位数**という。

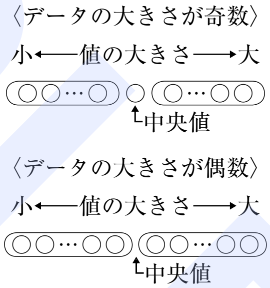
〈四分位数を求める手順〉

①　データの中央値を求める。　←第2四分位数

②　中央値を境界にして，データの個数を2等分して，

最小値を含む方の中央値を求める。　←第1四分位数

最大値を含む方の中央値を求める。　←第3四分位数



❷　データの第3四分位数と第1四分位数の差を**四分位範囲**という。また，四分位範囲の半分を**四分位偏差**という。

四分位範囲は，中央に並ぶ約50％のデータの数の散らばりの度合を表している。

❸　他のデータと比べて，値が大きく異なるデータを**外れ値**という。一般に，データの値xが以下の区間にあるとき，そのデータを外れ値と判断する。

$x<$(第1四分位数)－(四分位範囲)×1.5，(第3四分位数)＋(四分位範囲)×1.5$<x$

例　次のデータは，10人の生徒の数学のテストの結果を並べたものである。

39，42，46，54，58，62，64，69，77，82　（点）

第2四分位数は，このデータの中央値だから，$\dfrac{58+62}{2}=60$（点）

第1四分位数は，データ　39，42，46，54，58の中央値だから，　46点

第3四分位数は，データ　62，64，69，77，82の中央値だから，　69点

四分位範囲は，　69－46＝23（点）　四分位偏差は，　23÷2＝11.5（点）

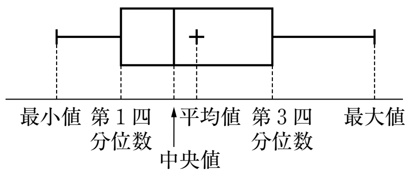
2　次のデータＡ，Ｂについて，四分位数，四分位範囲，四分位偏差をそれぞれ求めよ。また，外れ値があれば求めよ。

Ａ　38，45，47，53，56，57，60，65，69，74，80

Ｂ　41，46，54，56，60，63，66，71，75，97

3 箱ひげ図

●データの分布を表す方法に，右の図のような**箱ひげ図**がある。箱ひげ図は，データの分布の特徴を，最小値，最大値，四分位数を用いて１つの図に表したものである。

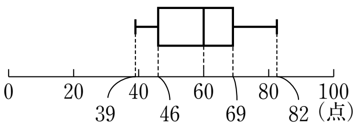


注　箱ひげ図に，平均値を加える場合もある。

例　**2** の例の，数学のテストのデータを箱ひげ図に表してみよう。

①　第１四分位数を左端，第３四分位数を右端とする箱をかき，その中に中央値を示す線分をひく。

②　箱の左端から最小値まで，右端から最大値まで線分をひく。



3　次のデータは，10人の生徒に10点満点の小テストＡ，Ｂ，Ｃを行った結果である。

Ａ　6，8，4，9，8，5，7，5，9，7

Ｂ　5，6，8，4，3，7，7，9，4，8

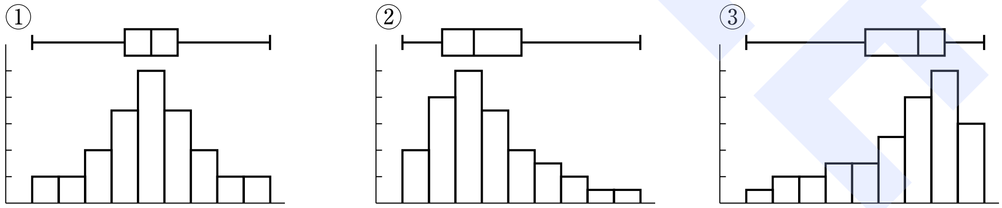
Ｃ　6，5，4，7，9，7，6，9，5，6

(1)　これらのデータの箱ひげ図を並べてかけ。

(2)　データの散らばりの度合が最も大きいのは，Ａ，Ｂ，Ｃのうちどれか。

4 箱ひげ図とヒストグラム

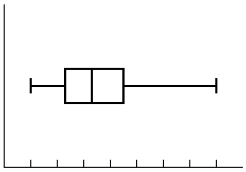
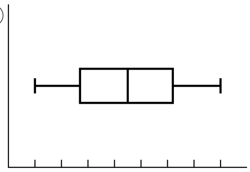
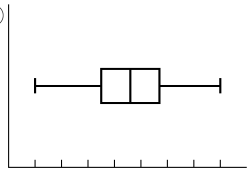
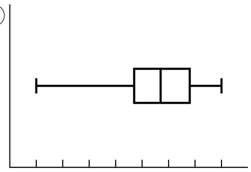
●箱ひげ図とヒストグラムを対応させると，次のような関係がある。

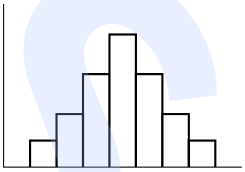
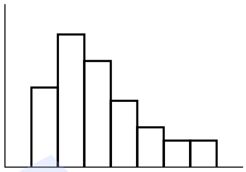
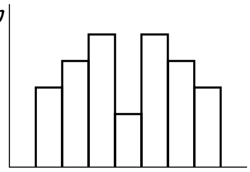
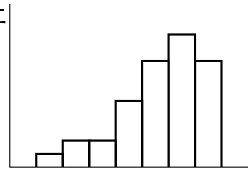


①のように，ヒストグラムが左右対称であれば，箱ひげ図も左右対称になる。

②，③のように，ヒストグラムの山の位置が偏っていると，箱の位置も，偏った方向に寄る。また，箱の長さは，散らばりの度合(データの集中している範囲)を表す。

4　次の①～④の箱ひげ図について，対応するヒストグラムを**ア**～**エ**からそれぞれ選べ。

①

②

③

④


ア

イ

ウ

エ


5 分散と標準偏差

●変量 x がとる n 個の値 x_1，x_2，……，x_n の平均値を $\overline{x}$ とするとき，各値と平均値との差 $x_1-\overline{x}$，$x_2-\overline{x}$，……，$x_n-\overline{x}$ を，それぞれ平均値からの**偏差**という。

偏差の２乗の平均値

$$\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}$$

を変量 x の**分散**といい，s^2 で表す。

さらに，分散の正の平方根を，変数 x の**標準偏差**といい，s で表す。

注　偏差の平均値はつねに０であるから，データの散らばり具合を表せないので，偏差の２乗の平均値を考えて，データの散らばり具合を示す値の１つとする。

例　次のデータは，あるクラスの生徒10人の数学の小テストの結果 x（点）である。

6，8，5，9，8，6，7，6，9，6

分散と標準偏差を求めてみよう。

平均値 $\overline{x}$ は，

$\overline{x}=(6+8+5+9+8+6+7+6+9+6)\div10=7$（点）

x	6	8	5	9	8	6	7	6	9	6
$(x-\overline{x})^2$	1	1	4	4	1	1	0	1	4	1

よって，分散 s^2 は，

$s^2=(1+1+4+4+1+1+0+1+4+1)\div10=1.8$

標準偏差 s は，

$s=\sqrt{1.8}\fallingdotseq1.3$（点）

5　次のデータは，A組，B組10人ずつの生徒について，家族の人数を調べた結果である。それぞれの分散，標準偏差を求めよ。

A組…3，5，6，6，4，5，5，7，5，4　（人）

B組…6，7，3，3，7，8，5，4，3，4　（人）

6　分散と平均の関係式

❶　分散s^2を表す式から，次の関係を導くことができる。

$(x$の分散$)=(x^2$の平均値$)-(x$の平均値$)^2$

例　**5** のデータについて，上の公式により，分散を求めてみよう。

x	6	8	5	9	8	6	7	6	9	6
x^2	36	64	25	81	64	36	49	36	81	36

よって，x^2の平均値は，

$(36+64+25+81+64+36+49+36+81+36)\div10=50.8$

xの平均値は7であるから，　$(x$の平均値$)^2=49$

したがって，xの分散s^2は　$s^2=50.8-49=1.8$

❷　右のような度数分布表から，分散や標準偏差を求める場合，

$$s^2=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2f_1+(x_2-\overline{x})^2f_2+\cdots\cdots+(x_r-\overline{x})^2f_r\}$$

また，

$$(x^2\text{の平均値})=\frac{1}{n}(x_1{}^2f_1+x_2{}^2f_2+\cdots\cdots+x_r{}^2f_r)$$

階級値 x	度数 f
x_1	f_1
x_2	f_2
⋮	⋮
x_r	f_r
計	n

例　右のように，男子生徒20人について，1年間に身長が何cm伸びたかを示す度数分布表が与えられている。

xの平均値$\overline{x}$は，　$\overline{x}=\dfrac{130}{20}=6.5$

x^2の平均値$\overline{x^2}$は，　$\overline{x^2}=\dfrac{972}{20}=48.6$

よって，標準偏差sは，

$s=\sqrt{48.6-6.5^2}=\sqrt{6.35}\fallingdotseq2.5$(cm)

階級 (cm)	階級値 x	度数 f	xf	x^2f
0以上 2未満	1	1	1	1
2 ～ 4	3	2	6	18
4 ～ 6	5	5	25	125
6 ～ 8	7	7	49	343
8 ～ 10	9	3	27	243
10 ～ 12	11	2	22	242
	計	20	130	972

6　次の表のような点数yの分布が与えられているとき，点数yの標準偏差を求めよ。

点数 y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	計
人数	1	1	0	1	3	2	1	0	1	10

高校ゼミ
Standard

数学Ⅰ

解答編

第 1 章 数と式

p.4～5 **1 整式**

1 (1) 係数…-3，次数…2
(2) 係数…2，次数…1
(3) 係数…1，次数…2
(4) 係数…-1，次数…3
(5) 係数…4，次数…3

2 (1) 係数…$5a^3b$，次数…2
(2) 係数…$5bx^2$，次数…3
(3) 係数…$5x^2$，次数…4

3 (1) 3 次式　(2) 2 次式

4 (1) 次数…3，定数項…1
(2) 次数…4，定数項…$2x^3+1$
(3) 次数…6，定数項…1

5 (1) $3x^2+(-4+6)x+3=$**$3x^2+2x+3$**
(2) $(-4+3)x^3+6x^2+(2-1)x=$**$-x^3+6x^2+x$**

6 (1) $x^2+(y+2)x+(y^2+4)$
(2) $(-2x^2+x)y^2+3y+1$

7 (1) $A+B=(2x^2+3xy+y^2)+(x^2+xy-y^2)$
$=(2+1)x^2+(3+1)xy+(1-1)y^2=$**$3x^2+4xy$**
$A-B=(2x^2+3xy+y^2)-(x^2+xy-y^2)$
$=2x^2+3xy+y^2-x^2-xy+y^2$
$=(2-1)x^2+(3-1)xy+(1+1)y^2$
$=x^2+2xy+2y^2$
(2) $A+B=(x^2+xy-y^2)+(-x^2+2xy-2y^2)$
$=(1-1)x^2+(1+2)xy+(-1-2)y^2=$**$3xy-3y^2$**
$A-B=(x^2+xy-y^2)-(-x^2+2xy-2y^2)$
$=x^2+xy-y^2+x^2-2xy+2y^2$
$=(1+1)x^2+(1-2)xy+(-1+2)y^2$
$=2x^2-xy+y^2$
(3) $A+B=(x^3-2x^2-xy+y)+(-x^3+2x^2+y^2+y)$
$=(1-1)x^3+(-2+2)x^2-xy+y^2+(1+1)y$
$=-xy+y^2+2y$
$A-B=(x^3-2x^2-xy+y)-(-x^3+2x^2+y^2+y)$
$=x^3-2x^2-xy+y+x^3-2x^2-y^2-y$
$=(1+1)x^3+(-2-2)x^2-xy-y^2+(1-1)y$
$=2x^3-4x^2-xy-y^2$

p.6～9 **2 整式の乗法**

1 (1) $a^3\times a^7=a^{3+7}=$**a^{10}**
(2) $(2x^2)^4=2^4\times(x^2)^4=16\times x^{2\times4}=$**$16x^8$**
(3) $(-3xy^3)^2=(-3)^2\times x^2\times(y^3)^2=$**$9x^2y^6$**
(4) $a^2b\times3ab^3=3\times a^{2+1}\times b^{1+3}=$**$3a^3b^4$**
(5) $(-2ab^2)\times a^3b=-2\times a^{1+3}\times b^{2+1}=$**$-2a^4b^3$**
(6) $(-2xy^2)^3\times(-2x^2y)^2=-8x^3y^6\times4x^4y^2$
$=\{(-8)\times4\}\times x^{3+4}\times y^{6+2}=$**$-32x^7y^8$**

2 (1) $2x^3-6x^2+2x$
(2) $-2x^5+2x^3+2x^2$
(3) $2x^3-6x^2+2x$
(4) $-3x^4-3x^3+3x$

3 (1) $(2x-1)(3x+1)=2x(3x+1)-(3x+1)$
$=6x^2+2x-3x-1=$**$6x^2-x-1$**
(2) $(4x+y)(2x-3y)=4x(2x-3y)+y(2x-3y)$
$=8x^2-12xy+2xy-3y^2=$**$8x^2-10xy-3y^2$**
(3) $(-x+2)(4x+1)=-x(4x+1)+2(4x+1)$
$=-4x^2-x+8x+2=$**$-4x^2+7x+2$**
(4) $(a-2)(a^2+a-1)=a(a^2+a-1)-2(a^2+a-1)$
$=a^3+a^2-a-2a^2-2a+2=$**a^3-a^2-3a+2**

4 (1) $(2x+1)^2=(2x)^2+2\cdot2x\cdot1+1^2$
$=4x^2+4x+1$
(2) $(3x-1)^2=(3x)^2-2\cdot3x\cdot1+1^2=$**$9x^2-6x+1$**
(3) $(3x+2y)^2=(3x)^2+2\cdot3x\cdot2y+(2y)^2$
$=9x^2+12xy+4y^2$
(4) $(5a-2b)^2=(5a)^2-2\cdot5a\cdot2b+(2b)^2$
$=25a^2-20ab+4b^2$
(5) $(4x+5)(4x-5)=(4x)^2-5^2=$**$16x^2-25$**
(6) $(2x-5y)(2x+5y)=(2x)^2-(5y)^2$
$=4x^2-25y^2$
(7) $(x+3)(x-6)=x^2+\{3+(-6)\}x+3\cdot(-6)$
$=x^2-3x-18$
(8) $(x-3)(x-5)=x^2+\{(-3)+(-5)\}x+(-3)\cdot(-5)$
$=x^2-8x+15$

5 (1) $(2x+1)(3x+2)$
$=2\cdot3x^2+(2\cdot2+1\cdot3)x+1\cdot2=$**$6x^2+7x+2$**
(2) $(4x+3)(6x+1)$
$=4\cdot6x^2+(4\cdot1+3\cdot6)x+3\cdot1=$**$24x^2+22x+3$**
(3) $(3x-5)(4x+1)$
$=3\cdot4x^2+\{3\cdot1+(-5)\cdot4\}x+(-5)\cdot1$
$=12x^2-17x-5$
(4) $(2x+y)(3x+y)=2\cdot3x^2+(2\cdot1+1\cdot3)xy+y^2$
$=6x^2+5xy+y^2$
(5) $(2x+3y)(3x-2y)$
$=2\cdot3x^2+\{2\cdot(-2)+3\cdot3\}xy+3y\cdot(-2y)$
$=6x^2+5xy-6y^2$
(6) $(3x-y)(5x-2y)$
$=3\cdot5x^2+\{3\cdot(-2)+(-1)\cdot5\}xy$
$+(-y)\cdot(-2y)$
$=15x^2-11xy+2y^2$

6 (1) $(3x+4)(9x^2-12x+16)$
$=(3x+4)\{(3x)^2-3x\cdot4+4^2\}$
$=(3x)^3+4^3=$**$27x^3+64$**
(2) $(4x-3y)(16x^2+12xy+9y^2)$
$=(4x-3y)\{(4x)^2+4x\cdot3y+(3y)^2\}$
$=(4x)^3-(3y)^3=$**$64x^3-27y^3$**

(3) $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$
$=(2a+3b)\{(2a)^2-2a\cdot 3b+(3b)^2\}$
$=(2a)^3+(3b)^3=\boldsymbol{8a^3+27b^3}$

7 (1) $(x+3)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 3+3\cdot x\cdot 3^2+3^3$
$=\boldsymbol{x^3+9x^2+27x+27}$

(2) $(2x-4)^3=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot 4+3\cdot 2x\cdot 4^2-4^3$
$=\boldsymbol{8x^3-48x^2+96x-64}$
〔別解〕 $(2x-4)^3=\{2(x-2)\}^3=2^3(x-2)^3$
$=8(x^3-6x^2+12x-8)$
$=8x^3-48x^2+96x-64$

(3) $(3x-y)^3=(3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot y+3\cdot 3x\cdot y^2-y^3$
$=\boldsymbol{27x^3-27x^2y+9xy^2-y^3}$

(4) $(3x-2y)^3$
$=(3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot 2y+3\cdot 3x\cdot(2y)^2-(2y)^3$
$=\boldsymbol{27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3}$

(5) $(2x+5y)^3$
$=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot 5y+3\cdot 2x\cdot(5y)^2+(5y)^3$
$=\boldsymbol{8x^3+60x^2y+150xy^2+125y^3}$

(6) $(2xy+1)^3$
$=(2xy)^3+3\cdot(2xy)^2\cdot 1+3\cdot 2xy\cdot 1^2+1^3$
$=\boldsymbol{8x^3y^3+12x^2y^2+6xy+1}$

8 (1) $-x+y=A$ とおくと，
$(-x+y+z)^2=(A+z)^2=A^2+2Az+z^2$
$=(-x+y)^2+2(-x+y)z+z^2$
$=x^2-2xy+y^2-2xz+2yz+z^2$
$=\boldsymbol{x^2+y^2+z^2-2xy+2yz-2zx}$

(2) $a+2b=A$ とおくと，
$(a+2b+3c)^2=(A+3c)^2=A^2+6Ac+9c^2$
$=(a+2b)^2+6(a+2b)c+9c^2$
$=a^2+4ab+4b^2+6ac+12bc+9c^2$
$=\boldsymbol{a^2+4b^2+9c^2+4ab+12bc+6ca}$

(3) $x+y=A$ とおくと，
$(x+y+1)(x+y+2)=(A+1)(A+2)$
$=A^2+3A+2=(x+y)^2+3(x+y)+2$
$=\boldsymbol{x^2+2xy+y^2+3x+3y+2}$

(4) $y-1=A$ とおくと，
$(x-2y+2)(x+2y-2)$
$=\{x-2(y-1)\}\{x+2(y-1)\}$
$=(x-2A)(x+2A)$
$=x^2-4A^2=x^2-4(y-1)^2$
$=\boldsymbol{x^2-4y^2+8y-4}$

9 (1) $(x+1)(x-1)(x-3)(x-5)$
$=(x+1)(x-5)\times(x-1)(x-3)$
$=(x^2-4x-5)(x^2-4x+3)$
$=(x^2-4x)^2-2(x^2-4x)-15$
$=x^4-8x^3+16x^2-2x^2+8x-15$
$=\boldsymbol{x^4-8x^3+14x^2+8x-15}$

(2) $(x+2y)^2(x-2y)^2=\{(x+2y)(x-2y)\}^2$
$=(x^2-4y^2)^2=\boldsymbol{x^4-8x^2y^2+16y^4}$

(3) $(a+2)(a^3-8)(a^2-2a+4)$
$=(a+2)(a^2-2a+4)(a^3-8)=(a^3+8)(a^3-8)$
$=\boldsymbol{a^6-64}$

p.10 **問題 A**

1 (1) 4 次式
また，x に着目すると，**3 次式**
(2) 3 次式
また，x と y に着目すると，**2 次式**

2 (1) $(2-1)x^2+(-3+4)xy+(1-2)y^2$
$=\boldsymbol{x^2+xy-y^2}$
(2) $(1-3)ax^3-2x^2+a^2x+(-1+4)a^3$
$=\boldsymbol{-2ax^3-2x^2+a^2x+3a^3}$

3 (1) $A+B=(7x-5y+17z)+(6x+13y-5z)$
$=\boldsymbol{13x+8y+12z}$
(2) $A-B=(7x-5y+17z)-(6x+13y-5z)$
$=\boldsymbol{x-18y+22z}$
(3) $2A-3B=2(7x-5y+17z)-3(6x+13y-5z)$
$=14x-10y+34z-18x-39y+15z$
$=\boldsymbol{-4x-49y+49z}$

4 (1) $x\times x^4=\boldsymbol{x^5}$
(2) $3x^2\times(-2x^4)=\boldsymbol{-6x^6}$
(3) $(2a^3)^2=\boldsymbol{4a^6}$
(4) $a^2\times(-2b^3)^2=a^2\times 4b^6=\boldsymbol{4a^2b^6}$
(5) $xy^3\times 4x^2y=\boldsymbol{4x^3y^4}$
(6) $(2x^2y^2)^3\times(-2x^3y)^2=8x^6y^6\times 4x^6y^2$
$=\boldsymbol{32x^{12}y^8}$

5 (1) $(4x-3y)^2=(4x)^2-2\cdot 4x\cdot 3y+(3y)^2$
$=\boldsymbol{16x^2-24xy+9y^2}$
(2) $(2x-3)(2x+3)=(2x)^2-3^2=\boldsymbol{4x^2-9}$
(3) $(3x-y)(2x+3y)$
$=3\cdot 2x^2+\{3\cdot 3+(-1)\cdot 2\}xy+(-y)\cdot 3y$
$=\boldsymbol{6x^2+7xy-3y^2}$
(4) $(2a-b)(2a+b)=(2a)^2-b^2=\boldsymbol{4a^2-b^2}$
(5) $(3x+4y)(5x-6y)$
$=3\cdot 5x^2+\{3\cdot(-6)+4\cdot 5\}xy+4y\cdot(-6y)$
$=\boldsymbol{15x^2+2xy-24y^2}$
(6) $(4a-3b)(3a-4b)$
$=4\cdot 3a^2+\{4\cdot(-4)+(-3)\cdot 3\}ab+(-3b)\cdot(-4b)$
$=\boldsymbol{12a^2-25ab+12b^2}$
(7) $(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$
$=(2a+b)\{(2a)^2-2a\cdot b+b^2\}=(2a)^3+b^3$
$=\boldsymbol{8a^3+b^3}$
(8) $(2x-3)^3=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot 3+3\cdot 2x\cdot 3^2-3^3$
$=\boldsymbol{8x^3-36x^2+54x-27}$
(9) $(a+5b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot 5b+3\cdot a\cdot(5b)^2+(5b)^3$
$=\boldsymbol{a^3+15a^2b+75ab^2+125b^3}$

6 (1)　$a-b=A$ とおくと，

$(a-b+c)^2=(A+c)^2=A^2+2Ac+c^2$
$=(a-b)^2+2(a-b)c+c^2$
$=a^2-2ab+b^2+2ac-2bc+c^2$
$=\boldsymbol{a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca}$

(2)　$x+y=A$ とおくと，

$(x+y-1)^2=(A-1)^2=A^2-2A+1$
$=(x+y)^2-2(x+y)+1$
$=\boldsymbol{x^2+2xy+y^2-2x-2y+1}$

(3)　$x+y=A$ とおくと，

$(x+y+3)(x-4+y)=(A+3)(A-4)$
$=A^2-A-12=(x+y)^2-(x+y)-12$
$=\boldsymbol{x^2+2xy+y^2-x-y-12}$

(4)　$x^2-x=A$ とおくと，

$(x^2-x+1)(x^2-x+2)=(A+1)(A+2)$
$=A^2+3A+2=(x^2-x)^2+3(x^2-x)+2$
$=x^4-2x^3+x^2+3x^2-3x+2$
$=\boldsymbol{x^4-2x^3+4x^2-3x+2}$

(5)　$(x+2)^2(x-2)^2=\{(x+2)(x-2)\}^2$
$=(x^2-4)^2=\boldsymbol{x^4-8x^2+16}$

(6)　$x(x+1)(x+2)(x+3)$
$=x(x+3)\times(x+1)(x+2)$
$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)$
$=(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)$
$=x^4+6x^3+9x^2+2x^2+6x$
$=\boldsymbol{x^4+6x^3+11x^2+6x}$

p.11　問題 B

1 (1)　$A+B-C$

$=(2a^2+3ab+b^2)+(a^2+ab-b^2)$
$\quad-(3ab-2a^2-b^2)$
$=2a^2+3ab+b^2+a^2+ab-b^2-3ab+2a^2+b^2$
$=\boldsymbol{5a^2+ab+b^2}$

(2)　$2A-(A-B+2C)=A+B-2C$
$=(A+B-C)-C$
$=5a^2+ab+b^2-(3ab-2a^2-b^2)$
$=\boldsymbol{7a^2-2ab+2b^2}$

2 (1)　$(3x+4y)(2x-y)$

$=3\cdot2x^2+\{3\cdot(-1)+4\cdot2\}xy+4y\cdot(-y)$
$=\boldsymbol{6x^2+5xy-4y^2}$

(2)　$(3ab+1)(2ab-3)$
$=3\cdot2a^2b^2+\{3\cdot(-3)+1\cdot2\}ab+1\cdot(-3)$
$=\boldsymbol{6a^2b^2-7ab-3}$

(3)　$(-2b-a)(a-2b)=-(a+2b)(a-2b)$
$=-(a^2-4b^2)=\boldsymbol{-a^2+4b^2}$

(4)　$(x-2)(x^2+2x+4)$
$=(x-2)(x^2+x\cdot2+2^2)=x^3-2^3=\boldsymbol{x^3-8}$

(5)　$(2x+3y)^3$
$=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot3y+3\cdot2x\cdot(3y)^2+(3y)^3$
$=\boldsymbol{8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3}$

(6)　$a+b=A$ とおくと，
$(a+b+c)(a+b-c)=(A+c)(A-c)$
$=A^2-c^2=(a+b)^2-c^2$
$=\boldsymbol{a^2+2ab+b^2-c^2}$

(7)　$x^2+4=A$ とおくと，
$(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)=(A-2x)(A+2x)$
$=A^2-4x^2=(x^2+4)^2-4x^2$
$=x^4+8x^2+16-4x^2=\boldsymbol{x^4+4x^2+16}$

(8)　$(x-2)(x-6)(x+4)(x+8)$
$=(x-2)(x+4)\times(x-6)(x+8)$
$=(x^2+2x-8)(x^2+2x-48)$
$=(x^2+2x)^2-56(x^2+2x)+384$
$=x^4+4x^3+4x^2-56x^2-112x+384$
$=\boldsymbol{x^4+4x^3-52x^2-112x+384}$

(9)　$(a+b)^3(a-b)^3=\{(a+b)(a-b)\}^3=(a^2-b^2)^3$
$=(a^2)^3-3\cdot(a^2)^2\cdot b^2+3\cdot a^2\cdot(b^2)^2-(b^2)^3$
$=\boldsymbol{a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6}$

(10)　$(x-1)(x+1)(x^2+1)=\{(x-1)(x+1)\}(x^2+1)$
$=(x^2-1)(x^2+1)=(x^2)^2-1^2=\boldsymbol{x^4-1}$

3 $y+z=A$，$y-z=B$ とおくと，

$(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3$
$\quad-(x+y-z)^3$
$=(x+A)^3-(A-x)^3-(x-B)^3-(x+B)^3$
$=x^3+3x^2A+3xA^2+A^3$
$\quad-(A^3-3A^2x+3Ax^2-x^3)$
$\quad-(x^3-3x^2B+3xB^2-B^3)$
$\quad-(x^3+3x^2B+3xB^2+B^3)$
$=6xA^2-6xB^2=6x(y+z)^2-6x(y-z)^2$
$=6x(y^2+2yz+z^2)-6x(y^2-2yz+z^2)$
$=6xy^2+12xyz+6xz^2-6xy^2+12xyz-6xz^2$
$=\boldsymbol{24xyz}$

4 $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)$

$=\{x+y+(-1)\}$
$\quad\times\{x^2+y^2+(-1)^2-xy-y\cdot(-1)-(-1)\cdot x\}$
〔与えられた等式で，$a=x$，$b=y$，$c=-1$〕
$=x^3+y^3+(-1)^3-3xy\cdot(-1)$
$=\boldsymbol{x^3+y^3+3xy-1}$

5 (1)　x^3y の項の係数は，

$2x^2\cdot(-2xy)+(-3xy)\cdot3x^2=-13x^3y$ から，$\boldsymbol{-13}$

(2)　x^2y^2 の項の係数は，
$2x^2\cdot y^2+(-3xy)\cdot(-2xy)+(-y^2)\cdot3x^2=5x^2y^2$
から，**5**

(3)　xy^3 の項の係数は，
$(-3xy)\cdot y^2+(-y^2)\cdot(-2xy)=-xy^3$ から，$\boldsymbol{-1}$

n が偶数ならば，n^2+1 は奇数である。　…Ⓐ
n が偶数ならば，ある整数 k を用いて，$n=2k$ と表される。
$n^2+1=(2k)^2+1=2\cdot 2k^2+1$
すなわち，n^2+1 は奇数である。
よって，命題Ⓐは真であり，もとの命題も真である。

(2)　与えられた命題の対偶は，次の命題である。
n が奇数ならば，n^3+1 は偶数である。　…Ⓐ
n が奇数ならば，ある整数 k を用いて，$n=2k+1$ と表される。
$n^3+1=(2k+1)^3+1$
$=(8k^3+12k^2+6k+1)+1$
$=2(4k^3+6k^2+3k+1)$
すなわち，n^3+1 は偶数である。
よって，命題Ⓐは真であり，もとの命題も真である。

7　(1)　$\sqrt{6}$ が無理数でないと仮定すると，ある有理数に等しいから，１以外に公約数をもたない２つの自然数 a，b を用いて，$\sqrt{6}=\dfrac{a}{b}$ と表すことができる。
このとき，分母をはらって，両辺を２乗すると，
$a^2=6b^2$　…①
よって，a^2 は偶数である。a^2 が偶数であれば a も偶数だから，c を自然数として，$a=2c$ と表すことができる。この両辺を２乗すると，
$a^2=4c^2$　…②
①，②から，$6b^2=4c^2$ より，$3b^2=2c^2$
よって，b^2 も偶数である。
したがって，b も偶数であるから，a，b はともに偶数になり，公約数２をもつ。
これは，a と b が１以外に公約数をもたないことに矛盾する。
したがって，$\sqrt{6}$ は無理数である。

(2)　$\sqrt{3}+\sqrt{2}$ は無理数でないと仮定すると，$\sqrt{3}+\sqrt{2}$ は有理数である。
$\sqrt{3}+\sqrt{2}=r$（r は有理数）とすると，
$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=r^2$ より，$5+2\sqrt{6}=r^2$
$\sqrt{6}=\dfrac{r^2-5}{2}$　この右辺は有理数であるから，
$\sqrt{6}$ が無理数であることに矛盾する。
したがって，$\sqrt{3}+\sqrt{2}$ は無理数である。

p.44～45　**章末問題**

1　(1)　$(4x+3y)(3y+5x)=(3y+4x)(3y+5x)$
$=(3y)^2+(4x+5x)\cdot 3y+4x\cdot 5x$
$=\boldsymbol{20x^2+27xy+9y^2}$

(2)　$(a-b)^3-(b-a)^3=(a-b)^3+(a-b)^3$
$=\boldsymbol{2(a-b)^3=2a^3-6a^2b+6ab^2-2b^3}$

(3)　$x+y=t$ とおくと，
$(3x+3y-z)(x+y+z)=(3t-z)(t+z)$
$=3t^2+2tz-z^2=3(x+y)^2+2(x+y)z-z^2$
$=\boldsymbol{3x^2+3y^2-z^2+6xy+2yz+2zx}$

(4)　$(x-1)(x-2)(x^2-3x)=(x^2-3x+2)(x^2-3x)$
$=(x^2-3x)^2+2(x^2-3x)$
$=x^4-6x^3+9x^2+2x^2-6x$
$=\boldsymbol{x^4-6x^3+11x^2-6x}$

2　(1)　$3x^2+17xy+10y^2=\boldsymbol{(x+5y)(3x+2y)}$

(2)　$24x^3+81y^3=3(8x^3+27y^3)$
$=\boldsymbol{3(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)}$

(3)　$(x+y)^3-z^3$
$=(x+y-z)\{(x+y)^2+(x+y)z+z^2\}$
$=\boldsymbol{(x+y-z)(x^2+y^2+z^2+2xy+yz+zx)}$

(4)　$x^2-(3y+1)x+(y+4)(2y-3)$
$=\{x-(y+4)\}\{x-(2y-3)\}$
$=\boldsymbol{(x-y-4)(x-2y+3)}$

3　(1)　$4x+2\leqq 5x+7$ から，$x\geqq -5$　…①
$-x+4>2(x-1)-2$ から，
$-3x>-8$，$x<\dfrac{8}{3}$　…②
①と②の共通範囲を求めて，$\boldsymbol{-5\leqq x<\dfrac{8}{3}}$

(2)　$0.1x-0.2<0.3x+0.5$ の両辺に10をかけて，
$x-2<3x+5$，$-2x<7$，$x>-\dfrac{7}{2}$　…①
$2x+10\leqq 11-2x$ から，$x\leqq\dfrac{1}{4}$　…②
①と②の共通範囲を求めて，$\boldsymbol{-\dfrac{7}{2}<x\leqq\dfrac{1}{4}}$

(3)　$x-3\leqq -2$ または $2\leqq x-3$
よって，$\boldsymbol{x\leqq 1,\ 5\leqq x}$

(4)　$\sqrt{(2x+5)^2}=|2x+5|$ より，$|2x+5|<2$
よって，$-2<2x+5<2$
$-7<2x<-3$ より，$\boldsymbol{-\dfrac{7}{2}<x<-\dfrac{3}{2}}$

4　$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$
よって，$\boldsymbol{x+\dfrac{1}{x}}=\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1=\boldsymbol{2\sqrt{2}}$
$\boldsymbol{x^2+\dfrac{1}{x^2}}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}=(2\sqrt{2})^2-2=\boldsymbol{6}$

5　もとの長方形の短い方の辺の長さを x cm とすると，長い方の辺の長さは，$x+8$(cm)
新しい長方形の２辺は，$x+2$(cm)，$x+4$(cm)
面積は大きくなるから，$(x+2)(x+4)>x(x+8)$

$6x+8>8x$，$x<4$

したがって，もとの長方形の短い方の辺の長さは，**4 cmより短い**。

$\boxed{6}$ (1) $A\cap B=\{0,\ 2\}$

(2) $A\cup B=\{-4,\ -2,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

(3) $\overline{A}=\{-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 4,\ 5\}$

より，$\overline{A}\cap B=\{\mathbf{-4},\ \mathbf{-2}\}$

(4) $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$

また，(1)より，$A\cap B=\{0,\ 2\}$ であるから，

$\overline{A}\cup\overline{B}=\{\mathbf{-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5}\}$

$\boxed{7}$ (1) $|a|=1\Leftrightarrow a^2=1$

よって，**必要十分**条件。

(2) $a\geqq1\Rightarrow a>1$，偽（反例：$a=1$）

$a>1\Rightarrow a\geqq1$，真

よって，**必要**条件。

(3) 四角形ABCDが平行四辺形 ⇒ AB∥DC，真

AB∥DC ⇒ 四角形ABCDは平行四辺形，偽

（反例：AB∥DC で AB≠DC である四角形ABCD）　よって，**十分**条件。

$\boxed{8}$ (1) 命題は真

逆：$|x|>2\Rightarrow x>2$，偽（反例：$x=-3$）

裏：$x\leqq2\Rightarrow|x|\leqq2$，偽（反例：$x=-3$）

対偶：$|x|\leqq2\Rightarrow x\leqq2$，真

(2) 命題は偽（反例：$x=5$）

逆：$x^2-6x+5\neq0\Rightarrow x\neq1$，真

裏：$x=1\Rightarrow x^2-6x+5=0$，真

対偶：$x^2-6x+5=0\Rightarrow x=1$，偽（反例：$x=5$）

(3) 命題は真

逆：「$x=0$ または $x=1$」$\Rightarrow x^2-x=0$，真

裏：$x^2-x\neq0\Rightarrow$「$x\neq0$ かつ $x\neq1$」，真

対偶：「$x\neq0$ かつ $x\neq1$」$\Rightarrow x^2-x\neq0$，真

(4) 命題は真

逆：$n+1$ は奇数 ⇒ n は偶数，真

裏：n は奇数 ⇒ $n+1$ は偶数，真

対偶：$n+1$ は偶数 ⇒ n は奇数，真

$\boxed{9}$ (1) $x^2-4(y+z)^2$

$=\{x+2(y+z)\}\{x-2(y+z)\}$

$=\boldsymbol{(x+2y+2z)(x-2y-2z)}$

(2) $a^2-ab+3a+2b-10$

$=(-ab+2b)+(a^2+3a-10)$

$=-b(a-2)+(a+5)(a-2)$

$=(a-2)(-b+a+5)=\boldsymbol{(a-2)(a-b+5)}$

(3) $x^2+5xy+6y^2+y-1$

$=x^2+5xy+(2y+1)(3y-1)$

$=\boldsymbol{(x+2y+1)(x+3y-1)}$

(4) $3x^2-2xy-y^2+16x+4y+5$

$=3x^2+(-2y+16)x-(y^2-4y-5)$

$=3x^2+(-2y+16)x-(y+1)(y-5)$

$=\{x-(y-5)\}\{3x+(y+1)\}$

$=\boldsymbol{(x-y+5)(3x+y+1)}$

$\boxed{10}$ x^5 の項だけまとめると，

$5x^3\times(-x^2)+(-6x^2)\times3x^3+3x\times2x^4$

$=-5x^5-18x^5+6x^5=-17x^5$

よって，x^5 の係数は，$\mathbf{-17}$

$\boxed{11}$ (1) 一般に，$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

だから，$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=(\sqrt{3})^3-3\sqrt{3}=\mathbf{0}$

(2) $\sqrt{x^2}+\sqrt{(x-3)^2}=|x|+|x-3|$

$x<0$ のとき，$|x|=-x$

$0\leqq x$ のとき，$|x|=x$

$x<3$ のとき，$|x-3|=-(x-3)=-x+3$

$3\leqq x$ のとき，$|x-3|=x-3$

したがって，$\sqrt{x^2}+\sqrt{(x-3)^2}$ を簡単にすると，

$\boldsymbol{x<0}$ **のとき**，$-x+(-x+3)=\boldsymbol{-2x+3}$

$\boldsymbol{0\leqq x<3}$ **のとき**，$x+(-x+3)=\mathbf{3}$

$\boldsymbol{3\leqq x}$ **のとき**，$x+(x-3)=\boldsymbol{2x-3}$

(3) $\sqrt{4+\sqrt{15}}=\sqrt{\dfrac{8+2\sqrt{15}}{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{(5+3)+2\sqrt{5\cdot3}}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}$ より，

$\sqrt{4+\sqrt{15}}+\dfrac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}}$

$=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}+\dfrac{2}{\sqrt{10}+\sqrt{6}}$

$=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}=\boldsymbol{\sqrt{10}}$

$\boxed{12}$ (1) $1-2x\geqq0$　すなわち，$x\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき

$1-2x=x+5$ より，$x=-\dfrac{4}{3}$

これは，$x\leqq\dfrac{1}{2}$ を満たす。

$1-2x<0$　すなわち，$x>\dfrac{1}{2}$ のとき

$-(1-2x)=x+5$ より，$x=6$

これは，$x>\dfrac{1}{2}$ を満たす。

よって，$\boldsymbol{x=-\dfrac{4}{3}}$，$\mathbf{6}$

(2) $x\geqq2$　…①のとき，

$2(x-2)\leqq3x+1$ より，$x\geqq-5$　…②

①と②の共通範囲は，$x\geqq2$　…③

$x<2$　…④のとき

$-2(x-2) \leqq 3x+1$ より，$x \geqq \frac{3}{5}$　…⑤

④と⑤の共通範囲は，$\frac{3}{5} \leqq x < 2$　…⑥

求める解は，③または⑥を満たす範囲で，

$\boldsymbol{x \geqq \frac{3}{5}}$

(3)　$|x|+|x-1|>4$　…①

$x<0$ のとき，$|x|=-x$

$x \geqq 0$ のとき，$|x|=x$

$x<1$ のとき，$|x-1|=-(x-1)=1-x$

$x \geqq 1$ のとき，$|x-1|=x-1$

したがって，

$x<0$ のとき，①は，$-x+(1-x)>4$

これを解くと，$x<-\frac{3}{2}$

これは，$x<0$ を満たす。

$0 \leqq x<1$ のとき，①は，$x+(1-x)>4$

このとき，$1>4$ となり，不適。

$x \geqq 1$ のとき，①は，$x+(x-1)>4$

これを解くと，$x>\frac{5}{2}$

これは，$x \geqq 1$ を満たす。

よって，$\boldsymbol{x<-\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}<x}$

(4)　$|x|+|1-2x|=5$　…①

$x<0$ のとき，$|x|=-x$

$x \geqq 0$ のとき，$|x|=x$

$x<\frac{1}{2}$ のとき，$|1-2x|=1-2x$

$x \geqq \frac{1}{2}$ のとき，$|1-2x|=-(1-2x)=2x-1$

したがって，

$x<0$ のとき，①は，$-x+(1-2x)=5$

これを解くと，$x=-\frac{4}{3}$

これは，$x<0$ を満たす。

$0 \leqq x<\frac{1}{2}$ のとき，①は，$x+(1-2x)=5$

これを解くと，$x=-4$

これは，$0 \leqq x<\frac{1}{2}$ を満たさない。

$x \geqq \frac{1}{2}$ のとき，①は，$x+(2x-1)=5$

これを解くと，$x=2$

これは，$x \geqq \frac{1}{2}$ を満たす。

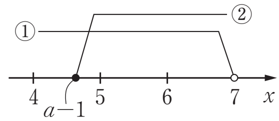
以上から，①の解は，$\boldsymbol{x=-\frac{4}{3},\ 2}$

13　$\begin{cases} 3x+2>4x-5 & \cdots① \\ x+a \leqq 2x+1 & \cdots② \end{cases}$

①より，$x<7$　②より，$x \geqq a-1$

よって，$a-1 \leqq x<7$　…③

③を満たす整数 x が2個のとき，その整数は，5と6である。



したがって，

$4<a-1 \leqq 5$ であればよい。

よって，求める a の範囲は，$\boldsymbol{5<a \leqq 6}$

14　$B=\{2,\ 4\}$，$C=\{2,\ 4\}$ より，

$A \supset B$，$B=C$，$A \supset C$

15　(1)　与えられた命題の対偶は，次の命題である。

「$x \leqq 0$ かつ $y \leqq 0$」$\Rightarrow xy(x+y) \leqq 0$　…Ⓐ

$x \leqq 0$ かつ $y \leqq 0$ のとき，$xy \geqq 0$，$x+y \leqq 0$

よって，$xy(x+y) \leqq 0$

したがって，命題Ⓐは真であり，もとの命題も**真**である。

(2)　与えられた命題の対偶は，次の命題である。

n は3の倍数でない $\Rightarrow 4n$ は3の倍数でない　…Ⓐ

n が3の倍数でないならば，ある整数 k を用いて，$n=3k+1$ または $n=3k+2$ と表される。

$n=3k+1$ のとき，

$4n=4(3k+1)=3(4k+1)+1$

$n=3k+2$ のとき，

$4n=4(3k+2)=3(4k+2)+2$

となり，いずれの場合も，$4n$ は3の倍数ではない。

よって，命題Ⓐは真であり，もとの命題も真である。

16　$a^2+b^2=c^2$ を満たす自然数 a，b がともに奇数であると仮定する。

このとき，ある整数 k，l を用いて，$a=2k+1$，$b=2l+1$ と表される。

$a^2+b^2=(2k+1)^2+(2l+1)^2$

$\quad =4(k^2+k+l^2+l)+2$

となり，a^2+b^2 は4で割ると余りは2である。

また，c はある整数 m を用いて，$c=2m$ または $2m+1$ と表されるので，

$c^2=(2m)^2=4m^2$　または

$c^2=(2m+1)^2=4(m^2+m)+1$

となり，c^2 を4で割ると余りは0または1となる。

これは，$a^2+b^2=c^2$ であることに矛盾する。

よって，a，b のうち少なくとも1つは偶数である。

第2章 2次関数

p.46～48 ❶ 関数とグラフ

1 (1) 1200mの道のりを分速80mで歩くときにかかる時間は，$1200\div80=15$(分)
よって，$\boldsymbol{y=1200-80x\ (0\leqq x\leqq15)}$

(2) 縦が$x$cmのとき，横は$(5-x)$cmだから，
$x>0$ かつ $5-x>0$ より，$0<x<5$
面積は，$x(5-x)=-x^2+5x$
よって，$\boldsymbol{y=-x^2+5x\ (0<x<5)}$

2 (1) $\boldsymbol{f(0)}=0^2+2\cdot0-3=\boldsymbol{-3}$

(2) $\boldsymbol{f(2)}=2^2+2\cdot2-3=\boldsymbol{5}$

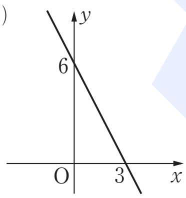
(3) $\boldsymbol{f(-3)}=(-3)^2+2\cdot(-3)-3=\boldsymbol{0}$

(4) $\boldsymbol{f(a-1)}=(a-1)^2+2(a-1)-3$
$=a^2-2a+1+2a-2-3=\boldsymbol{a^2-4}$

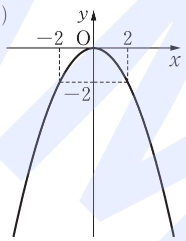
3 (1) 第1象限　(2) 第4象限
(3) 第3象限　(4) 第2象限

4 ① $(-2,\ -1)$　② $(2,\ 1)$
③ $(2,\ -1)$

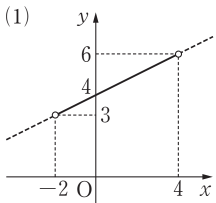
5 (1)



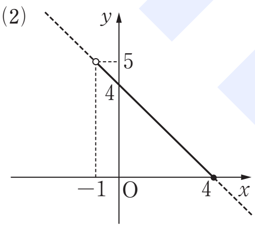
(2)



6 (1)



(2)

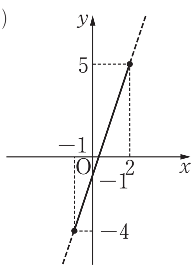


値域は，$\boldsymbol{3<y<6}$　　値域は，$\boldsymbol{0\leqq y<5}$

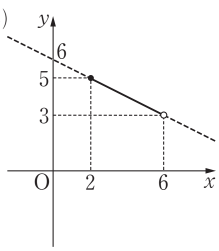
7 (1) グラフは次の図の実線部分となるから，
$x=2$ で最大値 5，$x=-1$ で最小値 -4をとる。

(2) グラフは次の図の実線部分となるから，
$x=2$ で最大値 5 をとる。**最小値はない**。

(1)



(2)



p.49～53 ❷ 2次関数のグラフ

1 (1) $y=\dfrac{1}{2}x(x-2)$ より，$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}x^2-x}$

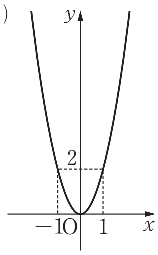
(2) $\dfrac{1}{2}xy=10$ より，$\boldsymbol{y=\dfrac{20}{x}}$

(3) $y=(x+3)^2+x^2$ より，$\boldsymbol{y=2x^2+6x+9}$

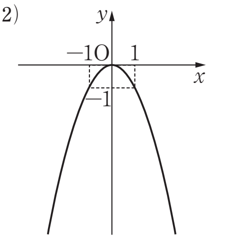
(4) $y=(x+3)^2-x^2$ より，$\boldsymbol{y=6x+9}$

2次関数であるものは，(1)と(3)

2 (1)

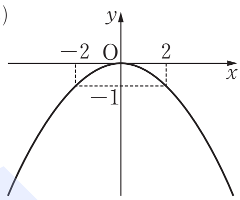


(2)



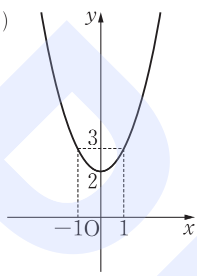
放物線は**下に凸**　　放物線は**上に凸**

(3)

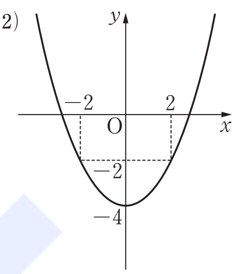


放物線は**上に凸**

3 (1)

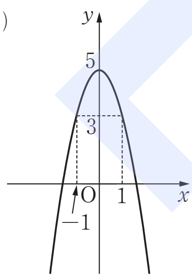


(2)



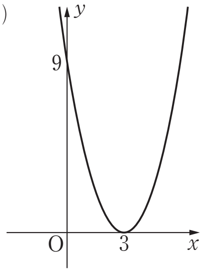
頂点は**点(0，2)**　　頂点は**点(0，−4)**

(3)



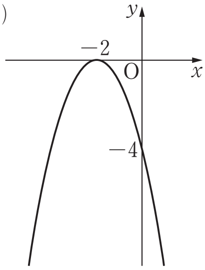
頂点は**点(0，5)**

4 (1)



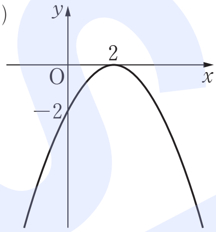
軸は直線 $\boldsymbol{x=3}$
頂点は点 $\boldsymbol{(3,\ 0)}$

(2)



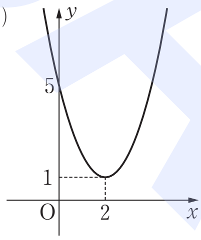
軸は直線 $\boldsymbol{x=-2}$
頂点は点 $\boldsymbol{(-2,\ 0)}$

(3)



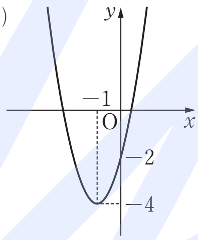
軸は直線 $\boldsymbol{x=2}$
頂点は点 $\boldsymbol{(2,\ 0)}$

5 (1)



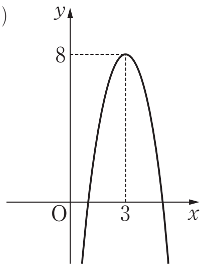
軸は直線 $\boldsymbol{x=2}$
頂点は点 $\boldsymbol{(2,\ 1)}$

(2)



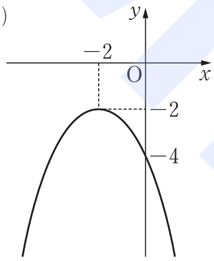
軸は直線 $\boldsymbol{x=-1}$
頂点は点 $\boldsymbol{(-1,\ -4)}$

(3)



軸は直線 $\boldsymbol{x=3}$
頂点は点 $\boldsymbol{(3,\ 8)}$

(4)



軸は直線 $\boldsymbol{x=-2}$
頂点は点 $\boldsymbol{(-2,\ -2)}$

6 (1) $x^2+8x+9=(x^2+8x)+9$
$=\{(x+4)^2-4^2\}+9=\boldsymbol{(x+4)^2-7}$

(2) $-x^2+6x+4=-(x^2-6x)+4$
$=-\{(x-3)^2-3^2\}+4=\boldsymbol{-(x-3)^2+13}$

(3) $2x^2+2x-1=2(x^2+x)-1$
$=2\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}-1=\boldsymbol{2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}}$

(4) $\frac{1}{2}x^2-2x-3=\frac{1}{2}(x^2-4x)-3$
$=\frac{1}{2}\{(x-2)^2-2^2\}-3=\boldsymbol{\frac{1}{2}(x-2)^2-5}$

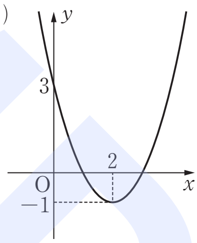
7 (1) $x^2-4x+3=(x-2)^2-1$ より,
$y=(x-2)^2-1$　グラフは次の図。
軸は直線 $\boldsymbol{x=2}$，頂点は点 $\boldsymbol{(2,\ -1)}$

(2) $-2x^2-4x+3=-2(x^2+2x)+3$
$=-2\{(x+1)^2-1^2\}+3=-2(x+1)^2+5$
よって，$y=-2(x+1)^2+5$　グラフは次の図。
軸は直線 $\boldsymbol{x=-1}$，頂点は点 $\boldsymbol{(-1,\ 5)}$

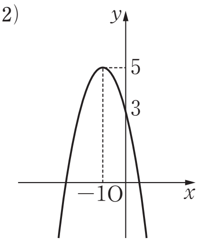
(3) $\frac{1}{2}x^2+3x=\frac{1}{2}(x^2+6x)$
$=\frac{1}{2}\{(x+3)^2-3^2\}=\frac{1}{2}(x+3)^2-\frac{9}{2}$
よって，$y=\frac{1}{2}(x+3)^2-\frac{9}{2}$　グラフは次の図。
軸は直線 $\boldsymbol{x=-3}$，頂点は点 $\boldsymbol{\left(-3,\ -\frac{9}{2}\right)}$

(4) $x^2+3x+1=(x^2+3x)+1$
$=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+1=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$
よって，$y=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$　グラフは次の図。
軸は直線 $\boldsymbol{x=-\frac{3}{2}}$，頂点は点 $\boldsymbol{\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{5}{4}\right)}$

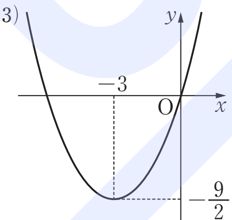
(1)



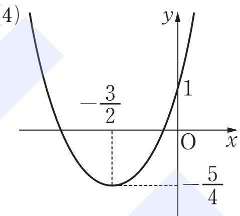
(2)



(3)



(4)



8 $y=2x^2+4x+3$ は，$y=2(x+1)^2+1$ と変形できる。放物線の頂点は点 $(-1,\ 1)$

(1) $y=2x^2-4x-1$ は，$y=2(x-1)^2-3$ と変形できる。この放物線の頂点は点 $(1,\ -3)$
よって，点 $(-1,\ 1)$ が点 $(1,\ -3)$ に移る。
したがって，**x 軸方向に 2，y 軸方向に -4 だけ平行移動**する。

(2) $y=2x^2+8x+11$ は，$y=2(x+2)^2+3$ と変形できる。この放物線の頂点は点 $(-2,\ 3)$
よって，点 $(-1,\ 1)$ が点 $(-2,\ 3)$ に移る。
したがって，**x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だ**

け平行移動する。

9 $y=-x^2+2x+2$ の x を $x-2$，y を $y-(-4)$ すなわち $y+4$ でおき換えて，
$y+4=-(x-2)^2+2(x-2)+2$
整理して，$\boldsymbol{y=-x^2+6x-10}$

10 $y=2x^2-8x-5$ …①
①を x 軸に関して対称移動すると，y を $-y$ でおき換えて，$-y=2x^2-8x-5$
すなわち，$\boldsymbol{y=-2x^2+8x+5}$
①を y 軸に関して対称移動すると，x を $-x$ でおき換えて，$y=2(-x)^2-8(-x)-5$
すなわち，$\boldsymbol{y=2x^2+8x-5}$
①を原点に関して対称移動すると，x を $-x$，y を $-y$ でおき換えて，$-y=2(-x)^2-8(-x)-5$
すなわち，$\boldsymbol{y=-2x^2-8x+5}$

p.54 問題 A

1 (1) 水槽が空になるのにかかる時間は，
$60\div5=12$（分）
よって，$\boldsymbol{y=60-5x\ (0\leqq x\leqq 12)}$

(2) 横の長さは $(20-x)$ cm と表され，縦より長いから，$0<x<20-x$ よって，$0<x<10$
また，$y=x(20-x)=-x^2+20x$
したがって，$\boldsymbol{y=-x^2+20x\ (0<x<10)}$

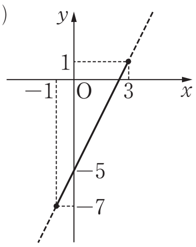
2 (1) $\boldsymbol{f(0)}=-2\cdot0^2+5\cdot0+3=\boldsymbol{3}$

(2) $\boldsymbol{f(-2)}=-2\cdot(-2)^2+5\cdot(-2)+3=\boldsymbol{-15}$

(3) $\boldsymbol{f(2a)=-8a^2+10a+3}$

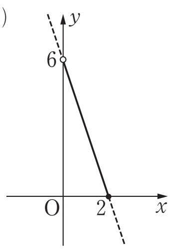
(4) $\boldsymbol{f(a+2)}=-2(a+2)^2+5(a+2)+3$
$=\boldsymbol{-2a^2-3a+5}$

3 (1)



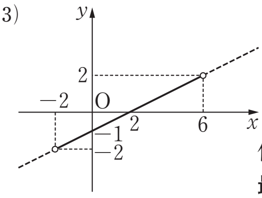
値域は，$\boldsymbol{-7\leqq y\leqq 1}$
$\boldsymbol{x=3}$ で最大値 **1**，
$\boldsymbol{x=-1}$ で最小値 $\boldsymbol{-7}$ をとる。

(2)



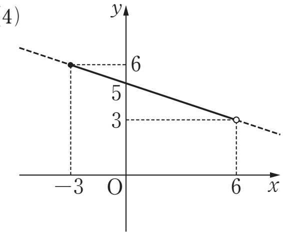
値域は，$\boldsymbol{0\leqq y<6}$
$\boldsymbol{x=2}$ で最小値 **0** をとる。
最大値はない。

(3)



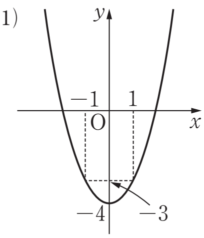
値域は，$\boldsymbol{-2<y<2}$
最大値，最小値はない。

(4)

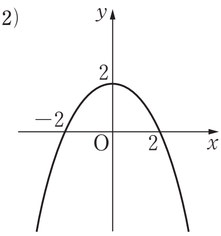


値域は，$\boldsymbol{3<y\leqq 6}$
$\boldsymbol{x=-3}$ で最大値 **6** をとる。
最小値はない。

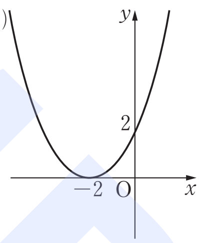
4 (1)



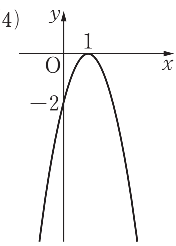
(2)



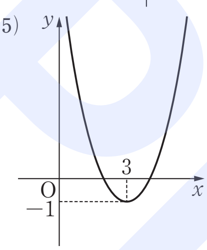
(3)



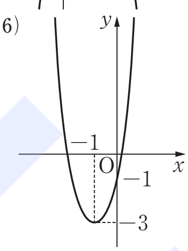
(4)



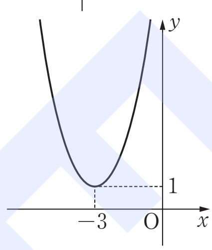
(5)



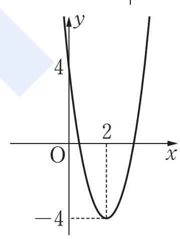
(6)



5 (1) $y=(x+3)^2+1$
グラフは右の図。
軸は**直線** $\boldsymbol{x=-3}$
頂点は**点** $\boldsymbol{(-3,\ 1)}$



(2) $y=2(x-2)^2-4$
グラフは右の図。
軸は直線 $\boldsymbol{x=2}$
頂点は**点** $\boldsymbol{(2,\ -4)}$

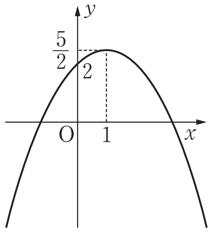


(3)　$y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{5}{2}$

グラフは右の図。

軸は直線 $x=1$

頂点は点$\left(1,\ \frac{5}{2}\right)$

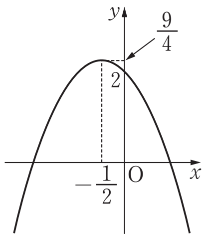


(4)　$y=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$

グラフは右の図。

軸は直線 $x=-\frac{1}{2}$

頂点は点$\left(-\frac{1}{2},\ \frac{9}{4}\right)$



6　$y=-3x^2+6x$ を変形すると，

$y=-3(x-1)^2+3$　放物線の頂点は$(1,\ 3)$

(1)　$y=-3(x-2)^2-1$　頂点は$(2,\ -1)$

点$(1,\ 3)$が点$(2,\ -1)$に移るから，

x 軸方向に 1，y 軸方向に -4 だけ平行移動する。

(2)　$y=-3(x+1)^2+5$　頂点は$(-1,\ 5)$

点$(1,\ 3)$が点$(-1,\ 5)$に移るから，

x 軸方向に -2，y 軸方向に 2 だけ平行移動する。

p.55　問題 B

1　$f(1)=-4$ より，$a+b=-4$　…①

$f(3)=0$ より，$3a+b=0$　…②

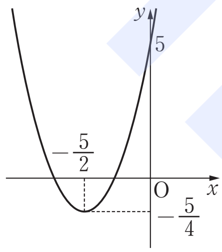
連立方程式①，②を解くと，$\boldsymbol{a=2,\ b=-6}$

2　(1)　$y=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$

グラフは右の図。

軸は直線 $x=-\frac{5}{2}$

頂点は点$\left(-\frac{5}{2},\ -\frac{5}{4}\right)$

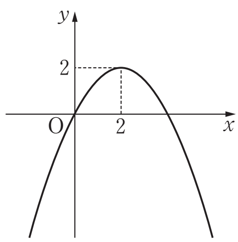


(2)　$y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2$

グラフは右の図。

軸は直線 $x=2$

頂点は点$(2,\ 2)$



(3)　$(x+1)(x-3)=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$ より，

$y=(x-1)^2-4$　グラフは次の図。

軸は直線 $x=1$，頂点は点$(1,\ -4)$

〔別解〕 $x=-1,\ 3$ とすると $y=0$　すなわち，

グラフは 2 点A$(-1,\ 0)$，B$(3,\ 0)$を通る。

放物線の対称性から，軸は線分ABの中点を通る直線 $x=1$　頂点の y 座標は，$x=1$ を関数の式に代入して，$y=(1+1)(1-3)=-4$

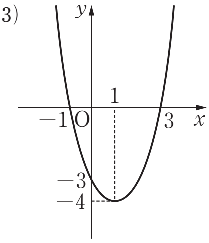
したがって，頂点は点$(1,\ -4)$

2 次関数 $y=f(x)$ において，$f(x)$が因数分解されているか，因数分解しやすいものであれば，以上のようなグラフのかき方ができる。

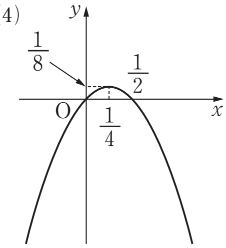
(4)　2 点$(0,\ 0)$，$\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$を通る放物線。次の図。

軸は直線 $x=\frac{1}{4}$，**頂点は点$\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{8}\right)$**

(3)



(4)



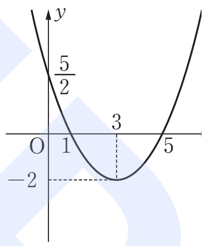
(5)　2 点$(1,\ 0)$，$(5,\ 0)$を通る放物線。次の図。

軸は直線 $x=3$，**頂点は点$(3,\ -2)$**

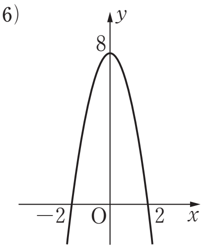
(6)　2 点$(-2,\ 0)$，$(2,\ 0)$を通る放物線。次の図。

軸は直線 $x=0$ (y 軸)，**頂点は点$(0,\ 8)$**

(5)



(6)



3　グラフが上に凸の放物線だから，$\boldsymbol{a<0}$

また，$y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$

$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c$

$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$

と変形され，グラフの頂点の x 座標は正だから，

$-\frac{b}{2a}>0$　これと $a<0$ から，$\boldsymbol{b>0}$

次に，$y=ax^2+bx+c$ に $x=0$ を代入すると，

$y=c$ で，グラフは y 軸の正の部分と交わっているから，$\boldsymbol{c>0}$

4　(1)　$y-3=(x-2)^2-6(x-2)+7$ より，

$\boldsymbol{y=x^2-10x+26}$

(2)　x を $x-(-5)=x+5$，y を $y-(-1)=y+1$ でおき換えて，$y+1=(x+5)^2-6(x+5)+7$

よって，$\boldsymbol{y=x^2+4x+1}$

5　放物線 $y=-x^2+4x-5$ を，逆に，x 軸方向に

第 3 章　図形と計量

p.90～92　**❶ 鋭角の三角比**

1 (1) $\sin\alpha=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}}$, $\cos\alpha=\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{5}}}$, $\tan\alpha=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

$\sin\beta=\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{5}}}$, $\cos\beta=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}}$, $\tan\beta=\boldsymbol{2}$

(2) $\sin\alpha=\boldsymbol{\frac{5}{13}}$, $\cos\alpha=\boldsymbol{\frac{12}{13}}$, $\tan\alpha=\boldsymbol{\frac{5}{12}}$

$\sin\beta=\boldsymbol{\frac{12}{13}}$, $\cos\beta=\boldsymbol{\frac{5}{13}}$, $\tan\beta=\boldsymbol{\frac{12}{5}}$

2 (1) $BC=\sqrt{4^2-3^2}=\boldsymbol{\sqrt{7}}$

(2) $\sin\alpha=\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{4}}$, $\cos\alpha=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$, $\tan\alpha=\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{3}}$

3 (1) $\sin 30^\circ+\cos 60^\circ=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\boldsymbol{1}$

(2) $\tan 45^\circ \sin 60^\circ \cos 30^\circ=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$

4 (1) $\sin 65^\circ=\boldsymbol{0.9063}$　(2) $\cos 18^\circ=\boldsymbol{0.9511}$
(3) $\tan 37^\circ=\boldsymbol{0.7536}$

5 (1) $\theta\fallingdotseq\boldsymbol{72^\circ}$　(2) $\theta\fallingdotseq\boldsymbol{48^\circ}$　(3) $\theta\fallingdotseq\boldsymbol{52^\circ}$

6 $BC=AB\sin 18^\circ=100\times0.3090=30.9\fallingdotseq31$
$AC=AB\cos 18^\circ=100\times0.9511=95.11\fallingdotseq95$
よって，**鉛直方向には約31 m**登ったことになり，
水平方向には約95 m進んだことになる。

7 問題の図で，
$BC=AC\tan 38^\circ=10\times0.7813=7.813\fallingdotseq7.8$
よって，目の高さ1.6mを加えて，木の高さは，
$7.8+1.6=9.4$　**約9.4 m**

8 (1) $\sin 55^\circ=\sin(90^\circ-35^\circ)=\boldsymbol{\cos 35^\circ}$
(2) $\cos 78^\circ=\cos(90^\circ-12^\circ)=\boldsymbol{\sin 12^\circ}$
(3) $\tan 67^\circ=\tan(90^\circ-23^\circ)=\boldsymbol{\frac{1}{\tan 23^\circ}}$

p.93　**問題 A**

1 (1) $AB=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

$\sin\alpha=\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{13}}}$, $\cos\alpha=\boldsymbol{\frac{3}{\sqrt{13}}}$, $\tan\alpha=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$

(2) $BC=\sqrt{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{5}$

$\sin\alpha=\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}}$, $\cos\alpha=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}}$, $\tan\alpha=\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}$

(3) $AC=\sqrt{17^2-8^2}=\sqrt{25\cdot9}=15$

$\sin\alpha=\boldsymbol{\frac{8}{17}}$, $\cos\alpha=\boldsymbol{\frac{15}{17}}$, $\tan\alpha=\boldsymbol{\frac{8}{15}}$

2 (1) **鉛直方向には，**
$20\times\sin 23^\circ=20\times0.3907=7.814\fallingdotseq7.8$ より，
約7.8 m落下したことになる。
水平方向には，
$20\times\cos 23^\circ=20\times0.9205=18.41\fallingdotseq18.4$ より，
約18.4 m進んだことになる。

(2) $\angle ABC=90^\circ-16^\circ=74^\circ$ だから，
$AC=30\times\tan 74^\circ=30\times3.4874=104.622$
$\fallingdotseq104.6$　よって，**約104.6 m**

p.93　**問題 B**

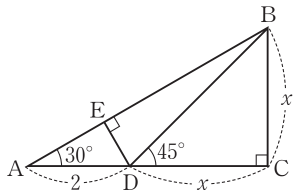
1 (1) $\sin\theta=\frac{2}{3}=0.666\cdots$

三角比の表から，$\theta\fallingdotseq\boldsymbol{42^\circ}$

(2) $\cos\theta=\frac{3}{8}=0.375$　よって，$\theta\fallingdotseq\boldsymbol{68^\circ}$

(3) $\tan\theta=\frac{8}{5}=1.6$　よって，$\theta\fallingdotseq\boldsymbol{58^\circ}$

2 $BC=DC=x$
とおくと，
$AC=\sqrt{3}BC$ より，
$2+x=\sqrt{3}x$



$x=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$

すなわち，$BC=\boldsymbol{\sqrt{3}+1}$
また，直角三角形ADE，BDCのそれぞれで，辺の比により，$DE=1$,
$BD=\sqrt{2}BC=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)=\sqrt{6}+\sqrt{2}$
$\triangle BDE$ で，$\angle DBE=15^\circ$ だから，

$\sin 15^\circ=\frac{DE}{BD}=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

3 三角形の3つの内角だから，$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$

したがって，$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{180^\circ-\gamma}{2}=90^\circ-\frac{\gamma}{2}$

(1) $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\gamma}{2}=\sin\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)-\cos\frac{\gamma}{2}$

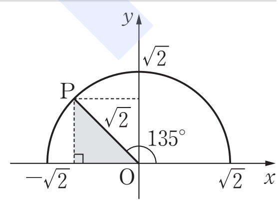
$=\cos\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{\gamma}{2}=\boldsymbol{0}$

(2) $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}=\tan\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)\tan\frac{\gamma}{2}$

$=\frac{1}{\tan\frac{\gamma}{2}}\cdot\tan\frac{\gamma}{2}=\boldsymbol{1}$

p.94～96　**❷ 鈍角の三角比**

1 135°の三角比
右の図で，直角二等辺三角形の辺の比から，P$(-1, 1)$
よって，



5 △OAPは，30°，60°の直角三角形だから，辺の比から，$45:\mathrm{OP}=\sqrt{3}:2$，$\mathrm{OP}=\dfrac{90}{\sqrt{3}}=30\sqrt{3}$

同様に，△OBQで，

$30:\mathrm{OQ}=\sqrt{3}:2$，$\mathrm{OQ}=\dfrac{60}{\sqrt{3}}=20\sqrt{3}$

よって，△OPQで余弦定理により，

$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{OP}^2+\mathrm{OQ}^2-2\cdot\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\cos 60^\circ$

$=(30\sqrt{3})^2+(20\sqrt{3})^2-2\cdot 30\sqrt{3}\cdot 20\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2}$

$=2700+1200-1800=2100$

$\mathrm{PQ}>0$ だから，$\mathrm{PQ}=\sqrt{2100}=\mathbf{10\sqrt{21}\,(m)}$

p.110～111

❺ 三角形の面積

1 (1) $S=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\sin 30^\circ=12\cdot\dfrac{1}{2}=\mathbf{6}$

(2) $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 8\sin 120^\circ=20\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\mathbf{10\sqrt{3}}$

(3) $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\cdot 7\cdot 4\sin 135^\circ=14\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$=\mathbf{7\sqrt{2}}$

(4) $S=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot a\sin 60^\circ=\dfrac{a^2}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2}$

2 (1) 余弦定理により，

$\cos A=\dfrac{5^2+6^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 6}=\dfrac{12}{2\cdot 5\cdot 6}=\boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$

(2) $\sin A>0$ だから，

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{24}{25}}$

$=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{6}}{5}}$

(3) $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{5}=\mathbf{6\sqrt{6}}$

3 余弦定理により，

$\cos C=\dfrac{5^2+7^2-8^2}{2\cdot 5\cdot 7}=\dfrac{10}{2\cdot 5\cdot 7}=\dfrac{1}{7}$

$\sin C>0$ だから，

$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{7}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{48}{49}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

よって，求める面積は，

$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 7\cdot\dfrac{4\sqrt{3}}{7}=\mathbf{10\sqrt{3}}$

4 (1) 三角形の面積を S とすると，

$S=\dfrac{1}{2}r(8+15+17)=20r$

一方，直角をはさむ 2 辺の長さは 8，15だから，

$S=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 15=60$

よって，$20r=60$ より，$\boldsymbol{r=3}$

(2) 三角形の面積を S とする。

余弦定理により，

$c^2=5^2+3^2-2\cdot 5\cdot 3\cos 120^\circ$

$=25+9-30\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=49$

$c>0$ だから，$c=\sqrt{49}=7$

よって，$S=\dfrac{1}{2}r(5+3+7)=\dfrac{15}{2}r$

一方，$S=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\sin 120^\circ=\dfrac{15}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，$\dfrac{15}{2}r=\dfrac{15}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$\boldsymbol{r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

5 (1) 余弦定理により，

$\cos A=\dfrac{3^2+2^2-4^2}{2\cdot 3\cdot 2}=-\dfrac{3}{2\cdot 3\cdot 2}=-\dfrac{1}{4}$

$\sin A>0$ だから，

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{15}{16}}$

$=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

よって，

$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{15}}{4}}$

(2) $S=\dfrac{1}{2}r(4+3+2)=\dfrac{9}{2}r$

よって，(1)から，$\dfrac{9}{2}r=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$　$\boldsymbol{r=\dfrac{\sqrt{15}}{6}}$

(3) 正弦定理により，$\dfrac{4}{\sin A}=2R$

よって，$\boldsymbol{R=}\dfrac{2}{\sin A}=2\div\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{8}{\sqrt{15}}=\boldsymbol{\dfrac{8\sqrt{15}}{15}}$

p.112～113

❻ 空間図形への応用

1 (1) Hは△BCD（1 辺 4 の正三角形）の外接円の中心，BHはその半径だから，正弦定理により，

$\dfrac{4}{\sin 60^\circ}=2\mathrm{BH}$

よって，$\mathrm{BH}=\dfrac{2}{\sin 60^\circ}=2\div\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{3}}{3}}$

(2) 直角三角形ABHで三平方の定理により，

$\mathrm{AH}=\sqrt{4^2-\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

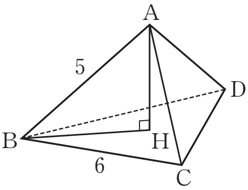
また，△BCDの面積 S は，

$S=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\sin 60^\circ=8\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

よって，$V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot \mathrm{AH}=\frac{1}{3}\cdot 4\sqrt{3}\cdot\frac{4\sqrt{6}}{3}=\boldsymbol{\frac{16\sqrt{2}}{3}}$

2　頂点Aから底面の△BCDに垂線AHを下ろす。Hは△BCD（1辺6の正三角形）の外接円の中心で，BHはその半径だから，

正弦定理により，



$\frac{6}{\sin 60^\circ}=2\mathrm{BH}$

$\mathrm{BH}=\frac{3}{\sin 60^\circ}=3\div\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=2\sqrt{3}$

△ABHで三平方の定理により，

$\mathrm{AH}=\sqrt{5^2-(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{13}$

また，△BCDの面積Sは，

$S=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\sin 60^\circ=18\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$

よって，$V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot \mathrm{AH}=\frac{1}{3}\cdot 9\sqrt{3}\cdot\sqrt{13}=\boldsymbol{3\sqrt{39}}$

3　(1)　三平方の定理により，

$\mathrm{DE}^2=(\sqrt{2})^2+1^2=3,$

$\mathrm{EG}^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2=5$

$\mathrm{DG}^2=(\sqrt{3})^2+1^2=4$

よって，△DEGで余弦定理により，

$\cos\theta=\frac{\mathrm{DE}^2+\mathrm{DG}^2-\mathrm{EG}^2}{2\cdot\mathrm{DE}\cdot\mathrm{DG}}=\frac{3+4-5}{2\cdot\sqrt{3}\cdot 2}=\boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{3}}}$

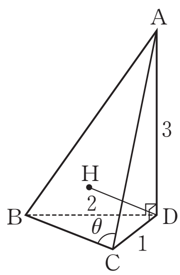
(2)　$\sin\theta>0$ だから，

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$

よって，$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{DE}\cdot\mathrm{DG}\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{11}}{2}}$

4　(1)　三平方の定理により，



$\mathrm{AB}^2=2^2+3^2=13$

$\mathrm{BC}^2=2^2+1^2=5$

$\mathrm{CA}^2=1^2+3^2=10$

$\angle\mathrm{BCA}=\theta$ とすると，

余弦定理により，

$\cos\theta=\frac{5+10-13}{2\cdot\sqrt{5}\sqrt{10}}=\frac{1}{5\sqrt{2}}$

$\sin\theta>0$ だから，

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{7}{5\sqrt{2}}$

よって，$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{7}{5\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{7}{2}}$

(2)　三角錐ABCDの体積をVとすると，

$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{DH}=\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{2}\cdot\mathrm{DH}=\frac{7}{6}\mathrm{DH}$

一方，$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{BCD}\cdot\mathrm{AD}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot 3=1$

よって，$\frac{7}{6}\mathrm{DH}=1$ より，$\mathrm{DH}=\boldsymbol{\frac{6}{7}}$

p.114　**問題 A**

1　(1)　$S=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 8\sin 60^\circ=28\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{14\sqrt{3}}$

(2)　$S=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\sin 150^\circ=10\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{5}$

2　(1)　余弦定理により，$\cos A=\frac{3^2+6^2-5^2}{2\cdot 3\cdot 6}=\frac{5}{9}$

$\sin A>0$ だから，

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{9}\right)^2}=\frac{2\sqrt{14}}{9}$

よって，$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6\cdot\frac{2\sqrt{14}}{9}=\boldsymbol{2\sqrt{14}}$

(2)　余弦定理により，

$\cos C=\frac{4^2+5^2-(\sqrt{31})^2}{2\cdot 4\cdot 5}=\frac{1}{4}$

$\sin C>0$ だから，

$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

よって，$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{15}}{2}}$

3　(1)　余弦定理により，

$\cos B=\frac{7^2+4^2-5^2}{2\cdot 7\cdot 4}=\boldsymbol{\frac{5}{7}}$

(2)　$\sin B>0$ だから，

$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$

よって，$S=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 4\cdot\frac{2\sqrt{6}}{7}=\boldsymbol{4\sqrt{6}}$

(3)　$S=\frac{1}{2}r(4+5+7)=8r$

一方，(2)より，$S=4\sqrt{6}$ だから，

$8r=4\sqrt{6}$　よって，$r=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}}$

4　(1)　△BCDは正三角形だから，$\angle\mathrm{BMD}=90^\circ$

したがって，△BDMは60°の角をもつ直角三角形であり，辺の比から，$\mathrm{DM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 6=3\sqrt{3}$

同様にして，$\mathrm{AM}=3\sqrt{3}$

よって，△ADMで余弦定理により，

$\cos\angle\mathrm{ADM}=\frac{\mathrm{AD}^2+\mathrm{DM}^2-\mathrm{AM}^2}{2\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DM}}$

$=\dfrac{6^2+(3\sqrt{3}\,)^2-(3\sqrt{3}\,)^2}{2\cdot6\cdot3\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

すなわち，$\cos\angle\mathrm{ADH}=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

(2) $\sin\angle\mathrm{ADH}>0$ だから，

$\sin\angle\mathrm{ADH}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{ADH}}$

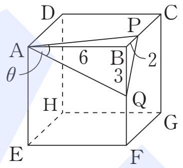
$=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

よって，$\mathrm{AH}=\mathrm{AD}\sin\angle\mathrm{ADH}=6\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{2\sqrt{6}}$

(3) $\triangle\mathrm{BCD}=\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot6\sin60^\circ=18\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$

よって，$V=\dfrac{1}{3}\cdot9\sqrt{3}\cdot2\sqrt{6}=\boldsymbol{18\sqrt{2}}$

5 (1) 三平方の定理より，



$\mathrm{AP}^2=2^2+6^2=40$

$\mathrm{PQ}^2=2^2+3^2=13$

$\mathrm{AQ}^2=6^2+3^2=45$

$\angle\mathrm{PAQ}=\theta$ とすると，

余弦定理により，

$\cos\theta=\dfrac{40+45-13}{2\cdot\sqrt{40}\cdot\sqrt{45}}=\dfrac{6}{5\sqrt{2}}=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{2}}{5}}$

(2) $\sin\theta>0$ だから，

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{5}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{5}$

よって，$S=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}\sin\theta$

$=\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{10}\cdot3\sqrt{5}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{5}=\boldsymbol{3\sqrt{14}}$

(3) 求める垂線の長さを h とすると，四角錐A–BPQの体積 V について，

$V=\dfrac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{PBQ}\cdot\mathrm{AB}=\dfrac{1}{3}\cdot S\cdot h$ が成り立つ。

よって，$\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot6=3\sqrt{14}\,h$

したがって，$h=\dfrac{6}{\sqrt{14}}=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{14}}{7}}$

p.115 問題 B

1 (1) 正弦定理 $\dfrac{c}{\sin C}=2R$ から，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$

よって，$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}ab\cdot\dfrac{c}{2R}=\dfrac{abc}{4R}$

(2) 正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=2R$ から，

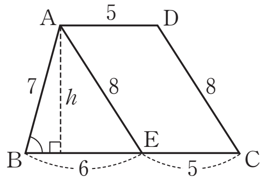
$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$

よって，$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$

$=\dfrac{1}{2}\cdot2R\sin A\cdot2R\sin B\cdot\sin C$

$=2R^2\sin A\sin B\sin C$

2 頂点Aを通り辺CDに平行な直線と辺BCの交点をEとすると，



$\mathrm{EC}=\mathrm{AD}=5$ から，

$\mathrm{BE}=6$，$\mathrm{AE}=\mathrm{DC}=8$

よって，△ABE で余弦定理により，

$\cos B=\dfrac{7^2+6^2-8^2}{2\cdot7\cdot6}=\dfrac{1}{4}$

$\sin B>0$ だから，

$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

したがって，台形ABCDの高さを h とすると，

$h=7\sin B=7\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{7\sqrt{15}}{4}$

よって，求める台形の面積は，

$\dfrac{1}{2}(5+11)\cdot\dfrac{7\sqrt{15}}{4}=\boldsymbol{14\sqrt{15}}$

3 (1) △ABCで余弦定理より，

$\mathrm{AC}^2=5^2+7^2-2\cdot5\cdot7\cos60^\circ$

$=25+49-2\cdot5\cdot7\cdot\dfrac{1}{2}=39$

よって，$\mathrm{AC}=\boldsymbol{\sqrt{39}}$

(2) 四角形ABCDは円に内接するから，

$\angle\mathrm{D}=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

$\mathrm{AD}=x$ とおくと，△ACDで余弦定理により，

$(\sqrt{39}\,)^2=x^2+5^2-2\cdot x\cdot5\cos120^\circ$

整理すると，$x^2+5x-14=0$

これを解くと，$x=-7,\ 2$

$\mathrm{AD}>0$ より，$\mathrm{AD}=\boldsymbol{2}$

(3) 四角形ABCDの面積を S とすると，

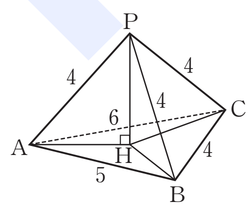
$S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot7\sin60^\circ+\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot5\sin120^\circ$

$=\dfrac{35\sqrt{3}}{4}+\dfrac{10\sqrt{3}}{4}=\boldsymbol{\dfrac{45\sqrt{3}}{4}}$

4 (1) △ABCの外接円の半径を R とすると，正弦定理 $\dfrac{4}{\sin A}=2R$ から，$R=\dfrac{2}{\sin A}$ …①

ここで，△ABCで余弦定理により，



$\cos A=\dfrac{6^2+5^2-4^2}{2\cdot6\cdot5}$

$=\dfrac{3}{4}$

$\sin A>0$ だから，

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

よって，①より，

$$R=2\div\frac{\sqrt{7}}{4}=\boldsymbol{\frac{8}{\sqrt{7}}}$$

(2)　Hは△ABCの外接円の中心だから，(1)より，

$$\mathrm{AH}=\frac{8}{\sqrt{7}}$$

よって，△PAHで三平方の定理により，

$$\mathrm{PH}=\sqrt{4^2-\left(\frac{8}{\sqrt{7}}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}}}$$

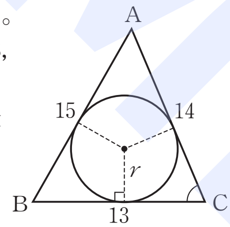
(3)　$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\sin A=15\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$

よって，$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{PH}$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{15\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\boldsymbol{5\sqrt{3}}$$

〔補足〕(2)　△PAH，△PBH，△PCHにおいて，∠PHA＝∠PHB＝∠PHC＝90°
PA＝PB＝PC，PHは共通
直角三角形の斜辺と他の１辺がそれぞれ等しいので，△PAH≡△PBH≡△PCH
よって，AH＝BH＝CH
ゆえに，Hは△ABCの外接円の中心である。

5 (1)　球の半径を r とする。
r は３辺の長さが $a=13$，$b=14$，$c=15$ である△ABCの内接円の半径と等しいから，



△ABC

$$=\frac{1}{2}r(13+14+15)$$

$$=21r$$

一方，余弦定理により，

$$\cos C=\frac{13^2+14^2-15^2}{2\cdot 13\cdot 14}=\frac{5}{13}$$

$\sin C>0$ だから，

$$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}$$

よって，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 13\cdot 14\sin C=13\cdot 7\cdot\frac{12}{13}=84$$

したがって，$21r=84$ より，$\boldsymbol{r=4}$

(2)　$V=\frac{4}{3}\pi\cdot 4^3=\frac{256}{3}\pi$

$S=4\pi\cdot 4^2=64\pi$

また，三角柱の高さは，球の直径と等しく，８だから，$V'=\triangle\mathrm{ABC}\cdot 8=84\cdot 8$

$S'=2\triangle\mathrm{ABC}+8(13+14+15)$
$=2\cdot 84+8\cdot 42=12\cdot 42$

よって，$V:V'=\frac{256}{3}\pi:84\cdot 8=8\pi:63$

$S:S'=64\pi:12\cdot 42=8\pi:63$

ゆえに，$V:V'=S:S'$

p.116〜117　章末問題

1 (1)　①　$\mathrm{AC}=\mathrm{CD}\tan\angle\mathrm{ADC}=2\tan 60^\circ=\boldsymbol{2\sqrt{3}}$

②　$\mathrm{EH}=\mathrm{DE}\sin\angle\mathrm{EDH}=2\sin 60^\circ=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

③　AD＝4，また，

$\mathrm{HD}=\mathrm{DE}\cos\angle\mathrm{EDH}=2\cos 60^\circ=2\cdot\frac{1}{2}=1$

よって，AH＝4−1＝**3**

(2)　EHを高さとする正三角形の面積の６倍と考えて，求める面積は，$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3}\times 6=\boldsymbol{6\sqrt{3}}$

2 (1)　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

θ が鋭角のとき，$\cos\theta>0$ だから，

$$\boldsymbol{\cos\theta=}\sqrt{\frac{9}{25}}=\boldsymbol{\frac{3}{5}}$$

また，$\boldsymbol{\tan\theta=}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{4}{5}\div\frac{3}{5}=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$

θ が鈍角のとき，$\cos\theta<0$ だから，

$$\boldsymbol{\cos\theta=}-\sqrt{\frac{9}{25}}=\boldsymbol{-\frac{3}{5}}$$

また，$\boldsymbol{\tan\theta=}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{4}{5}\div\left(-\frac{3}{5}\right)=\boldsymbol{-\frac{4}{3}}$

(2)　$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+(-\sqrt{5})^2=6$

よって，$\cos^2\theta=\frac{1}{6}$

$\tan\theta<0$ より，θ は鈍角で，$\cos\theta<0$

$$\boldsymbol{\cos\theta=}-\sqrt{\frac{1}{6}}=\boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{6}}}$$

また，$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ から，

$$\boldsymbol{\sin\theta=}\tan\theta\cos\theta=-\sqrt{5}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}}$$

3 (1)　$C=180^\circ-(30^\circ+105^\circ)=45^\circ$

正弦定理により，$\frac{a}{\sin 30^\circ}=\frac{6}{\sin 45^\circ}$

よって，$\boldsymbol{a=}\frac{6}{\sin 45^\circ}\sin 30^\circ=6\div\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}$

第 4 章　データの分析

p.118～121

❶ データの散らばり

1　167.1－148.8＝**18.3(cm)**

2　A

第 2 四分位数…**57**，第 1 四分位数…**47**

第 3 四分位数…**69**

四分位範囲…69－47＝**22**

四分位偏差…22÷2＝**11**

外れ値…**ない**

B

第 2 四分位数…$\dfrac{60+63}{2}$＝**61.5**

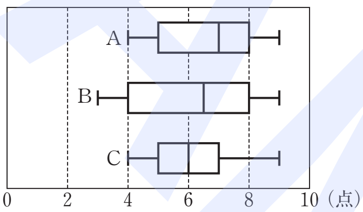
第 1 四分位数…**54**，第 3 四分位数…**71**

四分位範囲…71－54＝**17**

四分位偏差…17÷2＝**8.5**

外れ値…71＋17×1.5＜97 より，**97**

3　(1)



(2)　B

4　まず，箱の位置(データの集中している範囲)と，ヒストグラムの山の位置の対応を考えると，**①がイで，④がエ**。

また，②，③の箱ひげ図はともに左右対称であるが，②の方が散らばりの度合が大きいことから，**②がウで，③がア**。

5　(A組)　$\overline{x}=(3+5+6+6+4+5+5+7+5+4)\div10=5$

x	3	5	6	6	4	5	5	7	5	4	計50
$(x-\overline{x})^2$	4	0	1	1	1	0	0	4	0	1	計12

分散 $s^2=\dfrac{12}{10}=$**1.2**，**標準偏差** $s=\sqrt{1.2}\fallingdotseq$**1.1(人)**

(B組)　$\overline{x}=(6+7+3+3+7+8+5+4+3+4)\div10=5$

x	6	7	3	3	7	8	5	4	3	4	計50
$(x-\overline{x})^2$	1	4	4	4	4	9	0	1	4	1	計32

分散 $s^2=\dfrac{32}{10}=$**3.2**，**標準偏差** $s=\sqrt{3.2}\fallingdotseq$**1.8(人)**

6　(y の平均値)＝$(1\times1+2\times1+3\times0+4\times1+5\times3+6\times2+7\times1+8\times0+9\times1)\div10=5$

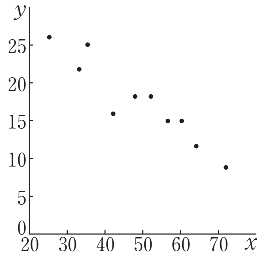
(y^2 の平均値)＝$(1\times1+4\times1+9\times0+16\times1+25\times3+36\times2+49\times1+64\times0+81\times1)\div10=29.8$

$s^2=29.8-5^2=4.8$　$s=\sqrt{4.8}\fallingdotseq$**2.2(点)**

p.122～124

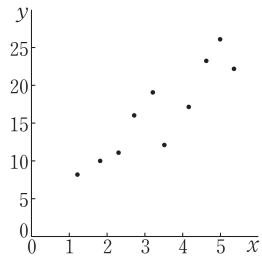
❷ データの相関

1　(1)



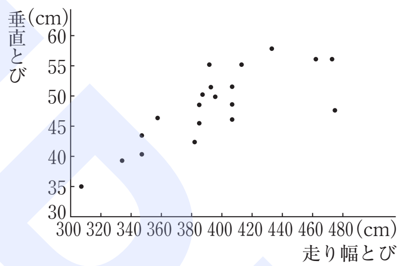
散布図より，**負の相関がある**。

(2)



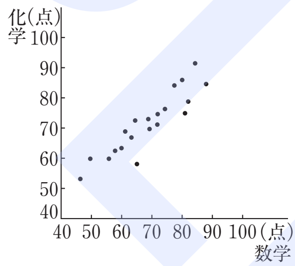
散布図より，**正の相関がある**。

2



散布図より，**正の相関がある**。

3



化学(点)＼数学(点)	40～50	50～60	60～70	70～80	80～90	90～100
90～100					1	
80～ 90				1	2	
70～ 80			3	3	2	
60～ 70		3	3			
50～ 60	1		1			
40～ 50						