数学II

■数学Ⅱ

●ねらいと特色

本書は，高校の重要科目である数学Ⅱの内容を，基本的な事柄を中心に，じっくり時間をかけて理解することを目標として編集されています。

数学Ⅱは高校数学の土台となる重要な科目であり，その内容をおろそかにしたままでは，あとで学習する上級の科目の理解はおぼつかなくなります。ですから，数学Ⅱの基礎を確実に固めておくことはとても大切なのです。そのためには，基本となる事柄をしっかり把握したうえで，個々の問題の考え方，定理・公式の使い方に慣れることが何よりも大切です。

本書では，各単元の重要な学習項目，新しい学習項目，定理・公式・計算方法などを各項目ごとに例を用いてわかりやすく示したり，例題の考え方や解答を示したりすることで修得が速やかになるように工夫しました。また，理解を確かなものにするために，例や例題のあとでは精選された類題を生徒自身が解くようにしてあります。

さらに，いくつかの関連する項目をまとめて繰り返し問題を解くことで復習が絶えず可能となり，理解が定着できるようにしてあります。

本書を最大限に活用することで，数学Ⅱの基礎力を大いに養ってください。

●構成と使い方

例・**例 題**…**例**は，重要な学習項目，新しい学習項目，重要な定理・公式・計算方法などを確実に修得するために設けてあります。また，**例 題**は，新しく学習する項目の基本的かつ最重要な問題です。じっくり時間をかけて読み，理解することが大切です。

類 題…**例**や**例 題**で学習した考え方，解き方を時間をおかずに自分自身の力で解くことで，理解を確かなものにします。

問題A・B…いくつかの関連する項目をまとめて反復練習します。A問題は類題と同一レベル，B問題はやや発展した問題を収録してあります。

章末問題…各章のまとめの問題です。基本問題・発展問題の２段階構成で，やや程度の高い問題も含まれています。各章の学習の仕上げとしてアタックしてください。

もくじ

第 1 章　式と証明

1　3次式の展開と因数分解

1　公式による展開①

●展開の公式 1

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$　　（3 乗の和になる）

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$　　（3 乗の差になる）

例　(1)　$(x+2)(x^2-2x+4)=(x+2)(x^2-x\cdot 2+2^2)$

$=x^3+2^3=x^3+8$

(2)　$(2x+1)(4x^2-2x+1)=(2x+1)\{(2x)^2-(2x)\cdot 1+1^2\}$

$=(2x)^3+1^3=8x^3+1$

(3)　$(2x-3)(4x^2+6x+9)=(2x-3)\{(2x)^2+2x\cdot 3+3^2\}$

$=(2x)^3-3^3=8x^3-27$

(4)　$(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)=(2x+y)\{(2x)^2-2x\cdot y+y^2\}$

$=(2x)^3+y^3=8x^3+y^3$

1　次の式を展開せよ。

(1)　$(x+1)(x^2-x+1)$　　(2)　$(3x-2)(9x^2+6x+4)$

(3)　$(4x-3y)(16x^2+12xy+9y^2)$

2　公式による展開②

●展開の公式 2

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$　　（和の 3 乗）

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$　　（差の 3 乗）

例　(1)　$(2x+1)^3=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot 1+3\cdot(2x)\cdot 1^2+1^3$

$=8x^3+12x^2+6x+1$

(2)　$(3x-2)^3=(3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot 2+3\cdot(3x)\cdot 2^2-2^3$

$=27x^3-54x^2+36x-8$

(3)　$(x-2y)^3=x^3-3\cdot x^2\cdot 2y+3\cdot x\cdot(2y)^2-(2y)^3$

$=x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$

2　次の式を展開せよ。

(1)　$(x+3)^3$　　(2)　$(2x-4)^3$

(3)　$(3x+y)^3$　　(4)　$(3x-2y)^3$

(5)　$(2x+5y)^3$　　(6)　$(2xy-1)^3$

3 3次式の因数分解

● 3 次式の因数分解の公式

$$\boldsymbol{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$
$$\boldsymbol{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

例　(1)　$x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-x\cdot 2+2^2)$
$=(x+2)(x^2-2x+4)$

(2)　$27x^3-1=(3x)^3-1^3=(3x-1)\{(3x)^2+3x\cdot 1+1^2\}$
$=(3x-1)(9x^2+3x+1)$

3　次の式を因数分解せよ。

(1)　x^3+1　　(2)　x^3+8

(3)　x^3-27y^3　　(4)　$8x^3+27$

(5)　$27a^3-125$　　(6)　$64a^3-\frac{1}{8}b^3$

4 いろいろな因数分解

例 題　次の式を因数分解せよ。

(1)　x^6-64　　(2)　a^6+26a^3-27

考え方　(1)　$(x^3)^2-8^2$ と考える。　(2)　$(a^3)^2+26a^3-27$ と考える。

解 答　(1)　$x^6-64=(x^3+8)(x^3-8)$
$=(x+2)(x^2-2x+4)(x-2)(x^2+2x+4)$
$=\boldsymbol{(x+2)(x-2)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)}$　答

(2)　$a^6+26a^3-27=(a^3-1)(a^3+27)$
$=(a-1)(a^2+a+1)(a+3)(a^2-3a+9)$
$=\boldsymbol{(a-1)(a+3)(a^2+a+1)(a^2-3a+9)}$　答

別解　(1)　$(x^2)^3-4^3$ と考えると，
$x^6-64=(x^2)^3-4^3=(x^2-4)(x^4+4x^2+16)$
$=(x^2-4)\{(x^2+4)^2-4x^2\}$
$=\boldsymbol{(x+2)(x-2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)}$　答

4　次の式を因数分解せよ。

(1)　x^6+y^6　　(2)　x^6-y^6

(3)　$64a^6-b^6$　　(4)　$(a+b)^3-1$

(5)　x^6-9x^3+8　　(6)　$8a^6+7a^3-1$

2 整式の除法

5 整式の除法①

●整式の割り算の計算は，整数の割り算と似た方法で，次の点に注意して行う。

［1］　割られる式と割る式を降べきの順に整理する。

［2］　ある次数の項がないときは，その項の場所をあけておく。

［3］　余りの次数が，割る式の次数より低くなるまで計算する。

例　$(x^3-3-2x)\div(2x+x^2-1)$

$$
\begin{array}{rrl}
 & x-2 & \cdots\cdots(\text{商})\\ \cline{2-2}
(\text{割る式})\cdots\cdots x^2+2x-1\,\big) & x^3 \qquad -2x-3 & \cdots\cdots(\text{割られる式})\\
 & x^3+2x^2-\ \ x & \cdots\cdots(\text{割る式})\times x\\ \cline{2-2}
 & -2x^2-\ \ x-3 & \\
 & -2x^2-4x+2 & \cdots\cdots(\text{割る式})\times(-2)\\ \cline{2-2}
 & 3x-5 & \cdots\cdots(\text{余り})
\end{array}
$$

1　次の割り算の商と余りを求めよ。

(1)　$(x^2+4x-3)\div(x-2)$　　(2)　$(4a^3+10a^2-9)\div(2a+3)$

(3)　$(3x^3+8-9x)\div(x^2+2x-2)$　　(4)　$(x^4+3x^2-5x+7)\div(-1-x+x^2)$

6 整式の除法②

● **2種類以上の文字を含む整式の除法**

1つの文字に着目して，5 のように割り算を行うことができる。

例　$(a^2+3ab+b^2)\div(a+b)$

(1)　a についての整式とみる。

$$
\begin{array}{rr}
 & a+2b\\ \cline{2-2}
a+b\,\big) & a^2+3ab+b^2\\
 & a^2+\ \ ab\qquad\\ \cline{2-2}
 & 2ab+b^2\\
 & 2ab+2b^2\\ \cline{2-2}
 & -\ \ b^2
\end{array}
$$

商 $a+2b$，余り $-b^2$

(2)　b についての整式とみる。

$$
\begin{array}{rr}
 & b+2a\\ \cline{2-2}
b+a\,\big) & b^2+3ab+a^2\\
 & b^2+\ \ ab\qquad\\ \cline{2-2}
 & 2ab+a^2\\
 & 2ab+2a^2\\ \cline{2-2}
 & -\ \ a^2
\end{array}
$$

商 $b+2a$，余り $-a^2$

注　上の **例** からわかるように，2種類以上の文字を含む場合，割り切れないときは，着目する文字が異なれば，商，余りが異なることがある。割り切れるときは，着目する文字に関係なく，商は一致する。

2　次の割り算を［　］内の文字についての整式とみて，商と余りを求めよ。

(1)　$(a^3-ab^2-a^2b+b^3)\div(a+b)$　　［a］

(2)　$(8x^3-24xy^2+5y^3)\div(2x-3y)$　　［x］

7 割り算の等式

● 一般に，整式Aを 0 でない整式Bで割ったときの商をQ，余りをRとすると，次の等式が成り立つ。

$$\boldsymbol{A=BQ+R}\qquad(\boldsymbol{R=0}\ \text{ または } \boldsymbol{R}\text{の次数}<\boldsymbol{B}\text{の次数})$$

つまり，(割られる式)＝(割る式)×(商)＋(余り)である。

とくに，$R=0$，すなわち　$A=BQ$ のとき，AはBで**割り切れる**という。

例　5 の 例 より，$(x^3-2x-3)\div(x^2+2x-1)$ の商は $x-2$，余りは $3x-5$ であるから，等式の形に書き表すと，

$$x^3-2x-3=(x^2+2x-1)(x-2)+3x-5$$

3　次の整式Aを整式Bで割った商と余りを求め，$A=BQ+R$ の形に表せ。

(1)　$A=x^3-3x-8$,　　$B=x-3$

(2)　$A=2x^3-5x^2+6$,　$B=2x-3+x^2$

8 商と余りの利用

例 題　x^3-x^2-2x+5 を整式Bで割ると，商が $x+2$，余りが $x-1$ である。整式Bを求めよ。

考え方　等式 $A=BQ+R$ を利用する。

解 答　条件から，　$x^3-x^2-2x+5=B\cdot(x+2)+x-1$

よって，　$B\cdot(x+2)=x^3-x^2-3x+6$

$$B=(x^3-x^2-3x+6)\div(x+2)$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-3x+3 \\ \hline
x+2 & x^3-x^2-3x+6 \\
 & x^3+2x^2 \\ \hline
 & -3x^2-3x \\
 & -3x^2-6x \\ \hline
 & 3x+6 \\
 & 3x+6 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

したがって，　$\boldsymbol{B=x^2-3x+3}$　答

4　次の条件を満たす整式A，Bを求めよ。

(1)　Aを x^2+x-2 で割ると，商が $3x-1$，余りが $2x-5$ である。

(2)　$3x^3-5x^2-8x+2$ をBで割ると，商が $3x+4$，余りが $x-2$ である。

3 分数式の計算

9 分数式の約分

❶ Aを整式，Bを定数でない整式とするとき，$\dfrac{A}{B}$ の形に表される式を**分数式**といい，Aをその**分子**，Bをその**分母**という。整式と分数式をまとめて**有理式**という。

例　$\dfrac{b}{2a}$，$\dfrac{4}{x-3}$，$\dfrac{3x+1}{x^2+2x-1}$ は分数式である。

$\dfrac{2a+1}{3}\left(=\dfrac{2}{3}a+\dfrac{1}{3}\right)$ は分数式でなく，整式である。

❷ **分数式の基本性質**

分数と同様に次のことが成り立つ。

1　$\dfrac{A}{B}=\dfrac{A\times C}{B\times C}$　$(C\neq 0)$

2　$\dfrac{A}{B}=\dfrac{A\div D}{B\div D}$　$(D\neq 0)$

❸ 分数式の分母・分子をその共通因数で割って簡単にすることを**約分**するという。

例　(1)　$\dfrac{10a^2b^4c}{15a^3bc^2}=\dfrac{5a^2bc\cdot 2b^3}{5a^2bc\cdot 3ac}=\dfrac{2b^3}{3ac}$

(2)　$\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-3)}=\dfrac{x+2}{x-3}$

$\dfrac{2b^3}{3ac}$，$\dfrac{x+2}{x-3}$ などのように，それ以上約分できない分数式を**既約分数式**という。

1　次の分数式を約分して，既約分数式で表せ。

(1)　$\dfrac{6a^2b^2c}{4ab^3c^4}$

(2)　$\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-5x+6}$

(3)　$\dfrac{4x^2-2x}{2x^2+x-1}$

(4)　$\dfrac{x^3-y^3}{x^3+x^2y+xy^2}$

10 分数式の乗法・除法

● 分数式の乗法・除法は，右の性質にしたがって，数の分数の場合と同じように計算する。
分数式の計算では，結果は約分して既約分数式の形にしておく。

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}$$

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$$

例　(1)　$\dfrac{x^3-9x}{x^2+2x-8}\times\dfrac{x+4}{x^2+3x}=\dfrac{x(x+3)(x-3)}{(x+4)(x-2)}\times\dfrac{x+4}{x(x+3)}$

$=\dfrac{x(x+3)(x-3)(x+4)}{(x+4)(x-2)x(x+3)}=\dfrac{x-3}{x-2}$

(2)　$\dfrac{a^2-5a+6}{a^2+a}\div\dfrac{a-2}{a+1}=\dfrac{(a-2)(a-3)}{a(a+1)}\times\dfrac{a+1}{a-2}$

$=\dfrac{(a-2)(a-3)(a+1)}{a(a+1)(a-2)}=\dfrac{a-3}{a}$

2　次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{x+1}{x^2-4}\times\dfrac{x-2}{x^2+x}$　　(2) $\dfrac{x^2-x-20}{x^3-2x^2+x}\times\dfrac{x^2-x}{x-5}$

(3) $\dfrac{9a^2-1}{a^2-9}\div\dfrac{3a+1}{a-3}$　　(4) $\dfrac{x^2-2x-8}{x^2+4x+4}\div\dfrac{x^2-4x}{x^2+x-2}$

11 分数式の通分

● 2つ以上の分数式の分母を，**9** の基本性質①を用いて，同じにすることを**通分**するという。

例　$\dfrac{2}{x(x+1)}$ と $\dfrac{x-1}{(x+1)(x+2)}$ を通分してみよう。

分母を $x(x+1)(x+2)$ にする。

$$\frac{2}{x(x+1)}=\frac{2\cdot(x+2)}{x(x+1)\cdot(x+2)}=\frac{2(x+2)}{x(x+1)(x+2)}$$

$$\frac{x-1}{(x+1)(x+2)}=\frac{(x-1)\cdot x}{(x+1)(x+2)\cdot x}=\frac{x(x-1)}{x(x+1)(x+2)}$$

3　次の各組の分数式を通分せよ。

(1) $\dfrac{x}{(x-1)(x-2)}$，$\dfrac{x-4}{(x-1)(x+3)}$　　(2) $\dfrac{x-1}{x^2-25}$，$\dfrac{3}{x^2+5x}$

12 分数式の加法・減法

❶ 分母が等しい分数式の加法，減法

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C},\quad \frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}$$

例　$\dfrac{x^2}{x-2}-\dfrac{4}{x-2}=\dfrac{x^2-4}{x-2}=\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}=x+2$

❷ 分母が異なる分数式の加法，減法

まず通分して分母を同じにしてから，❶の計算をする。

例　$\dfrac{x+1}{x^2-x}+\dfrac{2}{x^2-3x+2}=\dfrac{x+1}{x(x-1)}+\dfrac{2}{(x-1)(x-2)}$

$$=\frac{(x+1)(x-2)}{x(x-1)(x-2)}+\frac{2x}{x(x-1)(x-2)}$$

$$=\frac{(x^2-x-2)+2x}{x(x-1)(x-2)}=\frac{x^2+x-2}{x(x-1)(x-2)}$$

$$=\frac{(x+2)(x-1)}{x(x-1)(x-2)}=\frac{x+2}{x(x-2)}$$

4　次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+2}{x+1}$　　(2) $\dfrac{1}{(x-1)(x-5)}-\dfrac{1}{(x+3)(x-5)}$

(3) $\dfrac{2}{x^2-9}-\dfrac{1}{x^2+3x}$　　(4) $\dfrac{a+8}{a^2+a-2}+\dfrac{a-4}{a^2-a}$

(5) $\dfrac{x-7y}{x^2+xy-6y^2}+\dfrac{x+11y}{x^2+2xy-3y^2}$　　(6) $\dfrac{2}{(x-1)(x^2+1)}-\dfrac{x+3}{x^4-1}$

13 繁分数式

例　題　$\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}$ を簡単にせよ。

考え方　分母や分子に分数式を含む式の計算では，右の式の変形を利用する。または，分母と分子に同じ式を掛けて式を簡単にする。

$$\frac{\dfrac{A}{B}}{\dfrac{C}{D}}=\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}$$

解　答　$\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{\dfrac{x^2-1}{x}}{\dfrac{x+1}{x}}=\dfrac{x^2-1}{x}\div\dfrac{x+1}{x}$

$=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x}\times\dfrac{x}{x+1}=\boldsymbol{x-1}$　答

別解　$\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\cdot x}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\cdot x}=\dfrac{x^2-1}{x+1}$

$=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1}=\boldsymbol{x-1}$　答

5　次の式を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{1+\dfrac{1}{x+3}}{1-\dfrac{1}{x+3}}$　　(2) $\dfrac{x+2}{x-\dfrac{4}{x}}$　　(3) $\dfrac{x+2+\dfrac{2}{x-1}}{x-2-\dfrac{2}{x-1}}$

4 二項定理

14 パスカルの三角形

● $(a+b)^n$ の展開式の係数を右の図のように並べたものを，**パスカルの三角形**という。

［1］　各行の両端の数は1である。

［2］　2行目以降の両端以外の数は，左上と右上の数の和に等しい。

$a+b$	1　1
$(a+b)^2$	1　2　1
$(a+b)^3$	1　3　3　1
$(a+b)^4$	1　4　6　4　1
$(a+b)^5$	1　5　10　10　5　1
$(a+b)^6$	1　6　15　20　15　6　1

例　$(a+b)^6$

$=1\cdot a^6+6\cdot a^5b+15\cdot a^4b^2+20\cdot a^3b^3+15\cdot a^2b^4+6\cdot ab^5+1\cdot b^6$

$=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

1　次の式をパスカルの三角形を利用して展開せよ。

(1)　$(a+b)^4$　　(2)　$(a-b)^5$　　(3)　$(x+1)^6$

15 二項定理

❶　**二項定理**

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n$$

例　$(x+2)^5={}_5\mathrm{C}_0x^5+{}_5\mathrm{C}_1x^4\cdot 2+{}_5\mathrm{C}_2x^3\cdot 2^2+{}_5\mathrm{C}_3x^2\cdot 2^3+{}_5\mathrm{C}_4x\cdot 2^4+{}_5\mathrm{C}_5 2^5$

$=x^5+10x^4+40x^3+80x^2+80x+32$

❷　二項定理における ${}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r$ を $(a+b)^n$ の展開式の**一般項**といい，係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ を**二項係数**という。

例　$(x-3)^7$ の展開式における x^4 の係数

x^4 を含む項は ${}_7\mathrm{C}_3x^4(-3)^3$　　x^4 の係数は，${}_7\mathrm{C}_3(-3)^3=35\times(-27)=-945$

例　$(a-2b)^6$ の展開式における a^4b^2 の係数

a^4b^2 を含む項は ${}_6\mathrm{C}_2a^4(-2b)^2$　　a^4b^2 の係数は，${}_6\mathrm{C}_2(-2)^2=15\times 4=60$

2　次の式を二項定理を用いて展開せよ。

(1)　$(x+3)^4$　　(2)　$(2x+3y)^5$　　(3)　$(2a-b)^6$

3　次の式の展開式において，［　］内の項の係数を求めよ。

(1)　$(x-3)^5$　［x^3］　　(2)　$(2x+y)^6$　［x^4y^2］

(3)　$(x-2)^{10}$　［x^7］　　(4)　$(x^2-1)^6$　［x^4］

16 二項定理の応用

例 題　等式 ${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^n$ が成り立つことを証明せよ。

考え方　$(1+x)^n$ の展開式を利用する。

解 答　二項定理により，

$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$　←— 等式の証明にはこの式が重要

この等式で $x=1$ を代入すると，

$(1+1)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\cdot 1+{}_n\mathrm{C}_2\cdot 1^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\cdot 1^n$

よって，　${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^n$

4　次の等式を証明せよ。

(1)　${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-\cdots\cdots+(-1)^n{}_n\mathrm{C}_n=0$

(2)　${}_n\mathrm{C}_0+2{}_n\mathrm{C}_1+2^2{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+2^r{}_n\mathrm{C}_r+\cdots\cdots+2^n{}_n\mathrm{C}_n=3^n$

(3)　${}_n\mathrm{C}_0-\dfrac{{}_n\mathrm{C}_1}{2}+\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2}{2^2}-\cdots\cdots+(-1)^n\dfrac{{}_n\mathrm{C}_n}{2^n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

17 $(a+b+c)^n$ の展開式

例 題　$(x-3y+z)^5$ の展開式における x^2y^2z の係数を求めよ。

考え方　$\{(x-3y)+z\}^5$ として，二項定理を 2 回用いる。

解 答　$\{(x-3y)+z\}^5$ の展開式において，z を含む項は，　${}_5\mathrm{C}_1(x-3y)^4z$

$(x-3y)^4$ の展開式において，x^2y^2 を含む項は，　${}_4\mathrm{C}_2x^2(-3y)^2$

x^2y^2z の項の係数は，　${}_5\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2\times(-3)^2=5\cdot 6\cdot 9=\mathbf{270}$　答

別解　$(a+b+c)^n$ の展開式の一般項は，$\dfrac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$

ただし，p，q，r は 0 以上の整数で，$p+q+r=n$

$(x-3y+z)^5$ の展開式で，x^2y^2z を含む項は，　$\dfrac{5!}{2!2!1!}x^2\cdot(-3y)^2\cdot z$

x^2y^2z の係数は，　$\dfrac{5!}{2!2!1!}\cdot(-3)^2=\mathbf{270}$　答

5　$(a+b+c)^6$ の展開式における，次の項の係数を求めよ。

(1)　a^3bc^2　　(2)　abc^4

6　次の展開式における，[　]内の項の係数を求めよ。

(1)　$(3x-y+2z)^5$　　$[x^2yz^2]$　　(2)　$(x+2y-z)^7$　　$[x^4y^2z]$

問題 A

1 **［公式による展開］** 次の式を展開せよ。

(1) $(x+3)(x^2-3x+9)$　　(2) $(2a-1)(4a^2+2a+1)$

(3) $(x+2)^3$　　(4) $(2x-3)^3$

2 **［3 次式の因数分解］** 次の式を因数分解せよ。

(1) x^3+27　　(2) a^3-64　　(3) $8x^3+1$

(4) x^3-64y^3　　(5) $8a^3+b^3$　　(6) $27x^3-8y^3$

3 **［整式の除法］** 次の割り算の商と余りを求めよ。

(1) $(x^2+4x-7)\div(x+5)$　　(2) $(2x^3+10-13x)\div(2x^2+4x-5)$

4 **［割り算の等式］** 次の整式Aを整式Bで割った商と余りを求め，$A=BQ+R$ の形に表せ。

(1) $A=3x^3-4x-18,\quad B=x-2$　　(2) $A=3-2x^2+3x^3,\quad B=x^2-x+3$

5 **［分数式の計算］** 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-3x-4}\times\dfrac{x^2+x}{x^2-x-2}$　　(2) $\dfrac{x-6}{x^3-2x^2+x}\div\dfrac{x^2-4x-12}{x^3-x^2}$

(3) $\dfrac{2a}{a^2-1}+\dfrac{2}{1-a^2}$　　(4) $\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{3}{(x-1)(x+2)}$

6 **［二項定理①］** 次の式を展開せよ。

(1) $(2x+1)^4$　　(2) $(a-2)^5$

(3) $(3x-2)^5$　　(4) $(a-b)^6$

7 **［二項定理②］** 次の式の展開式において，［　］内の項の係数を求めよ。

(1) $(a+1)^6$　$[a^3]$　　(2) $(3a-b)^5$　$[a^2b^3]$

(3) $(2x-3y)^6$　$[x^4y^2]$　　(4) $(a+3b)^7$　$[a^5b^2]$

問題 B

1 次の式を展開せよ。

(1) $(x-1)(x^3+1)(x^2+x+1)$　　(2) $(2x-y)^3(2x+y)^3$

2 次の式を因数分解せよ。

(1) a^3b^3+1　　(2) x^6-64y^6

(3) $(x+y)^3-z^3$　　(4) x^6+9x^3+8

3 次の問いに答えよ。

(1) $x^2+2xy+3y^2-2x-2y-27$ を $x+y-6$ で割る計算について，x の整式とみて割り算した場合と，y の整式とみて割り算した場合の商と余りを，それぞれ求めよ。

(2) 整式 A を $3x^2-2x+1$ で割ると，商が $2x+3$，余りが $4x-1$ となる。整式 A を求めよ。

4 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{a^3-b^3}{a^2+2ab+b^2}\div\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^2-b^2}\div\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^3+b^3}$

(2) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{(x-2)(x-4)}$　　(3) $\dfrac{x+5}{x^2-x}-\dfrac{x-3}{2x^2+x}-\dfrac{x+15}{2x^2-x-1}$

(4) $\dfrac{1+\dfrac{2}{x}}{x-\dfrac{2}{x+1}}$　　(5) $2-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$

5 次の式の展開式において，[　]内の項の係数を求めよ。

(1) $(3x^2+1)^5$　[x^6]　　(2) $\left(2x^2-\dfrac{1}{3}\right)^8$　[x^6]

(3) $(3x-y-4z)^6$　[xy^4z]　　(4) $(x+y-3z)^7$　[$x^2y^3z^2$]

6 二項定理を利用して，次の和を求めよ。

$${}_nC_0+5{}_nC_1+5^2{}_nC_2+\cdots\cdots+5^n{}_nC_n$$

章末問題

基本問題

1　次の式を因数分解せよ。

(1)　$24x^3+81y^3$　　(2)　$x^3-(y+z)^3$

2　次の問いに答えよ。

(1)　整式 A を $3x^2+2x+11$ で割ると，商が $x-2$，余りが 9 となった。整式 A を求めよ。

(2)　x の整式 $2x^3+x^2-5x+a$ を $2x-1$ で割った余りが 0 となるように，定数 a の値を定めよ。

3　次の計算をせよ。

(1)　$\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x}\times\dfrac{x-1}{x+3}$　　(2)　$\dfrac{a^2-2a}{a^2+6a+9}\div\dfrac{a^2-4}{a^2+3a}$

(3)　$\dfrac{1}{a(a+2)}+\dfrac{1}{(a+2)(a+4)}$　　(4)　$\dfrac{2}{x^2-2x}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

4　次の展開式における，[　]内の項の係数を求めよ。

(1)　$(x-1)^6$　　$[x^3]$　　(2)　$(3a+b)^5$　　$[a^2b^3]$

(3)　$(a+b+c)^3$　　$[a^2b]$　　(4)　$(a+b+c)^6$　　$[a^2b^2c^2]$

5　次の等式が x についての恒等式になるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

(1)　$\dfrac{x+8}{x^2+x-6}=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+3}$

(2)　$x^3+3=(x+1)^3+a(x+1)^2+b(x+1)+c$

6　$x+y=1$ のとき，次の等式を証明せよ。

$(x^2+y)^2=(y^2+x)(1-xy)$

7　次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つときを調べよ。

$xy+yz+zx\leqq x^2+y^2+z^2$

発展問題

8　次の式を展開せよ。

$(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3$

9　次の式を因数分解せよ。

(1)　x^9-y^9　　(2)　$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$

10　整式 $8x-2+x^4$ を整式 B で割ると，商が x^2-2x+5，余りが $-4x+3$ となった。整式 B を求めよ。

11　等式 $(k+2)x+(4k-4)y-7k-2=0$ が，どんな k の値に対しても成り立つのは，x，y がどんな値のときか。

12　$6x^2-11xy-10y^2+7x+11y-3=(ax+2y+b)(cx-5y+3)$ が恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

13　$x:y:z=(b-c):(c-a):(a-b)$ のとき，次の等式を証明せよ。

$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=0$

14　次の問いに答えよ。

(1)　次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つときを調べよ。

$3(x^2+y^2+z^2)\geqq(x+y+z)^2$

(2)　(1)の結果を利用して，$x+y+z=6$ のとき，$x^2+y^2+z^2$ の最小値を求めよ。

15　次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つときを調べよ。

$|ab+cd|\leqq\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+d^2}$

16　$0<a<b$，$a+b=2$ のとき，1，ab，$\dfrac{a^2+b^2}{2}$ の大小を比較せよ。

第 2 章　複素数と方程式

1　複素数と方程式の解

1　複素数

❶　2 乗すると -1 になる新しい数を 1 つ考えて，これを文字 $\boldsymbol{i}$ で表す。すなわち

$$\boldsymbol{i^2=-1}$$

である。この i を**虚数単位**という。

❷　2 つの実数 a，b を用いて，$a+bi$ の形に表される数を考え，これを**複素数**といい，a をその**実部**，b を**虚部**という。

$\underbrace{a}_{\text{実部}}+\underbrace{b}_{\text{虚部}}i$

例　複素数 $2+5i$ の実部は 2，虚部は 5

❸　a，b の値によって，複素数 $a+bi$ は次のように分類される。

$$\text{複素数 } a+bi\begin{cases}\text{実数 } a & (b=0)\\ \text{虚数 } a+bi & (b\neq 0)\qquad \text{とくに}\quad \text{純虚数 } bi\quad (a=0,\ b\neq 0)\end{cases}$$

例　$3+0i$ は実数 3，$0+2i$ は純虚数 $2i$ である。

注　とくに断りがない場合，複素数 $a+bi$，$c+di$ などでは，i 以外の文字はすべて実数とする。

1　次の複素数の実部と虚部をいえ。

(1)　$-1+6i$　　(2)　$\sqrt{5}-i$　　(3)　-2　　(4)　$\sqrt{3}\,i$

2　複素数の相等

● 2 つの複素数が等しいのは，次のように実部，虚部がともに等しいときである。

[1]　$a+bi=c+di \iff a=c$　かつ　$b=d$

[2]　$a+bi=0 \iff a=0$　かつ　$b=0$

例　$(x-y)+(2x+3)i=3+5i$ となる実数 x，y を求めてみよう。

x，y が実数であるから，$x-y$，$2x+3$ は実数である。

よって，　$x-y=3$，　$2x+3=5$

これを解いて，　$x=1$，$y=-2$

2　次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ。

(1)　$x+yi=-2+i$

(2)　$(x+y)+(2x-3)i=2+5i$

(3)　$(3x-y)+(x-y+6)i=0$

3 共役な複素数

❶　複素数 $a+bi$ と $a-bi$ を互いに**共役**（きょうやく）**な複素数**という。実数 a と共役な複素数は，a 自身である。

例　$3+2i$ と共役な複素数は $3-2i$

❷　互いに共役な複素数 $a+bi$ と $a-bi$ の和と積は，ともに実数である。

1　$(a+bi)+(a-bi)=2a$

2　$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2-b^2\cdot(-1)=a^2+b^2$

例　(1)　$(3+2i)+(3-2i)=6$

(2)　$(3+2i)(3-2i)=9-4i^2=9-4\cdot(-1)=13$

注　i を含む数の計算は，i をふつうの文字と同様に扱い，i^2 が出てくれば，それを -1 でおき換える。

3　次の複素数について，それと共役な複素数との和，積を求めよ。

(1)　$1+i$　　(2)　$-2-7i$　　(3)　-3　　(4)　$\sqrt{5}\,i$

4 複素数の演算

❶　複素数の四則計算は，次のようになり，結果は複素数である。

1　加法　$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

2　減法　$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

3　乗法　$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

4　除法　$c+di\neq 0$ のとき

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

例　$\dfrac{1-2i}{3+i}=\dfrac{(1-2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\dfrac{3-i-6i+2i^2}{9-i^2}$

$$=\frac{(3-2)+(-1-6)i}{9+1}=\frac{1-7i}{10}=\frac{1}{10}-\frac{7}{10}i$$

❷　α，β を複素数とすると，実数の場合と同様に，次のことが成り立つ。

$$\alpha\beta=0 \iff \alpha=0 \text{ または } \beta=0$$

注　虚数については，実数のときのような大小関係や，正・負などは考えない。

4　次の計算をせよ。

(1)　$(3+2i)+(5-3i)$　　(2)　$(3+2i)-(5-3i)$

(3)　$(1+3i)(2+i)$　　(4)　$\dfrac{1+3i}{2+i}$

5 負の数の平方根

● 複素数の範囲では，負の数の平方根が存在し，一般に次のことが成り立つ。

$a>0$ のとき，　$\boldsymbol{\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i}$　　とくに　$\boldsymbol{\sqrt{-1}=i}$

$-a$ の平方根は，　$\pm\sqrt{-a}=\boldsymbol{\pm\sqrt{a}\,i}$

例　(1)　$\sqrt{-3}=\sqrt{3}\,i$　　(2)　-8 の平方根は　$\pm\sqrt{-8}=\pm\sqrt{8}\,i=\pm2\sqrt{2}\,i$

(3)　$\sqrt{-3}\times\sqrt{-5}=\sqrt{3}\,i\times\sqrt{5}\,i=\sqrt{15}\,i^2=-\sqrt{15}$

(4)　$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}\,i}=\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\,i}{\sqrt{5}\,i\cdot\sqrt{5}\,i}=\dfrac{\sqrt{15}\,i}{5i^2}=-\dfrac{\sqrt{15}}{5}i$

注　$a<0$，$b<0$ のときは，$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ は成り立たない。

また，$a>0$，$b<0$ のときは，$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ は成り立たない。

$\sqrt{\text{負の数}}$ を含む計算は，まず $\sqrt{\text{負の数}}=\sqrt{\text{正の数}}\,i$ に直してから計算する。

5　次の数を i を用いて表せ。

(1)　$\sqrt{-6}$　　(2)　$-\sqrt{-18}$　　(3)　-12 の平方根

6　次の計算をせよ。

(1)　$\sqrt{-2}\times\sqrt{-14}$　　(2)　$\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{-5}}$　　(3)　$\dfrac{\sqrt{-27}}{\sqrt{-3}}$

6 2次方程式の解の公式

● 2 次方程式は複素数の範囲で常に解をもち，次の解の公式が成り立つ。

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は　$\boldsymbol{x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は　$\boldsymbol{x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}}$

例　2 次方程式 $3x^2+6x+7=0$ の解

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot3\cdot7}}{2\cdot3}=\frac{-6\pm\sqrt{-48}}{6}=\frac{-6\pm4\sqrt{3}\,i}{6}=\frac{-3\pm2\sqrt{3}\,i}{3}$$

または　$b'=3$ から，　$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-3\cdot7}}{3}=\dfrac{-3\pm\sqrt{-12}}{3}=\dfrac{-3\pm2\sqrt{3}\,i}{3}$

注　とくに断りがない場合，方程式の係数はすべて実数とする。

7　次の 2 次方程式を解け。

(1)　$x^2-x+1=0$　　(2)　$2x^2-5x+3=0$

(3)　$2x^2-8x-1=0$　　(4)　$x^2+2\sqrt{2}\,x+3=0$

7 判別式①

● 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の**判別式**を $\boldsymbol{D=b^2-4ac}$ とすると，Dの符号によって，次のように解の種類が判別される。

$D>0$ $\Longleftrightarrow$ 異なる 2 つの実数解をもつ
$D=0$ $\Longleftrightarrow$ 重解をもつ
（上の 2 つをまとめて）**$D\geqq 0$ $\Longleftrightarrow$ 実数解をもつ**
$D<0$ $\Longleftrightarrow$ 異なる 2 つの虚数解をもつ　（互いに共役な複素数）

とくに，$b=2b'$ のときは，$\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$ を用いて，解を判別することができる。

例　2 次方程式 $3x^2+4x+3=0$ の解の種類を判別してみよう。

$$D=4^2-4\cdot3\cdot3=-20<0\quad\left(\text{または，}\ \frac{D}{4}=2^2-3\cdot3=-5<0\right)$$

よって，この 2 次方程式は異なる 2 つの虚数解をもつ。

8　次の 2 次方程式の解の種類を判別せよ。

(1)　$5x^2+3x-2=0$　　(2)　$4x^2-12x+9=0$

(3)　$3x^2+9x+7=0$　　(4)　$-13x^2+14x-3=0$

8 判別式②

例題　2 次方程式 $x^2+(a-1)x+1=0$ が実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

考え方　実数解をもつ条件は，$D>0$ または $D=0$，すなわち $D\geqq 0$ である。

解答　2 次方程式の判別式を D とすると，

$$D=(a-1)^2-4\cdot1\cdot1=a^2-2a-3=(a+1)(a-3)$$

実数解をもつ条件は $D\geqq 0$ であるから，　$(a+1)(a-3)\geqq 0$

よって，　$\boldsymbol{a\leqq -1,\ 3\leqq a}$　答

9　2 次方程式 $x^2-2ax+9=0$ が次のような解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

(1)　異なる 2 つの実数解　　(2)　異なる 2 つの虚数解

9 解と係数の関係

● 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解と係数の間には，次の関係が成り立つ。

2 つの解を α，β とすると，　$\boldsymbol{\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}}$，　$\boldsymbol{\alpha\beta=\dfrac{c}{a}}$

例　2 次方程式 $2x^2+7x-4=0$ の 2 つの解を α，β とすると，

$$\alpha+\beta=-\frac{7}{2},\quad \alpha\beta=\frac{-4}{2}=-2$$

10　次の２次方程式について，２つの解の和と積を求めよ。

(1)　$x^2-3x+5=0$　　　(2)　$8x^2+16x-3=0$

10 解と係数の関係の利用①

例 題　２次方程式 $x^2-6x+7=0$ の２つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2+\beta^2$　　　(2)　$(\alpha-\beta)^2$　　　(3)　$\alpha^3+\beta^3$

考え方　与えられた式を $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ を使った式に変形する。次に，$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ の値を解と係数の関係から求め，変形した式に代入する。

解 答　解と係数の関係から，　$\alpha+\beta=6$，　$\alpha\beta=7$

(1)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=6^2-2\cdot7=\mathbf{22}$　答

(2)　$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=6^2-4\cdot7=\mathbf{8}$　答

(3)　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=6^3-3\cdot7\cdot6=\mathbf{90}$　答

注　一般に，２つの文字 α と β を入れかえても同じ式となるものを α，β の**対称式**という。とくに，$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ を**基本対称式**という。そして，対称式はすべて基本対称式で表すことができる。

11　２次方程式 $x^2+3x-4=0$ の２つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2+\beta^2$　　　(2)　$\alpha^3+\beta^3$　　　(3)　$\left(\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}\right)^2$

11 解と係数の関係の利用②

例 題　２次方程式 $x^2-8x+k=0$ の１つの解が他の解の３倍であるとき，定数 k の値と２つの解を求めよ。

考え方　条件より，１つの解を α とおくと，他の解は 3α と表されるから，解と係数の関係が利用できる。

解 答　２つの解を α，3α とおくと，解と係数の関係より，

$\alpha+3\alpha=8$　……①　　$\alpha\cdot3\alpha=k$　……②

①より，　$4\alpha=8$　　よって，　$\alpha=2$

これを②に代入して，　$k=3\alpha^2=3\cdot2^2=12$

また，他の解 3α は，　$3\alpha=3\cdot2=6$　　答　$\boldsymbol{k=12}$，**２つの解は２，６**

12　２次方程式 $x^2-6x+k=0$ の２つの解が次の条件を満たすとき，定数 k の値と２つの解を求めよ。

(1)　１つの解が他の解の５倍である。　　(2)　２つの解の差が２である。

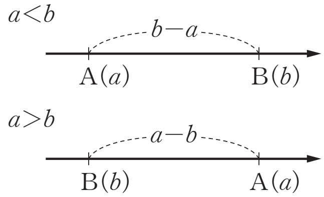
第 3 章　図形と方程式

1　点と座標

1　数直線上の2点間の距離

● 数直線上の 2 点A(a)，B(b)間の距離ABは

$$\mathbf{AB}=|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|$$



例　(1)　2 点A(-2)，B(4)間の距離

$\mathrm{AB}=|4-(-2)|=|6|=6$

(2)　2 点A(-3)，B(-8)間の距離

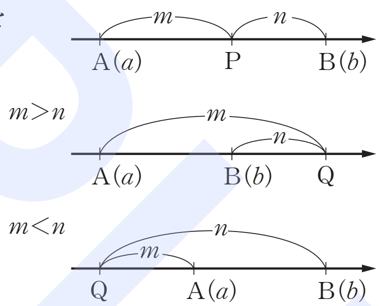
$\mathrm{AB}=|-8-(-3)|=|-5|=5$

1　次の 2 点間の距離を求めよ。

(1)　A(-1)，B(5)　　(2)　O(0)，A(-4)　　(3)　A(7)，B(-9)

2　線分の内分点，外分点

● 数直線上の 2 点A(a)，B(b)に対して，線分ABを $m:n$ に内分する点をP，外分する点をQとする。



内分点Pの座標は，　$\dfrac{\boldsymbol{na+mb}}{\boldsymbol{m+n}}$

外分点Qの座標は，　$\dfrac{\boldsymbol{-na+mb}}{\boldsymbol{m-n}}$

とくに，線分ABの中点の座標は，　$\dfrac{\boldsymbol{a+b}}{\mathbf{2}}$

例　2 点A(2)，B(8)を結ぶ線分ABを，$3:1$ に内分する点，および外分する点の座標を求めてみよう。

内分点　$\dfrac{1\times2+3\times8}{3+1}=\dfrac{13}{2}$

外分点　$\dfrac{-1\times2+3\times8}{3-1}=11$

注　外分点の座標の公式は，内分点の座標の公式の n を $-n$ におき換えたものである。

2　2 点A(-3)，B(7)を結ぶ線分ABに対して，次の点の座標を求めよ。

(1)　$3:2$ に内分する点P　　(2)　$3:2$ に外分する点Q

(3)　中点M　　(4)　$3:5$ に外分する点R

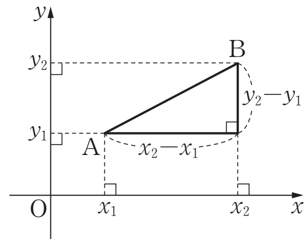
3 2点間の距離

● 2点A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$間の距離ABは

$$\mathbf{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

とくに，原点Oと点A$(x_1,\ y_1)$の距離OAは

$$\mathbf{OA}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$



例　(1)　2点A(1，-2)，B(3，4)間の距離

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(3-1)^2+\{4-(-2)\}^2}$$
$$=\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

(2)　原点Oと点A(1，-2)の距離OA

$$\mathrm{OA}=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$$

3　次の2点間の距離を求めよ。

(1)　A(2，1)，B(5，5)　　(2)　原点O，A(-6，2)

(3)　A(3，7)，B(7，3)　　(4)　A(-4，3)，B(8，-2)

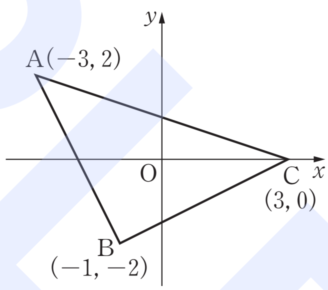
4　点A(4，2)に対して，次の点の座標を求めよ。

(1)　点Aからの距離が$2\sqrt{2}$であるx軸上の点P

(2)　点Aからの距離が5であるy軸上の点Q

4 三角形の形状

例題　3点A(-3，2)，B(-1，-2)，C(3，0)を頂点とする△ABCはどのような形の三角形か。



考え方　まず，3辺の長さを求める。

AB＝BC　　なら　二等辺三角形

AB＝BC＝CA　　なら　正三角形

$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2=\mathrm{CA}^2$　　なら　∠B＝90°の直角三角形

解答　$\mathrm{AB}=\sqrt{\{-1-(-3)\}^2+(-2-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\mathrm{BC}=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+\{0-(-2)\}^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\mathrm{CA}=\sqrt{(-3-3)^2+(2-0)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

よって，AB＝BC，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2=\mathrm{CA}^2$

したがって，△ABCは **∠B＝90°の直角二等辺三角形**　答

5　次の3点A，B，Cを頂点とする△ABCはどのような形の三角形か。

(1)　A(0，0)，B(4，$-4\sqrt{3}$)，C(8，0)

(2)　A(1，2)，B(5，5)，C(-2，6)

5　2点から等距離にある点の座標

例 題　2 点 A$(1,\ -4)$，B$(4,\ 2)$から等距離にあって，直線 $y=2x$ 上にある点Pの座標を求めよ。

考え方　点Pは 2 点A，Bから等距離にあるから，　AP＝BP

解 答　点Pの座標を$(t,\ 2t)$とすると AP＝BP から，　$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

よって，　$(t-1)^2+\{2t-(-4)\}^2=(t-4)^2+(2t-2)^2$

$30t=3$ より，　$t=\dfrac{1}{10}$

したがって，点Pの座標は，　$\left(\dfrac{1}{10},\ \dfrac{1}{5}\right)$ 答

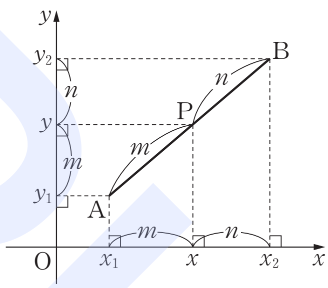
6　次の点の座標を求めよ。

(1)　2 点A$(1,\ -3)$，B$(3,\ 2)$から等距離にある x 軸上の点P

(2)　2 点A$(1,\ 1)$，B$(3,\ 0)$から等距離にある直線 $y=-2x$ 上の点Q

6　内分点，外分点の座標

● 2 点A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$を結ぶ線分ABを $m:n$ に内分する点をP，外分する点をQとする。



内分点P　$\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$

外分点Q　$\left(\dfrac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \dfrac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$

とくに，線分ABの**中点**の座標は，

$$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$$

例　2 点A$(-2,\ 1)$，B$(8,\ 6)$を結ぶ線分ABを，$2:3$ に内分する点，および外分する点の座標を求めてみよう。

内分点　$\left(\dfrac{3\times(-2)+2\times8}{2+3},\ \dfrac{3\times1+2\times6}{2+3}\right)$より，　$(2,\ 3)$

外分点　$\left(\dfrac{-3\times(-2)+2\times8}{2-3},\ \dfrac{-3\times1+2\times6}{2-3}\right)$より，　$(-22,\ -9)$

7　2 点A$(-1,\ 4)$，B$(5,\ -5)$を結ぶ線分ABについて，次の点の座標を求めよ。

(1)　$1:2$ に内分する点　　(2)　$1:2$ に外分する点

(3)　中点　　(4)　$5:3$ に外分する点

7 点に関して対称な点

例 題　点A$(-1,\ 2)$に関して，点P$(4,\ 5)$と対称な点Qの座標を求めよ。

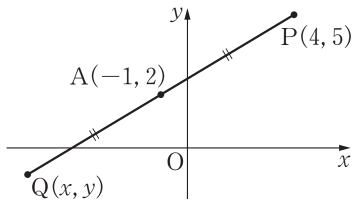
考え方　点Aは線分PQの中点である。

解 答　点Qの座標を$(x,\ y)$とすると，線分PQの中点がA$(-1,\ 2)$であるから，

$$\frac{4+x}{2}=-1,\quad \frac{5+y}{2}=2$$

これを解いて，　$x=-6,\ y=-1$

よって，点Qの座標は，　$\boldsymbol{(-6,\ -1)}$ 答



8　点A$(2,\ 3)$に関して，点P$(7,\ -2)$と対称な点Qの座標を求めよ。

9　4点A$(-1,\ 0)$，B$(3,\ -2)$，C$(5,\ 2)$，Dを頂点とする平行四辺形ABCDがある。次の点の座標を求めよ。

(1)　対角線の交点P　　　(2)　頂点D

8 三角形の重心

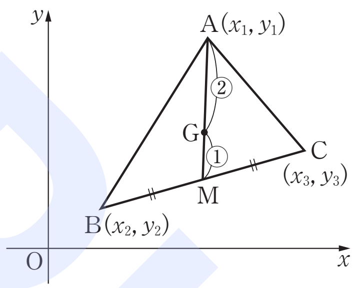
● 3点A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$，C$(x_3,\ y_3)$を頂点とする△ABCの重心Gの座標は，

$$\left(\frac{\boldsymbol{x_1+x_2+x_3}}{\boldsymbol{3}},\ \frac{\boldsymbol{y_1+y_2+y_3}}{\boldsymbol{3}}\right)$$

例　3点A$(-1,\ -3)$，B$(1,\ 2)$，C$(6,\ -1)$を頂点とする△ABCの重心Gの座標

$$\left(\frac{-1+1+6}{3},\ \frac{-3+2+(-1)}{3}\right)$$

より，$\left(2,\ -\dfrac{2}{3}\right)$



10　次の3点A，B，Cを頂点とする△ABCの重心の座標を求めよ。

(1)　A$(1,\ 5)$，B$(2,\ 3)$，C$(-3,\ 2)$

(2)　A$(-3,\ 5)$，B$(-4,\ 0)$，C$(1,\ 4)$

11　3点A$(1,\ 10)$，B$(-4,\ 0)$，Cを頂点とする△ABCの重心Gの座標が$(1,\ 5)$であるとき，次の問いに答えよ。

(1)　点Cの座標を求めよ。

(2)　辺AB，BC，CAをそれぞれ$3:2$に内分する点D，E，Fの座標を求めよ。

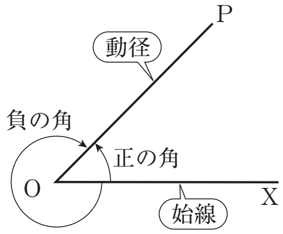
(3)　△DEFの重心G′の座標を求めよ。

第4章　三角関数

1　三角関数

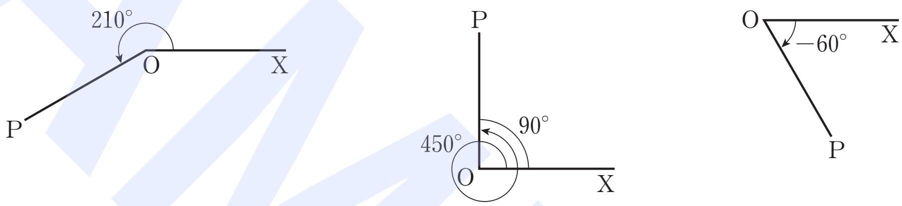
1　一般角

❶　平面上で，点Oを中心として半直線OPを回転させるとき，この半直線OPを**動径**といい，動径の始めの位置を**始線**という。始線OXから時計の針の回転と逆向きに測った角を**正の角**，時計の針の回転と同じ向きに測った角を**負の角**という。



例　次の角の動径OPを図示してみよう。

(1)　210°　　(2)　450°　　(3)　−60°



このように回転の向きと大きさを表した角を**一般角**という。

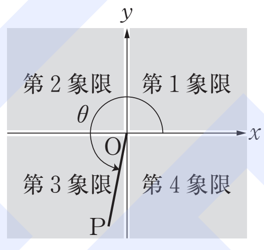
❷　動径OPと始線OXのなす角の1つをαとすると，動径OPの表す一般角θは，次のように表される。　$\boldsymbol{\theta=\alpha+360°\times n}$　（nは整数）

例　上の 例 の動径OPの表す一般角を求めてみよう。
nを整数とする。

(1)　$210°+360°\times n$　　(2)　$90°+360°\times n$

(3)　$-60°+360°\times n$　または　$300°+360°\times n$

❸　一般角θを表す動径が，たとえば，第3象限にあるとき，θは第3象限の角という。



例　150°は第2象限の角，　−75°は第4象限の角

1　次の角の動径OPを図示せよ。また，第何象限の角であるか。

(1)　110°　　(2)　−15°　　(3)　400°　　(4)　−520°

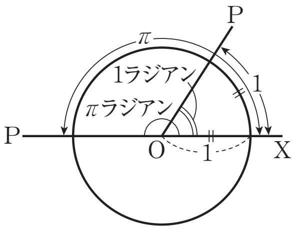
2　次の角の動径をOPとするとき，動径OPの表す一般角を$\alpha+360°\times n$の形に表せ。ただし，$0°\leqq\alpha<360°$とする。また，第何象限の角であるか。

(1)　500°　　(2)　730°　　(3)　−45°　　(4)　−490°

2 弧度法

❶　半径 1 の円において，半径と同じ長さ 1 の弧に対する中心角の大きさを **1 ラジアン**または **1 弧度**という。

1 ラジアンを単位とする角の表し方を**弧度法**という。



❷　**度数法と弧度法の関係**　$180° = \pi$ ラジアン　より，

$$\textbf{1 ラジアン} = \frac{\mathbf{180°}}{\boldsymbol{\pi}}\ (\fallingdotseq 57.3°),\quad \mathbf{1°} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{180}}\textbf{ ラジアン}$$

$x° = \theta$ (ラジアン)とすると，　$\theta = \dfrac{\pi}{180}x$,　$x = \dfrac{180}{\pi}\theta$

例　(1)　60°を弧度法になおすと，　$60 \times \dfrac{\pi}{180} = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$

(2)　$\dfrac{5}{4}\pi$ を度数法になおすと，　$\dfrac{5}{4} \times 180° = \mathbf{225°}$

注　弧度法では，ふつう単位のラジアンを省略する。

❸　弧度法では，動径 OP と始線 OX のなす角の 1 つを α とすると，動径 OP の表す一般角 θ は，次のように表される。

$\boldsymbol{\theta = \alpha + 2n\pi}$　(n は整数)

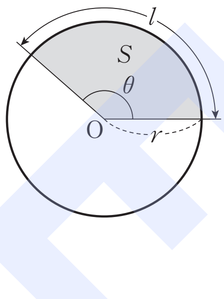
3　次の表を完成せよ。

度数法	0°	15°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	(コ)	(サ)	360°
弧度法	(ア)	(イ)	(ウ)	(エ)	(オ)	(カ)	(キ)	(ク)	(ケ)	π	$\dfrac{3}{2}\pi$	(シ)

3 弧度法と扇形

● 半径が r，中心角が θ (ラジアン)の扇形の弧の長さ l，面積 S は

$$\boldsymbol{l = r\theta},\quad \boldsymbol{S = \frac{1}{2}r^2\theta}\quad \text{または}\quad \boldsymbol{S = \frac{1}{2}lr}$$



〔証明〕　扇形の弧の長さと面積は，中心角に比例するから，

$\dfrac{l}{2\pi r} = \dfrac{\theta}{2\pi}$　　よって，　$l = r\theta$

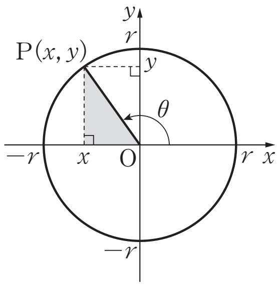
$\dfrac{S}{\pi r^2} = \dfrac{\theta}{2\pi}$　　よって，　$S = \dfrac{1}{2}r^2\theta$

4　次のような扇形の弧の長さと面積を求めよ。

(1)　半径が 4，中心角が $\dfrac{\pi}{6}$　　(2)　半径が 6，中心角が120°

4 三角関数の定義

●座標平面上において，x 軸の正の部分を始線，動径OPを表す一般角を θ，OP$=r$，P$(x,\ y)$とすると，一般角 θ の正弦，余弦，正接は，次のように定義される。

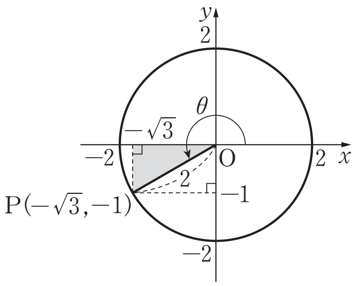


$$\boldsymbol{\sin\theta=\frac{y}{r},\quad \cos\theta=\frac{x}{r},\quad \tan\theta=\frac{y}{x}}$$

$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ をまとめて，θ の**三角関数**という。

注　ただし，$\tan\theta$ は $\theta=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$　(n は整数)に対しては定義しない。

例　$\dfrac{7}{6}\pi$ の正弦，余弦，正接の値を求めてみよう。



図より，点Pの座標は$(-\sqrt{3},\ -1)$であるから，

$$\sin\theta=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2},\quad \cos\theta=\frac{-\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

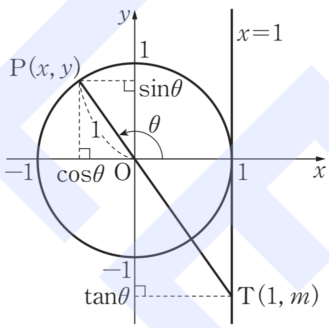
$$\tan\theta=\frac{-1}{-\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

5　θ が次の角のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(1)　$\dfrac{4}{3}\pi$　　(2)　$\dfrac{7}{4}\pi$　　(3)　4π　　(4)　$-\dfrac{7}{6}\pi$

5 三角関数と単位円

●原点Oを中心とする半径1の円を**単位円**という。
単位円と角 θ の動径OPの交点をP$(x,\ y)$，
直線OPと直線 $x=1$ の交点をT$(1,\ m)$とすると，



$$\boldsymbol{\sin\theta=y,\quad \cos\theta=x,\quad \tan\theta=m}$$

例　図の単位円で，$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めてみよう。

点Pの座標は$\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，点Tの座標は$(1,\ -\sqrt{3})$であるから，

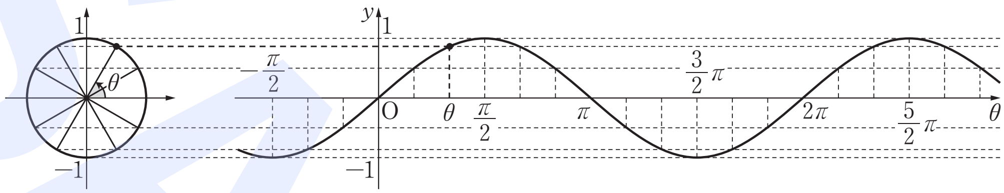
$$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\theta=-\frac{1}{2},\quad \tan\theta=-\sqrt{3}$$

6　単位円を利用して，次の値を求めよ。

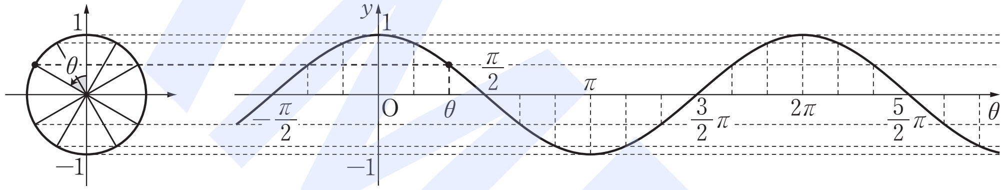
(1)　$\sin\dfrac{11}{6}\pi$　　(2)　$\cos\dfrac{5}{4}\pi$　　(3)　$\tan\left(-\dfrac{4}{3}\pi\right)$

6 三角関数のグラフ①

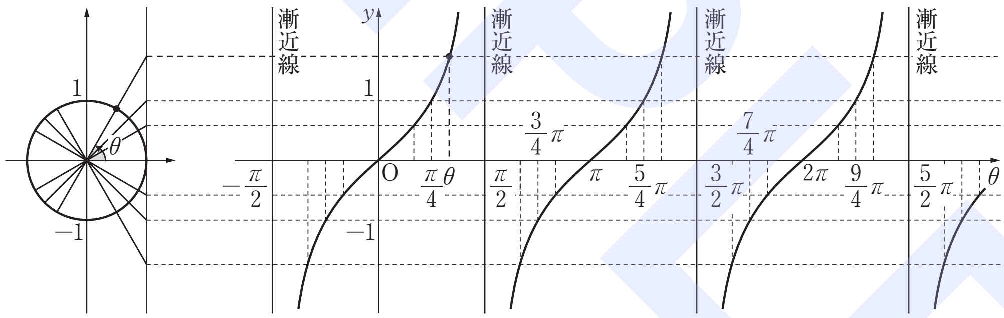
❶ **$y=\sin\theta$ のグラフ**　周期は 2π，　値域は $-1\leqq y\leqq 1$，　原点に関して対称



❷ **$y=\cos\theta$ のグラフ**　周期は 2π，　値域は $-1\leqq y\leqq 1$，　y 軸に関して対称



❸ **$y=\tan\theta$ のグラフ**　周期は π，　値域はすべての実数値，　原点に関して対称



注　$y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$ のグラフの形の曲線を**正弦曲線**(**サインカーブ**)という。

また，$y=\tan\theta$ のグラフは，直線 $\theta=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$　(n は整数)を**漸近線**にもつ。

補足　関数 $f(x)$ において，x のすべての実数値に対して，

$$f(x+p)=f(x)\quad(p \text{ は } 0 \text{ でない定数})$$

が成り立つとき，$f(x)$ は周期 p の**周期関数**であるという。

$y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$ は周期 2π，$y=\tan\theta$ は周期 π の周期関数である。

7　次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y=\sin\theta$　　(2)　$y=\cos\theta$　　(3)　$y=\tan\theta$

7 三角関数のグラフ②

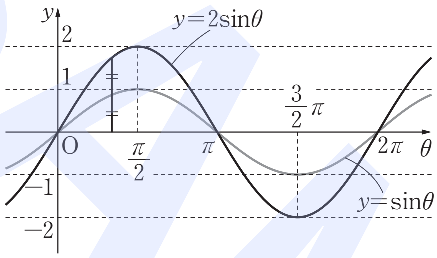
例 題　次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y=2\sin\theta$　　(2)　$y=\sin 2\theta$

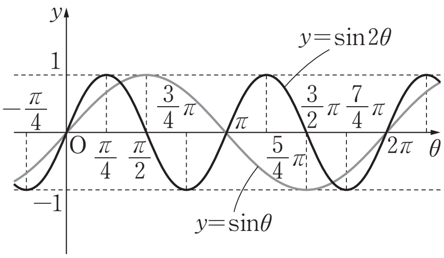
考え方　(1)　$y=\sin\theta$ のグラフを，y 軸方向に 2 倍に拡大したもの。

(2)　$y=\sin\theta$ のグラフを，θ 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したもの。

解 答　(1)　　(2)



周期は2π，値域は $-2\leqq y\leqq 2$



周期は π，値域は $-1\leqq y\leqq 1$

8　次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

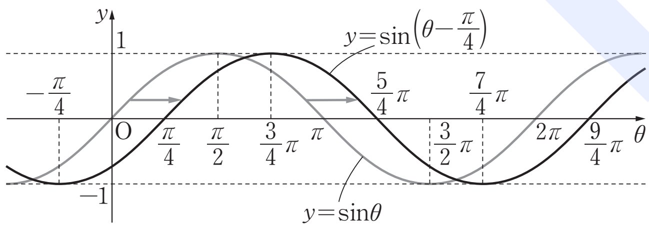
(1)　$y=\sin\dfrac{\theta}{2}$　　(2)　$y=2\cos\theta$　　(3)　$y=\tan 2\theta$

8 三角関数のグラフ③

例 題　関数 $y=\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ のグラフをかけ。

考え方　$y=\sin\theta$ のグラフを，θ 軸方向に $\frac{\pi}{4}$ だけ平行移動したもの。

解 答



周期は2π
値域は $-1\leqq y\leqq 1$

9　次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y=\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$　　(2)　$y=\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$　　(3)　$y=\sin\theta+1$

第 5 章　指数関数と対数関数

1　指数の拡張

1　指数法則①

❶　0 や負の整数を指数にもつ累乗を，次のように定義する。

$a \neq 0$ で，n が正の整数のとき，　$\boldsymbol{a^0=1}$，　$\boldsymbol{a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}}$

例　(1)　$3^0=1$　　(2)　$5^{-1}=\dfrac{1}{5}$　　(3)　$10^{-3}=\dfrac{1}{10^3}=\dfrac{1}{1000}$

❷　指数が整数の場合，次の指数法則が成り立つ。

$a \neq 0$，$b \neq 0$ で，m，n が整数のとき，

[1]　$\boldsymbol{a^m a^n=a^{m+n}}$　　[2]　$\boldsymbol{\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}}$

[3]　$\boldsymbol{(a^m)^n=a^{mn}}$　　[4]　$\boldsymbol{(ab)^n=a^n b^n}$

例　(1)　$a^4a^{-3}=a^{4+(-3)}=a$　　(2)　$(ab^3)^{-2}=a^{-2}b^{3\times(-2)}=a^{-2}b^{-6}$

1　次の計算をせよ。ただし，$a \neq 0$ とする。

(1)　2^{-1}　　(2)　5^0　　(3)　$(-3)^{-3}$　　(4)　$(0.5)^{-4}$

(5)　$a^{-3}a^5$　　(6)　$a^{-3}\div a^2$　　(7)　$(a^{-2})^5$　　(8)　$(a^{-1}b)^{-4}$

2　累乗根

❶　n を 2 以上の整数とするとき，n 乗すると a になる数，すなわち，$x^n=a$ を満たす数 x を，a の **n 乗根**という。2 乗根，3 乗根，4 乗根，……を，まとめて**累乗根**という。なお，この章では，a の n 乗根のうち実数のものだけを考える。

例　$2^3=8$ であるから，2 は 8 の 3 乗根である。

注　2 乗根を平方根，3 乗根を立方根ともいう。また，0 の n 乗根は 0 である。

❷　実数 a の n 乗根について，次のことがいえる。

[1]　n が奇数のとき　　a の n 乗根はただ 1 つ存在し，それを $\boldsymbol{\sqrt[n]{a}}$ と表す。

例　-27の 3 乗根は，$(-3)^3=-27$ であるから，$\sqrt[3]{-27}=-3$

[2]　n が偶数のとき　　$a>0$ の場合，a の n 乗根は 2 つ存在し，そのうち正のものを $\boldsymbol{\sqrt[n]{a}}$ と表す。負のものは $\boldsymbol{-\sqrt[n]{a}}$ である。$a<0$ の場合は存在しない。

例　16の 4 乗根は，$2^4=16$，$(-2)^4=16$ であるから，$\sqrt[4]{16}=2$，　$-\sqrt[4]{16}=-2$

2　次の値を求めよ。

(1)　$\sqrt[6]{1}$　　(2)　$\sqrt[3]{-125}$　　(3)　$\sqrt[4]{81}$

(4)　-343の 3 乗根(実数)　　(5)　256の 4 乗根(実数)

3 累乗根の性質

●累乗根について，次の性質が成り立つ。

$a>0$，$b>0$，m，n，p が正の整数のとき，

1　$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$　　2　$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$　　3　$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

4　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$　　5　$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$

例　(1)　$\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{3\times9}=\sqrt[3]{3^3}=3$　　(2)　$\dfrac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{\dfrac{16}{2}}=\sqrt[4]{8}$

(3)　$(\sqrt[4]{25})^2=\sqrt[4]{25^2}=\sqrt[4]{5^4}=5$　　(4)　$\sqrt{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[2\times3]{2}=\sqrt[6]{2}$

(5)　$\sqrt[8]{81}=\sqrt[8]{3^4}=\sqrt[2\times4]{3^{1\times4}}=\sqrt[2]{3^1}=\sqrt{3}$

3　次の計算をせよ。

(1)　$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{32}$　　(2)　$(\sqrt[4]{36})^2$　　(3)　$\dfrac{\sqrt[3]{162}}{\sqrt[3]{6}}$

(4)　$\sqrt[4]{\sqrt{256}}$　　(5)　$\sqrt[6]{125}$

4 指数法則②

❶　有理数を指数にもつ累乗を，次のように定義する。

$a>0$ で，m，n が正の整数，r が正の有理数のとき，

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a},\quad a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m},\quad a^{-r}=\frac{1}{a^r}$$

例　(1)　$216^{\frac{2}{3}}=(\sqrt[3]{6^3})^2=6^2=36$　　(2)　$9^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{9^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{9}}=\dfrac{1}{3}$

❷　指数が有理数の場合でも，次の指数法則が成り立つ。

$a>0$，$b>0$ で，r，s が有理数のとき，

1　$a^ra^s=a^{r+s}$　　2　$\dfrac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$

3　$(a^r)^s=a^{rs}$　　4　$(ab)^r=a^rb^r$

例　(1)　$2^{-\frac{1}{2}}\times2^{\frac{5}{6}}\div2^{\frac{1}{3}}=2^{-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}}=2^0=1$

(2)　$\left(16^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}=16^{\frac{1}{3}\times\left(-\frac{3}{4}\right)}=16^{-\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{16^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{16}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2^4}}=\dfrac{1}{2}$

4　次の計算をせよ。ただし，$a>0$，$b>0$ とする。

(1)　$32^{\frac{2}{5}}$　　(2)　$49^{-\frac{1}{2}}$　　(3)　$64^{-\frac{2}{3}}$

(4)　$5^{\frac{2}{3}}\div5^{\frac{1}{6}}\times5^{-\frac{1}{2}}$　　(5)　$\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{3}$　　(6)　$\left\{\left(\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{2}{5}}\right\}^{\frac{5}{6}}$

(7)　$\sqrt[3]{4}\div\sqrt{8}\times\sqrt[4]{32}$　　(8)　$a^2\times(a^{-1})^3\div a^{-2}$　　(9)　$(a^{-2}b)^{-\frac{1}{2}}a^{-1}b^{\frac{3}{2}}$

2 指数関数

5 指数関数のグラフ①

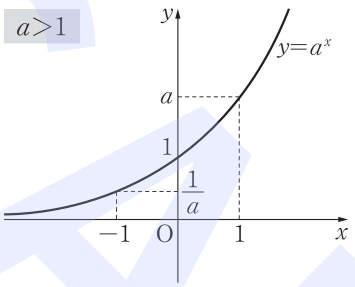
❶ $a>0$，$a \neq 1$ とするとき　x の関数 $y=a^x$ を a を**底**とする**指数関数**という。

❷ 指数関数 $y=a^x$ のグラフは次のようになる。

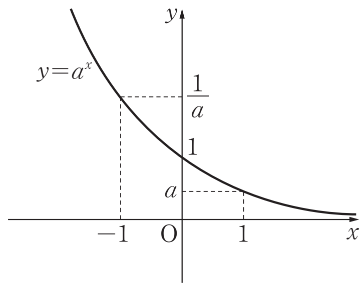
1 点$(0,\ 1)$，$(1,\ a)$を通り，x 軸を漸近線とする曲線である。

2 $a>1$ のとき右上がりの曲線で，$0<a<1$ のとき右下がりの曲線である。

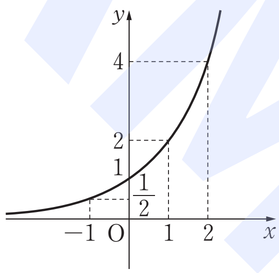
$a>1$

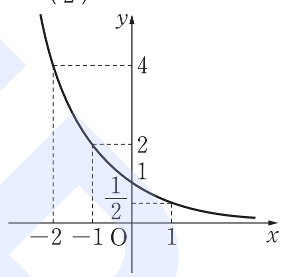


$0<a<1$



例　(1)　$y=2^x$ のグラフ　　　(2)　$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ のグラフ





1　次の関数のグラフをかけ。

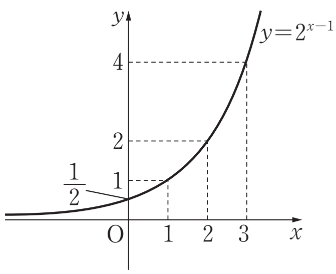
(1)　$y=3^x$　　　(2)　$y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$　　　(3)　$y=\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$

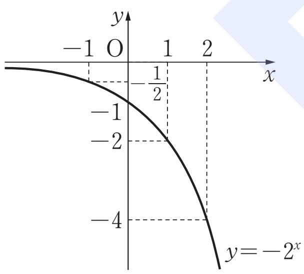
6 指数関数のグラフ②

例 題　関数 $y=2^{x-1}$　……①と関数 $y=-2^x$　……②のグラフをかけ。

考え方　①のグラフは $y=2^x$ のグラフを x 軸方向に1だけ平行移動したもの。
②のグラフは $y=2^x$ のグラフを x 軸に関して対称移動したもの。

解 答





2　次の関数のグラフをかけ。

（1）　$y=3^{x+1}$　　（2）　$y=-3^{x}$　　（3）　$y=-3^{-x}$

7 指数関数の性質

● 指数関数 $y=a^x$ は，次のような性質をもつ。

1　定義域は実数全体，値域は正の数全体である。

2　**$a>1$ のとき，** x の値が増加すると，y の値も増加する。

すなわち，**増加関数**である。したがって，　$\boldsymbol{r<s \iff a^r<a^s}$

3　**$0<a<1$ のとき，** x の値が増加すると，y の値は減少する。

すなわち，**減少関数**である。したがって，　$\boldsymbol{r<s \iff a^r>a^s}$

注　$a>0$，$a\neq1$ のとき，「$r=s \iff a^r=a^s$」が成り立つ。

例　$3\sqrt{3}$，$\sqrt[4]{27}$，1 の大小を比較してみよう。

$$3\sqrt{3}=\sqrt{3^3}=3^{\frac{3}{2}},\quad \sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{3^3}=3^{\frac{3}{4}},\quad 1=3^0$$

ここで，$y=3^x$ の底 3 は 1 より大きいから，増加関数である。

$0<\dfrac{3}{4}<\dfrac{3}{2}$ より，　$3^0<3^{\frac{3}{4}}<3^{\frac{3}{2}}$　　よって，　$1<\sqrt[4]{27}<3\sqrt{3}$

3　次の各組の数の大小を比較せよ。

（1）　2^{-4}，$2^{\frac{5}{2}}$，1　　（2）　3，$\sqrt[3]{9}$，$\sqrt[5]{81}$

（3）　$\dfrac{1}{2}$，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$　　（4）　$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{9}$，$\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

8 指数関数を含む方程式

例題　次の方程式を解け。

（1）　$3^x=81$　　（2）　$2^{2x}+2^{x+2}=12$

考え方　（1）　底を 3 にそろえて，次のことを利用する。

$a>0$，$a\neq1$ のとき，　$a^r=a^s \iff r=s$

（2）　$2^x=t$ とおくと，$2^{2x}=(2^x)^2=t^2$，$2^{x+2}=2^2\cdot2^x=4t$ となる。

解答　（1）　方程式を変形すると，　$3^x=3^4$

よって，　$\boldsymbol{x=4}$　答

（2）　方程式を変形すると，　$(2^x)^2+4\cdot2^x-12=0$

$2^x=t$ とおくと，　$t^2+4t-12=0$　　よって，　$(t+6)(t-2)=0$

$t>0$ であるから，　$t+6>0$

ゆえに，$t-2=0$ から，　$t=2$

よって，　$2^x=2$

したがって，　$\boldsymbol{x=1}$　答

4　次の方程式を解け。

(1)　$3^{x-1}=27$　　(2)　$4^{x}=128$

(3)　$4^{2x}+4^{x+1}=32$　　(4)　$9^{x}-2\cdot3^{x+1}-27=0$

9 指数関数を含む不等式

例題　次の不等式を解け。

(1)　$4^{x}>16$　　(2)　$\left(\dfrac{1}{9}\right)^{x}\leqq\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}$

考え方　(1)は底を２に，(2)は底を $\dfrac{1}{3}$ にそろえて，次のことを利用する。

$a>1$ のとき，　$a^r<a^s \iff r<s$

$0<a<1$ のとき，　$a^r<a^s \iff r>s$

解答　(1)　不等式を変形すると，　$2^{2x}>2^4$

底２は１より大きいから，　$2x>4$

よって，　$\boldsymbol{x>2}$　答

(2)　不等式を変形すると，　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x}\leqq\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}$

底 $\dfrac{1}{3}$ は１より小さいから，　$2x\geqq x+1$

よって，　$\boldsymbol{x\geqq1}$　答

5　次の不等式を解け。

(1)　$3^{x}\leqq27$　　(2)　$8^{x}-2^{x-2}<0$　　(3)　$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2x+1}\geqq\left(\dfrac{1}{125}\right)^{x}$

10 指数関数の最大・最小

例題　関数 $y=4^{x}-2^{x+2}$　$(-1\leqq x\leqq2)$ の最大値，最小値を求めよ。

考え方　与式を $2^{x}=t$ とおいて２次関数で表し，$-1\leqq x\leqq2$ のとき，t の値の範囲を調べる。

解答　$2^{x}=t$ とおくと，

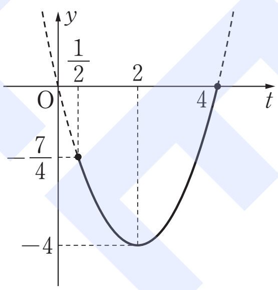
$$y=(2^{x})^2-4\cdot2^{x}=t^2-4t=(t-2)^2-4$$

$-1\leqq x\leqq2$ のとき，　$\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq4$　……①

①の範囲で，y は，

$t=4$　すなわち，$x=2$ のとき**最大値０**，

$t=2$　すなわち，$x=1$ のとき**最小値 −4**　答



6　次の関数の最大値，最小値を求めよ。

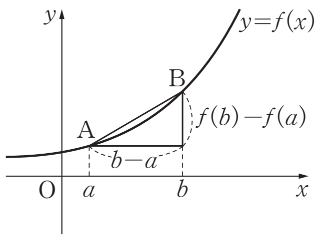
(1)　$y=3^{x-1}$　$(-1\leqq x\leqq2)$　　(2)　$y=-9^{x}+6\cdot3^{x}$　$(-1\leqq x\leqq1)$

第 6 章　微分と積分

1　微分係数と導関数

1　平均変化率

●関数 $y=f(x)$ において，x の値が a から b まで変化するとき，y の変化量 $f(b)-f(a)$ の，x の変化量 $b-a$ に対する割合 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ を，$x=a$ から $x=b$ までの $f(x)$ の**平均変化率**という。



補足　この平均変化率は，右の図で直線ABの傾きを表す。

例　2 次関数 $y=2x^2$ について，平均変化率を求めてみよう。

$x=1$ から $x=3$ までの平均変化率は，　$\dfrac{2\cdot 3^2-2\cdot 1^2}{3-1}=8$

$x=1$ から $x=1+h$ までの平均変化率は，

$$\frac{2(1+h)^2-2\cdot 1^2}{(1+h)-1}=\frac{4h+2h^2}{h}=4+2h$$

1　次の平均変化率を求めよ。

(1)　1 次関数 $y=3x$ の $x=a$ から $x=b$ までの平均変化率

(2)　2 次関数 $y=x^2$ の $x=a$ から $x=b$ までの平均変化率

(3)　2 次関数 $y=2x^2$ の $x=3$ から $x=3+h$ までの平均変化率

2　極限値

●関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，$f(x)$ がある一定の値 α に限りなく近づくことを

$$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha \quad \text{または} \quad x\longrightarrow a \text{ のとき } f(x)\longrightarrow \alpha$$

と表し，この値 α を，$x\longrightarrow a$ のときの $f(x)$ の**極限値**という。

例　(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 1}(2x+1)=3$　　　(2)　$\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+2h+h^2)=1$

2　次の極限値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 3}(x^2+x)$　　(2)　$\displaystyle\lim_{h\to 0}(3-2h)$　　(3)　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h}$

3 微分係数

●関数 $f(x)$ の，$x=a$ から $x=a+h$ までの平均変化率 $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ において，h が限りなく 0 に近づくとき，この平均変化率が限りなく一定の値に近づくならば，その極限値を，関数 $f(x)$ の $x=a$ における**微分係数**または変化率といい，$f'(a)$ で表す。

$$\boldsymbol{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}} \quad \cdots\cdots ①$$

例　関数 $f(x)=2x^2$ について，$x=1$ における微分係数 $f'(1)$ を求めてみよう。

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(1+h)^2-2\cdot 1^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4h+2h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(4+2h)=4$$

注　微分係数の定義①において，$a+h=b$ とすれば，$h \longrightarrow 0$ のとき $b \longrightarrow a$ であるから，①を $\boldsymbol{f'(a)=\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$ と表すこともできる。

3　次の微分係数を求めよ。

(1)　関数 $f(x)=x^2$ について，$x=1$ における微分係数

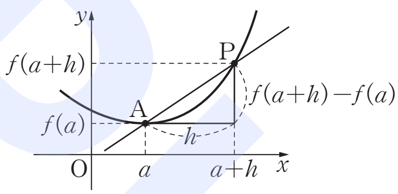
(2)　関数 $f(x)=2x^2$ について，$x=-3$ における微分係数

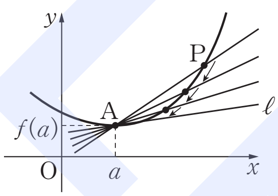
4 微分係数と接線

●関数 $y=f(x)$ のグラフ上に 2 点 A$(a,\ f(a))$，P$(a+h,\ f(a+h))$ をとると，直線APの傾きは $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ である。h が 0 に限りなく近づくとき，直線APは点Aを通る傾きが $f'(a)$ の直線 ℓ に限りなく近づく。

この直線 ℓ を，曲線 $y=f(x)$ 上の点Aにおける**接線**，Aを**接点**という。

したがって，曲線 $y=f(x)$ 上の点A$(a,\ f(a))$ における接線の傾きは，微分係数 $f'(a)$ に等しい。





例　関数 $f(x)=2x^2$ のグラフ上の点$(1,\ 2)$における接線の傾きは，**3** の 例 から，$f'(1)=4$

4　**3** を利用して，次の関数のグラフ上の与えられた点Aにおける接線の傾きを求めよ。

(1)　$f(x)=x^2$，　A$(1,\ 1)$　　　(2)　$f(x)=2x^2$，　A$(-3,\ 18)$

5 導関数

●関数 $f(x)$ において，x のとる各値 a に対して微分係数 $f'(a)$ を対応させると，１つの新しい関数 **$f'(x)$** が得られる。この $f'(x)$ を $f(x)$ の**導関数**という。

$$\boldsymbol{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

例　(1)　関数 $f(x)=x^3$ の導関数

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-x^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$$

(2)　関数 $f(x)=3$ の導関数　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{3-3}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$

注　(2)のように，C を定数とするとき，$f(x)=C$ である関数を**定数関数**という。

5　定義にしたがって，次の関数の導関数を求めよ。

(1)　$f(x)=x$　　(2)　$f(x)=x^2$　　(3)　$f(x)=5$

6 導関数の計算

例題　定義にしたがって，次の関数の導関数を求めよ。

(1)　$f(x)=-2x^2$　　(2)　$f(x)=x^3+x+2$

考え方　導関数の定義 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ により，約分をして分母に h がない形にしてから，$h\longrightarrow 0$ とする。

解答　(1)　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{-2(x+h)^2-(-2x^2)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{-2(x^2+2xh+h^2)+2x^2}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-4xh-2h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(-4x-2h)=\boldsymbol{-4x}$$　答

(2)　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{\{(x+h)^3+(x+h)+2\}-(x^3+x+2)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3+h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(3x^2+1)h+3xh^2+h^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\{(3x^2+1)+3xh+h^2\}=\boldsymbol{3x^2+1}$$　答

6　定義にしたがって，次の関数の導関数を求めよ。

(1)　$f(x)=2x+1$　　(2)　$f(x)=x^2+x+1$　　(3)　$f(x)=2x^3-x$

7 関数の微分

❶　関数 $y=f(x)$ の導関数を，y'，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d}{dx}f(x)$ などで表すことがある。また，関数 $f(x)=x^3$ の導関数を $(x^3)'$ のように表すことがある。

❷　関数 x^n と定数関数の導関数について，次の式が成り立つ。

1　関数 x^n の導関数は，　$(x^n)'=nx^{n-1}$

2　定数関数 C の導関数は，　$(C)'=0$

例　(1)　$(x^2)'=2x$　　(2)　$(x^3)'=3x^2$　　(3)　$(5)'=0$

❸　関数 $f(x)$ から導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を **x で微分する**，または単に**微分する**という。導関数については，次の公式が成り立つ。

1　$y=kf(x)$　ならば　$y'=kf'(x)$　（k は定数）

2　$y=f(x)+g(x)$　ならば　$y'=f'(x)+g'(x)$

3　$y=f(x)-g(x)$　ならば　$y'=f'(x)-g'(x)$

例　(1)　関数 $y=3x^2-5x+2$ の微分

$$y'=3(x^2)'-5(x)'+(2)'$$
$$=3\cdot 2x-5\cdot 1+0$$
$$=6x-5$$

(2)　関数 $y=2x^2(x-2)$ の微分

$y=2x^3-4x^2$ より，

$$y'=2(x^3)'-4(x^2)'$$
$$=2\cdot 3x^2-4\cdot 2x$$
$$=6x^2-8x$$

注　「定義にしたがって」という指定がないときには，公式により導関数を求めてよい。

7　次の関数を微分せよ。

(1)　$y=4x^2-x+3$　　(2)　$y=x^3-8x^2+6$

(3)　$y=3(x-1)(x+2)$　　(4)　$y=x(2x-1)^2$

8 関数の決定

例題　次の条件をすべて満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

$f'(0)=-1$，　$f'(1)=3$，　$f(2)=7$

考え方　$f(x)=ax^2+bx+c$ として，$f'(x)$ を求め，条件から a，b，c の等式をつくる。

解答　$f(x)=ax^2+bx+c$ とすると，　$f'(x)=2ax+b$

$f'(0)=-1$ より，　$b=-1$　……①　　$f'(1)=3$ より，　$2a+b=3$　……②

$f(2)=7$ より，　$4a+2b+c=7$　……③

①，②から，　$a=2$　……④　　①，③，④から，　$c=1$

よって，　$\boldsymbol{f(x)=2x^2-x+1}$　答

8　次の条件をすべて満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

$f'(0)=2$，　$f'(1)=8$，　$f(1)=4$

高校ゼミ
Standard

数学Ⅱ

解答編

第 1 章　式と証明

p.4〜5　**❶ 3次式の展開と因数分解**

1　(1)　$(x+1)(x^2-x+1)=(x+1)(x^2-x\cdot1+1^2)$

$=x^3+1^3=\boldsymbol{x^3+1}$

(2)　$(3x-2)(9x^2+6x+4)$

$=(3x-2)\{(3x)^2+(3x)\cdot2+2^2\}$

$=(3x)^3-2^3=\boldsymbol{27x^3-8}$

(3)　$(4x-3y)(16x^2+12xy+9y^2)$

$=(4x-3y)\{(4x)^2+4x\cdot3y+(3y)^2\}$

$=(4x)^3-(3y)^3=\boldsymbol{64x^3-27y^3}$

2　(1)　$(x+3)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot3+3\cdot x\cdot3^2+3^3$

$=\boldsymbol{x^3+9x^2+27x+27}$

(2)　$(2x-4)^3=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot4+3\cdot2x\cdot4^2-4^3$

$=\boldsymbol{8x^3-48x^2+96x-64}$

〔別解〕　$(2x-4)^3=\{2(x-2)\}^3=2^3(x-2)^3$

$=8(x^3-6x^2+12x-8)$

$=\boldsymbol{8x^3-48x^2+96x-64}$

(3)　$(3x+y)^3=(3x)^3+3\cdot(3x)^2\cdot y+3\cdot3x\cdot y^2+y^3$

$=\boldsymbol{27x^3+27x^2y+9xy^2+y^3}$

(4)　$(3x-2y)^3$

$=(3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot2y+3\cdot3x\cdot(2y)^2-(2y)^3$

$=\boldsymbol{27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3}$

(5)　$(2x+5y)^3$

$=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot5y+3\cdot2x\cdot(5y)^2+(5y)^3$

$=\boldsymbol{8x^3+60x^2y+150xy^2+125y^3}$

(6)　$(2xy-1)^3$

$=(2xy)^3-3\cdot(2xy)^2\cdot1+3\cdot2xy\cdot1^2-1^3$

$=\boldsymbol{8x^3y^3-12x^2y^2+6xy-1}$

3　(1)　$x^3+1=x^3+1^3=(x+1)(x^2-x\cdot1+1^2)$

$=\boldsymbol{(x+1)(x^2-x+1)}$

(2)　$x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-x\cdot2+2^2)$

$=\boldsymbol{(x+2)(x^2-2x+4)}$

(3)　$x^3-27y^3=x^3-(3y)^3$

$=(x-3y)\{x^2+x\cdot3y+(3y)^2\}$

$=\boldsymbol{(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)}$

(4)　$8x^3+27=(2x)^3+3^3$

$=(2x+3)\{(2x)^2-2x\cdot3+3^2\}$

$=\boldsymbol{(2x+3)(4x^2-6x+9)}$

(5)　$27a^3-125=(3a)^3-5^3$

$=(3a-5)\{(3a)^2+3a\cdot5+5^2\}$

$=\boldsymbol{(3a-5)(9a^2+15a+25)}$

(6)　$64a^3-\frac{1}{8}b^3=(4a)^3-\left(\frac{1}{2}b\right)^3$

$=\left(4a-\frac{1}{2}b\right)\left\{(4a)^2+4a\cdot\frac{1}{2}b+\left(\frac{1}{2}b\right)^2\right\}$

$=\boldsymbol{\left(4a-\frac{1}{2}b\right)\left(16a^2+2ab+\frac{1}{4}b^2\right)}$

4　(1)　$x^6+y^6=(x^2)^3+(y^2)^3$

$=(x^2+y^2)\{(x^2)^2-x^2y^2+(y^2)^2\}$

$=\boldsymbol{(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)}$

(2)　$x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2$

$=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$=\boldsymbol{(x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)}$

(3)　$64a^6-b^6=(8a^3)^2-(b^3)^2$

$=(8a^3+b^3)(8a^3-b^3)$

$=\{(2a)^3+b^3\}\{(2a)^3-b^3\}$

$=(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$

$\times(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$

$=\boldsymbol{(2a+b)(2a-b)}$

$\boldsymbol{\times(4a^2+2ab+b^2)(4a^2-2ab+b^2)}$

(4)　$(a+b)^3-1$

$=\{(a+b)-1\}\{(a+b)^2+(a+b)\cdot1+1\}$

$=\boldsymbol{(a+b-1)(a^2+2ab+b^2+a+b+1)}$

(5)　x^6-9x^3+8

$=(x^3)^2-9x^3+8$

$=(x^3-1)(x^3-8)$

$=(x-1)(x^2+x+1)(x-2)(x^2+2x+4)$

$=\boldsymbol{(x-1)(x-2)(x^2+x+1)(x^2+2x+4)}$

(6)　$8a^6+7a^3-1$

$=8(a^3)^2+7a^3-1$

$=(a^3+1)(8a^3-1)$

$=(a+1)(a^2-a+1)(2a-1)(4a^2+2a+1)$

$=\boldsymbol{(a+1)(2a-1)(a^2-a+1)(4a^2+2a+1)}$

p.6〜7　**❷ 整式の除法**

1　(1)

$$\begin{array}{r}
x+6 \\
x-2\,\big)\,\overline{x^2+4x-3} \\
\underline{x^2-2x} \\
6x-3 \\
\underline{6x-12} \\
9
\end{array}$$

商　$\boldsymbol{x+6}$，余り　9

(2)

$$\begin{array}{r}
2a^2+2a-3 \\
2a+3\,\big)\,\overline{4a^3+10a^2-9} \\
\underline{4a^3+6a^2} \\
4a^2 \\
\underline{4a^2+6a} \\
-6a-9 \\
\underline{-6a-9} \\
0
\end{array}$$

商　$\boldsymbol{2a^2+2a-3}$，余り　0

(3)
$$
\begin{array}{rr}
 & 3x-6 \\ \cline{2-2}
x^2+2x-2 \big) & 3x^3 \qquad -9x+8 \\
 & 3x^3+6x^2-6x \\ \cline{2-2}
 & -6x^2-3x+8 \\
 & -6x^2-12x+12 \\ \cline{2-2}
 & 9x-4
\end{array}
$$

商　$3x-6$，余り　$9x-4$

(4)
$$
\begin{array}{rr}
 & x^2+x+5 \\ \cline{2-2}
x^2-x-1 \big) & x^4 \qquad +3x^2-5x+7 \\
 & x^4-x^3-x^2 \qquad\qquad \\ \cline{2-2}
 & x^3+4x^2-5x \quad \\
 & x^3-x^2-x \quad \\ \cline{2-2}
 & 5x^2-4x+7 \\
 & 5x^2-5x-5 \\ \cline{2-2}
 & x+12
\end{array}
$$

商　x^2+x+5，余り　$x+12$

2 (1)
$$
\begin{array}{rr}
 & a^2-2ab+b^2 \\ \cline{2-2}
a+b \big) & a^3-a^2b-ab^2+b^3 \\
 & a^3+a^2b \qquad\qquad \\ \cline{2-2}
 & -2a^2b-ab^2 \quad \\
 & -2a^2b-2ab^2 \quad \\ \cline{2-2}
 & ab^2+b^3 \\
 & ab^2+b^3 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

商　$a^2-2ab+b^2$，余り　0

(2)
$$
\begin{array}{rr}
 & 4x^2+6xy-3y^2 \\ \cline{2-2}
2x-3y \big) & 8x^3 \qquad -24xy^2+5y^3 \\
 & 8x^3-12x^2y \qquad\qquad \\ \cline{2-2}
 & 12x^2y-24xy^2 \qquad \\
 & 12x^2y-18xy^2 \qquad \\ \cline{2-2}
 & -6xy^2+5y^3 \\
 & -6xy^2+9y^3 \\ \cline{2-2}
 & -4y^3
\end{array}
$$

商　$4x^2+6xy-3y^2$，余り　$-4y^3$

3 (1)
$$
\begin{array}{rr}
 & x^2+3x+6 \\ \cline{2-2}
x-3 \big) & x^3 \qquad -3x-8 \\
 & x^3-3x^2 \qquad\qquad \\ \cline{2-2}
 & 3x^2-3x \quad \\
 & 3x^2-9x \quad \\ \cline{2-2}
 & 6x-8 \\
 & 6x-18 \\ \cline{2-2}
 & 10
\end{array}
$$

商　x^2+3x+6，余り　10

$x^3-3x-8=(x-3)(x^2+3x+6)+10$

(2)
$$
\begin{array}{rr}
 & 2x-9 \\ \cline{2-2}
x^2+2x-3 \big) & 2x^3-5x^2 \qquad +6 \\
 & 2x^3+4x^2-6x \\ \cline{2-2}
 & -9x^2+6x+6 \\
 & -9x^2-18x+27 \\ \cline{2-2}
 & 24x-21
\end{array}
$$

商　$2x-9$，余り　$24x-21$

$2x^3-5x^2+6=(x^2+2x-3)(2x-9)+24x-21$

4 (1) $A=(x^2+x-2)(3x-1)+(2x-5)$

$=3x^3+2x^2-7x+2+(2x-5)$

$=3x^3+2x^2-5x-3$

(2) $3x^3-5x^2-8x+2=B(3x+4)+x-2$

$B\cdot(3x+4)=3x^3-5x^2-9x+4$

$B=(3x^3-5x^2-9x+4)\div(3x+4)$

$$
\begin{array}{rr}
 & x^2-3x+1 \\ \cline{2-2}
3x+4 \big) & 3x^3-5x^2-9x+4 \\
 & 3x^3+4x^2 \qquad\qquad \\ \cline{2-2}
 & -9x^2-9x \quad \\
 & -9x^2-12x \quad \\ \cline{2-2}
 & 3x+4 \\
 & 3x+4 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

よって，**$B=x^2-3x+1$**

p.8〜10　**3 分数式の計算**

1 (1) $\dfrac{6a^2b^2c}{4ab^3c^4}=\dfrac{2ab^2c\cdot 3a}{2ab^2c\cdot 2bc^3}=\boldsymbol{\dfrac{3a}{2bc^3}}$

(2) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-5x+6}=\dfrac{(x-3)^2}{(x-2)(x-3)}=\boldsymbol{\dfrac{x-3}{x-2}}$

(3) $\dfrac{4x^2-2x}{2x^2+x-1}=\dfrac{2x(2x-1)}{(x+1)(2x-1)}=\boldsymbol{\dfrac{2x}{x+1}}$

(4) $\dfrac{x^3-y^3}{x^3+x^2y+xy^2}=\dfrac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x(x^2+xy+y^2)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{x-y}{x}}$

2 (1) $\dfrac{x+1}{x^2-4}\times\dfrac{x-2}{x^2+x}$

$=\dfrac{x+1}{(x+2)(x-2)}\times\dfrac{x-2}{x(x+1)}=\boldsymbol{\dfrac{1}{x(x+2)}}$

(2) $\dfrac{x^2-x-20}{x^3-2x^2+x}\times\dfrac{x^2-x}{x-5}$

$=\dfrac{(x+4)(x-5)}{x(x-1)^2}\times\dfrac{x(x-1)}{x-5}=\boldsymbol{\dfrac{x+4}{x-1}}$

(3) $\dfrac{9a^2-1}{a^2-9}\div\dfrac{3a+1}{a-3}$

$=\dfrac{(3a+1)(3a-1)}{(a+3)(a-3)}\times\dfrac{a-3}{3a+1}=\boldsymbol{\dfrac{3a-1}{a+3}}$

(4) $\dfrac{x^2-2x-8}{x^2+4x+4}\div\dfrac{x^2-4x}{x^2+x-2}$

$=\dfrac{(x+2)(x-4)}{(x+2)^2}\times\dfrac{(x+2)(x-1)}{x(x-4)}=\boldsymbol{\dfrac{x-1}{x}}$

3 (1) 分母は $(x-1)(x-2)(x+3)$ となるから，

$\dfrac{x}{(x-1)(x-2)}=\boldsymbol{\dfrac{x(x+3)}{(x-1)(x-2)(x+3)}}$

$\dfrac{x-4}{(x-1)(x+3)}=\boldsymbol{\dfrac{(x-4)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x+3)}}$

(2) $x^2-25=(x+5)(x-5)$，$x^2+5x=x(x+5)$

だから，分母は $x(x+5)(x-5)$ となる。

$\dfrac{x-1}{x^2-25}=\dfrac{x-1}{(x+5)(x-5)}=\boldsymbol{\dfrac{x(x-1)}{x(x+5)(x-5)}}$

$\dfrac{3}{x^2+5x}=\dfrac{3}{x(x+5)}=\boldsymbol{\dfrac{3(x-5)}{x(x+5)(x-5)}}$

4 (1) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{x+x+2}{x+1}=\dfrac{2(x+1)}{x+1}=\boldsymbol{2}$

(2) $\dfrac{1}{(x-1)(x-5)}-\dfrac{1}{(x+3)(x-5)}$

$=\dfrac{x+3}{(x-1)(x-5)(x+3)}$

$-\dfrac{x-1}{(x-1)(x-5)(x+3)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{4}{(x-1)(x-5)(x+3)}}$

(3) $\dfrac{2}{x^2-9}-\dfrac{1}{x^2+3x}$

$=\dfrac{2}{(x+3)(x-3)}-\dfrac{1}{x(x+3)}$

$=\dfrac{2x}{x(x+3)(x-3)}-\dfrac{x-3}{x(x+3)(x-3)}$

$=\dfrac{x+3}{x(x+3)(x-3)}=\boldsymbol{\dfrac{1}{x(x-3)}}$

(4) $\dfrac{a+8}{a^2+a-2}+\dfrac{a-4}{a^2-a}$

$=\dfrac{a+8}{(a+2)(a-1)}+\dfrac{a-4}{a(a-1)}$

$=\dfrac{a(a+8)}{a(a+2)(a-1)}+\dfrac{(a-4)(a+2)}{a(a+2)(a-1)}$

$=\dfrac{2a^2+6a-8}{a(a+2)(a-1)}=\dfrac{2(a+4)(a-1)}{a(a+2)(a-1)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{2(a+4)}{a(a+2)}}$

(5) $\dfrac{x-7y}{x^2+xy-6y^2}+\dfrac{x+11y}{x^2+2xy-3y^2}$

$=\dfrac{x-7y}{(x+3y)(x-2y)}+\dfrac{x+11y}{(x+3y)(x-y)}$

$=\dfrac{(x-7y)(x-y)}{(x+3y)(x-2y)(x-y)}$

$+\dfrac{(x+11y)(x-2y)}{(x+3y)(x-y)(x-2y)}$

$=\dfrac{2x^2+xy-15y^2}{(x+3y)(x-2y)(x-y)}$

$=\dfrac{(2x-5y)(x+3y)}{(x+3y)(x-2y)(x-y)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{2x-5y}{(x-2y)(x-y)}}$

(6) $\dfrac{2}{(x-1)(x^2+1)}-\dfrac{x+3}{x^4-1}$

$=\dfrac{2}{(x-1)(x^2+1)}-\dfrac{x+3}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$

$=\dfrac{2(x+1)}{(x-1)(x^2+1)(x+1)}$

$-\dfrac{x+3}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$

$=\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)}}$

5 (1) $\dfrac{1+\dfrac{1}{x+3}}{1-\dfrac{1}{x+3}}=\dfrac{\dfrac{(x+3)+1}{x+3}}{\dfrac{(x+3)-1}{x+3}}=\boldsymbol{\dfrac{x+4}{x+2}}$

(2) $\dfrac{x+2}{x-\dfrac{4}{x}}=\dfrac{x+2}{\dfrac{x^2-4}{x}}=(x+2)\div\dfrac{x^2-4}{x}$

$=(x+2)\times\dfrac{x}{(x+2)(x-2)}=\boldsymbol{\dfrac{x}{x-2}}$

(3) $\dfrac{x+2+\dfrac{2}{x-1}}{x-2-\dfrac{2}{x-1}}=\dfrac{\dfrac{(x+2)(x-1)+2}{x-1}}{\dfrac{(x-2)(x-1)-2}{x-1}}$

$=\dfrac{x^2+x}{x^2-3x}=\dfrac{x(x+1)}{x(x-3)}=\boldsymbol{\dfrac{x+1}{x-3}}$

p.11〜12 ❹ 二項定理

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1 ……(1)

1 5 10 10 5 1 ……(2)

1 6 15 20 15 6 1 ……(3)

(1) $(a+b)^4=\boldsymbol{a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4}$

(2) $(a-b)^5$

$=a^5+5a^4\cdot(-b)+10a^3\cdot(-b)^2+10a^2\cdot(-b)^3$

$+5a\cdot(-b)^4+(-b)^5$
$=\boldsymbol{a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5}$

(3) $(x+1)^6$
$=\boldsymbol{x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1}$

2 (1) $(x+3)^4$
$={}_4C_0x^4+{}_4C_1x^3\cdot3+{}_4C_2x^2\cdot3^2+{}_4C_3x\cdot3^3+{}_4C_4\cdot3^4$
$=\boldsymbol{x^4+12x^3+54x^2+108x+81}$

(2) $(2x+3y)^5$
$={}_5C_0(2x)^5+{}_5C_1(2x)^4(3y)+{}_5C_2(2x)^3(3y)^2$
$\quad+{}_5C_3(2x)^2(3y)^3+{}_5C_4(2x)(3y)^4+{}_5C_5(3y)^5$
$=\boldsymbol{32x^5+240x^4y+720x^3y^2+1080x^2y^3}$
$\quad\boldsymbol{+810xy^4+243y^5}$

(3) $(2a-b)^6$
$={}_6C_0(2a)^6+{}_6C_1(2a)^5(-b)+{}_6C_2(2a)^4(-b)^2$
$\quad+{}_6C_3(2a)^3(-b)^3+{}_6C_4(2a)^2(-b)^4$
$\quad+{}_6C_5(2a)(-b)^5+{}_6C_6(-b)^6$
$=\boldsymbol{64a^6-192a^5b+240a^4b^2-160a^3b^3}$
$\quad\boldsymbol{+60a^2b^4-12ab^5+b^6}$

3 (1) 展開式の一般項は，
${}_5C_rx^{5-r}\cdot(-3)^r=(-3)^r{}_5C_rx^{5-r}$
求める係数は $r=2$ のときだから，
$(-3)^2{}_5C_2=9\cdot10=\boldsymbol{90}$

(2) 展開式の一般項は，
${}_6C_r(2x)^{6-r}y^r=2^{6-r}{}_6C_rx^{6-r}y^r$
求める係数は $r=2$ のときだから，
$2^4{}_6C_2=16\cdot15=\boldsymbol{240}$

(3) 展開式の一般項は，
${}_{10}C_rx^{10-r}(-2)^r=(-2)^r{}_{10}C_rx^{10-r}$
求める係数は $r=3$ のときだから，
$(-2)^3{}_{10}C_3=-8\cdot120=\boldsymbol{-960}$

(4) 展開式の一般項は，
${}_6C_r(x^2)^{6-r}(-1)^r=(-1)^r{}_6C_rx^{12-2r}$
$12-2r=4$ より，$r=4$
求める係数は，$(-1)^4{}_6C_4=\boldsymbol{15}$

4 (1) 二項定理により，
$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n$
この等式で $x=-1$ を代入すると，
$0={}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots\cdots+(-1)^n{}_nC_n$

(2) (1)の $(1+x)^n$ の展開式で $x=2$ を代入すると，
$3^n={}_nC_0+2{}_nC_1+2^2{}_nC_2+\cdots\cdots+2^r{}_nC_r+\cdots\cdots$
$\qquad+2^n{}_nC_n$

(3) (1)の $(1+x)^n$ の展開式で $x=-\dfrac{1}{2}$ を代入すると，
$$\left(\frac{1}{2}\right)^n={}_nC_0-\frac{{}_nC_1}{2}+\frac{{}_nC_2}{2^2}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{{}_nC_n}{2^n}$$

5 (1) $\{(a+b)+c\}^6$の展開式で，c^2 を含む項は，
${}_6C_2(a+b)^4c^2$
$(a+b)^4$ の展開式で a^3b の係数は ${}_4C_1$ だから，
a^3bc^2 の係数は，${}_6C_2\times{}_4C_1=15\cdot4=\boldsymbol{60}$

〔別解〕 $(a+b+c)^n$ の一般項 $\dfrac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$
について，$n=6$，$p=3$，$q=1$，$r=2$ を代入
して，係数は，$\dfrac{6!}{3!1!2!}=\boldsymbol{60}$

(2) $\{(a+b)+c\}^6$ の展開式で，c^4 を含む項は，
${}_6C_4(a+b)^2c^4$
$(a+b)^2$ の展開式で ab の係数は 2 だから，
abc^4 の係数は，${}_6C_4\cdot2=15\cdot2=\boldsymbol{30}$

〔別解〕 $\dfrac{6!}{1!1!4!}=\boldsymbol{30}$

6 (1) $\{(3x-y)+2z\}^5$ の展開式で，z^2 を含む項
は，${}_5C_2(3x-y)^3(2z)^2$
$(3x-y)^3$ の展開式で，x^2y を含む項の係数は，
${}_3C_13^2\cdot(-1)$ だから，x^2yz^2 の係数は，
${}_5C_22^2\cdot{}_3C_13^2\cdot(-1)=10\cdot4\cdot3\cdot9\cdot(-1)=\boldsymbol{-1080}$

〔別解〕 $\dfrac{5!}{2!1!2!}\cdot(3x)^2\cdot(-y)\cdot(2z)^2$ より，
x^2yz^2 の係数は，$\dfrac{5!}{2!1!2!}\cdot3^2\cdot(-1)\cdot2^2=\boldsymbol{-1080}$

(2) $\{(x+2y)-z\}^7$ の展開式で，z を含む項は，
${}_7C_1(x+2y)^6(-z)$
$(x+2y)^6$ の展開式で，x^4y^2を含む項の係数は，
${}_6C_22^2$ だから，x^4y^2z の係数は，
${}_7C_1(-1)\cdot{}_6C_22^2=-7\cdot15\cdot4=\boldsymbol{-420}$

〔別解〕 $\dfrac{7!}{4!2!1!}\cdot x^4\cdot(2y)^2\cdot(-z)$ より，x^4y^2z の
係数は，$\dfrac{7!}{4!2!1!}\cdot2^2\cdot(-1)=\boldsymbol{-420}$

p.13 **問題 A**

1 (1) $(x+3)(x^2-3x+9)=x^3+3^3=\boldsymbol{x^3+27}$
(2) $(2a-1)(4a^2+2a+1)$
$=(2a-1)\{(2a)^2+2a\cdot1+1\}$
$=(2a)^3-1^3=\boldsymbol{8a^3-1}$
(3) $(x+2)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot2+3\cdot x\cdot2^2+2^3$
$=\boldsymbol{x^3+6x^2+12x+8}$
(4) $(2x-3)^3=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot3+3\cdot2x\cdot3^2-3^3$
$=\boldsymbol{8x^3-36x^2+54x-27}$

2 (1) $x^3+27=\boldsymbol{(x+3)(x^2-3x+9)}$
(2) $a^3-64=\boldsymbol{(a-4)(a^2+4a+16)}$
(3) $8x^3+1=\boldsymbol{(2x+1)(4x^2-2x+1)}$
(4) $x^3-64y^3=\boldsymbol{(x-4y)(x^2+4xy+16y^2)}$
(5) $8a^3+b^3=\boldsymbol{(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)}$
(6) $27x^3-8y^3=\boldsymbol{(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)}$

3 (1)

$$\begin{array}{r} x-1 \\ x+5\,\overline{)\,x^2+4x-7} \\ \underline{x^2+5x} \\ -x-7 \\ \underline{-x-5} \\ -2 \end{array}$$

商　$\boldsymbol{x-1}$，余り　$\boldsymbol{-2}$

(2)

$$\begin{array}{r} x-2 \\ 2x^2+4x-5\,\overline{)\,2x^3\qquad\quad -13x+10} \\ \underline{2x^3+4x^2-\ 5x\quad} \\ -4x^2-\ 8x+10 \\ \underline{-4x^2-\ 8x+10} \\ 0 \end{array}$$

商　$\boldsymbol{x-2}$，余り　$\boldsymbol{0}$

4 (1)

$$\begin{array}{r} 3x^2+6x+8 \\ x-2\,\overline{)\,3x^3\qquad\ -\ 4x-18} \\ \underline{3x^3-6x^2\qquad\qquad} \\ 6x^2-\ 4x\quad \\ \underline{6x^2-12x\quad} \\ 8x-18 \\ \underline{8x-16} \\ -\ 2 \end{array}$$

商　$\boldsymbol{3x^2+6x+8}$，余り　$\boldsymbol{-2}$

$\boldsymbol{3x^3-4x-18=(x-2)(3x^2+6x+8)-2}$

(2)

$$\begin{array}{r} 3x+1 \\ x^2-x+3\,\overline{)\,3x^3-2x^2\qquad +3} \\ \underline{3x^3-3x^2+9x\quad} \\ x^2-9x+3 \\ \underline{x^2-\ x+3} \\ -8x \end{array}$$

商　$\boldsymbol{3x+1}$，余り　$\boldsymbol{-8x}$

$\boldsymbol{3x^3-2x^2+3=(x^2-x+3)(3x+1)-8x}$

5 (1) $\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-3x-4}\times\dfrac{x^2+x}{x^2-x-2}$

$=\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x+1)(x-4)}\times\dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x-2)}=\boldsymbol{\dfrac{x}{x+1}}$

(2) $\dfrac{x-6}{x^3-2x^2+x}\div\dfrac{x^2-4x-12}{x^3-x^2}$

$=\dfrac{x-6}{x(x-1)^2}\times\dfrac{x^2(x-1)}{(x+2)(x-6)}=\boldsymbol{\dfrac{x}{(x-1)(x+2)}}$

(3) $\dfrac{2a}{a^2-1}+\dfrac{2}{1-a^2}=\dfrac{2a}{a^2-1}-\dfrac{2}{a^2-1}$

$=\dfrac{2a-2}{a^2-1}=\dfrac{2(a-1)}{(a+1)(a-1)}=\boldsymbol{\dfrac{2}{a+1}}$

(4) $\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{3}{(x-1)(x+2)}$

$=\dfrac{2(x+2)}{(x+1)(x-1)(x+2)}$

$-\dfrac{3(x+1)}{(x+1)(x-1)(x+2)}$

$=\dfrac{-x+1}{(x+1)(x-1)(x+2)}$

$=\dfrac{-(x-1)}{(x+1)(x-1)(x+2)}$

$=\boldsymbol{-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}}$

6 (1) $(2x+1)^4=\boldsymbol{16x^4+32x^3+24x^2+8x+1}$

(2) $(a-2)^5=\boldsymbol{a^5-10a^4+40a^3-80a^2+80a-32}$

(3) $(3x-2)^5$

$=(3x)^5+5(3x)^4\cdot(-2)+10(3x)^3\cdot(-2)^2$
$\quad+10(3x)^2\cdot(-2)^3+5(3x)\cdot(-2)^4+(-2)^5$

$=\boldsymbol{243x^5-810x^4+1080x^3-720x^2+240x-32}$

(4) $(a-b)^6$

$=\boldsymbol{a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4}$
$\quad\boldsymbol{-6ab^5+b^6}$

7 (1) 展開式の一般項は ${}_6\mathrm{C}_r a^{6-r}$

求める係数は $r=3$ のときだから，${}_6\mathrm{C}_3=\boldsymbol{20}$

(2) 展開式の一般項は，

${}_5\mathrm{C}_r(3a)^{5-r}\cdot(-b)^r=3^{5-r}\cdot(-1)^r{}_5\mathrm{C}_r a^{5-r}b^r$

求める係数は $r=3$ のときだから，

$3^2\cdot(-1)^3{}_5\mathrm{C}_3=9\cdot(-1)\cdot10=\boldsymbol{-90}$

(3) 展開式の一般項は，

${}_6\mathrm{C}_r(2x)^{6-r}\cdot(-3y)^r=2^{6-r}\cdot(-3)^r{}_6\mathrm{C}_r x^{6-r}y^r$

求める係数は $r=2$ のときだから，

$2^4\cdot(-3)^2{}_6\mathrm{C}_2=16\cdot9\cdot15=\boldsymbol{2160}$

(4) 展開式の一般項は，

${}_7\mathrm{C}_r a^{7-r}\cdot(3b)^r=3^r{}_7\mathrm{C}_r a^{7-r}b^r$

求める係数は $r=2$ のときだから，

$3^2{}_7\mathrm{C}_2=9\cdot21=\boldsymbol{189}$

p.14　問題 B

1 (1) $(x-1)(x^3+1)(x^2+x+1)$

$=(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)$

$=(x^3-1)(x^3+1)=(x^3)^2-1=\boldsymbol{x^6-1}$

(2) $(2x-y)^3(2x+y)^3$

$=\{(2x-y)(2x+y)\}^3$

$=(4x^2-y^2)^3$

$=(4x^2)^3-3(4x^2)^2\cdot y^2+3\cdot4x^2\cdot(y^2)^2-(y^2)^3$

$=\boldsymbol{64x^6-48x^4y^2+12x^2y^4-y^6}$

2 (1) $a^3b^3+1=(ab+1)\{(ab)^2-ab+1\}$

$=\boldsymbol{(ab+1)(a^2b^2-ab+1)}$

(2) $x^6-64y^6=(x^3)^2-(8y^3)^2$

$=(x^3+8y^3)(x^3-8y^3)$

$=(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$
$\quad\times(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

$=\boldsymbol{(x+2y)(x-2y)}$

$\qquad \boldsymbol{\times(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)}$

(3) $(x+y)^3-z^3$

$=\{(x+y)-z\}\{(x+y)^2+(x+y)\cdot z+z^2\}$

$=(x+y-z)(x^2+2xy+y^2+yz+zx+z^2)$

$=\boldsymbol{(x+y-z)(x^2+y^2+z^2+2xy+yz+zx)}$

(4) x^6+9x^3+8

$=(x^3)^2+9x^3+8=(x^3+1)(x^3+8)$

$=(x+1)(x^2-x+1)(x+2)(x^2-2x+4)$

$=\boldsymbol{(x+1)(x+2)(x^2-x+1)(x^2-2x+4)}$

3 (1) x についての降べきの順に整理する。

$$\begin{array}{r l}
 & \quad x+(y+4) \\ \cline{2-2}
x+(y-6)\,\big) & x^2+(2y-2)x+3y^2-2y-27 \\
 & x^2+(y-6)x \\ \cline{2-2}
 & \qquad (y+4)x+3y^2-2y-27 \\
 & \qquad (y+4)x+y^2-2y-24 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad 2y^2-3
\end{array}$$

商　$\boldsymbol{x+y+4}$，余り　$\boldsymbol{2y^2-3}$

y について降べきの順に整理する。

$$\begin{array}{r l}
 & \quad 3y+(-x+16) \\ \cline{2-2}
y+(x-6)\,\big) & 3y^2+(2x-2)y+x^2-2x-27 \\
 & 3y^2+(3x-18)y \\ \cline{2-2}
 & \qquad (-x+16)y+x^2-2x-27 \\
 & \qquad (-x+16)y-x^2+22x-96 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad 2x^2-24x+69
\end{array}$$

商　$\boldsymbol{3y-x+16}$，余り　$\boldsymbol{2x^2-24x+69}$

(2) $\boldsymbol{A}=(3x^2-2x+1)(2x+3)+(4x-1)$

$=6x^3+5x^2-4x+3+(4x-1)$

$=\boldsymbol{6x^3+5x^2+2}$

4 (1) $\dfrac{a^3-b^3}{a^2+2ab+b^2}\div\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^2-b^2}\div\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^3+b^3}$

$=\dfrac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a+b)^2}\times\dfrac{(a+b)(a-b)}{a^2-ab+b^2}$

$\times\dfrac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2+ab+b^2}=\boldsymbol{(a-b)^2}$

(2) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{(x-2)(x-4)}$

$=\dfrac{(x-3)-(x-2)}{(x-2)(x-3)}+\dfrac{1}{(x-2)(x-4)}$

$=\dfrac{-1}{(x-2)(x-3)}+\dfrac{1}{(x-2)(x-4)}$

$=\dfrac{-(x-4)+(x-3)}{(x-2)(x-3)(x-4)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{(x-2)(x-3)(x-4)}}$

(3) $\dfrac{x+5}{x^2-x}-\dfrac{x-3}{2x^2+x}-\dfrac{x+15}{2x^2-x-1}$

$=\dfrac{x+5}{x(x-1)}-\dfrac{x-3}{x(2x+1)}-\dfrac{x+15}{(x-1)(2x+1)}$

$=\dfrac{(x+5)(2x+1)}{x(x-1)(2x+1)}-\dfrac{(x-3)(x-1)}{x(x-1)(2x+1)}$

$-\dfrac{x(x+15)}{x(x-1)(2x+1)}=\boldsymbol{\dfrac{2}{x(x-1)(2x+1)}}$

(4) $\dfrac{1+\dfrac{2}{x}}{x-\dfrac{2}{x+1}}=\dfrac{\dfrac{x+2}{x}}{\dfrac{x(x+1)-2}{x+1}}$

$=\dfrac{x+2}{x}\div\dfrac{x^2+x-2}{x+1}$

$=\dfrac{x+2}{x}\times\dfrac{x+1}{(x+2)(x-1)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{x+1}{x(x-1)}}$

(5) $2-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=2-\dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x}}=2-\dfrac{x}{x+1}$

$=\dfrac{2(x+1)-x}{x+1}=\boldsymbol{\dfrac{x+2}{x+1}}$

5 (1) 展開式の一般項は，

${}_5C_r(3x^2)^{5-r}=3^{5-r}{}_5C_rx^{10-2r}$

$10-2r=6$ より，$r=2$

求める係数は，$3^3{}_5C_2=27\cdot10=\boldsymbol{270}$

(2) 展開式の一般項は，

${}_8C_r(2x^2)^{8-r}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^r=2^{8-r}\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^r{}_8C_rx^{16-2r}$

$16-2r=6$ より，$r=5$

求める係数は，$2^3\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^5\cdot{}_8C_5=\boldsymbol{-\dfrac{448}{243}}$

(3) $\{(3x-y)-4z\}^6$ の展開式で，z を含む項は，

${}_6C_1(3x-y)^5(-4z)$

$(3x-y)^5$ の展開式で，xy^4 を含む項の係数は，

${}_5C_4 3\cdot(-1)^4$ だから，xy^4z の係数は，

${}_6C_1(-4)\cdot{}_5C_4 3\cdot(-1)^4=6\cdot(-4)\cdot5\cdot3\cdot1$

$=\boldsymbol{-360}$

〔別解〕 $(3x-y-4z)^6$ の xy^4z の項は，

$\dfrac{6!}{1!4!1!}(3x)\cdot(-y)^4\cdot(-4z)$ だから，xy^4z の

係数は，$\dfrac{6!}{1!4!1!}\cdot3\cdot(-4)=\boldsymbol{-360}$

(4) $\{(x+y)-3z\}^7$ の展開式で，z^2 を含む項は，

${}_7C_2(x+y)^5(-3z)^2$

$(x+y)^5$ の展開式で，x^2y^3 を含む項の係数は，

${}_5C_3$ だから，$x^2y^3z^2$ の係数は，

${}_7C_2(-3)^2\cdot{}_5C_3=21\cdot9\cdot10=\boldsymbol{1890}$

〔別解〕 $(x+y-3z)^7$ の $x^2y^3z^2$ の項は，

$\dfrac{7!}{2!3!2!}x^2y^3\cdot(-3z)^2$ だから，$x^2y^3z^2$ の係数は，

$\dfrac{7!}{2!3!2!}\cdot(-3)^2=\mathbf{1890}$

6 二項定理により

$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$

これに $x=5$ を代入して

${}_n\mathrm{C}_0+5{}_n\mathrm{C}_1+5^2{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+5^n{}_n\mathrm{C}_n=\mathbf{6^n}$

p.15～16　**5 恒等式**

1 (ア) 左辺を展開すると右辺と一致するから，恒等式である。

(イ) 展開して整理すると，$ab=0$

$a=0$ または $b=0$ のときだけ成り立つから，方程式である。

(ウ) 左辺を展開すると右辺と一致するから，恒等式である。

(エ) 展開して整理すると　$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$ より，$x=1$ のときだけ成り立つから，方程式である。

恒等式は，(ア)，(ウ)

方程式は，(イ)，(エ)

2 (1) x についての恒等式とすると，

$a+b-4=0$,　$a-3b=0$,　$3c-2a=0$

これを解いて，$\boldsymbol{a=3}$，$\boldsymbol{b=1}$，$\boldsymbol{c=2}$

(2) 等式の右辺を整理すると，

$4x^2-x-3=ax^2+(2a+b)x+a+b+c$

両辺の係数を比較して，

$4=a$,　$-1=2a+b$,　$-3=a+b+c$

これを解いて，$\boldsymbol{a=4}$，$\boldsymbol{b=-9}$，$\boldsymbol{c=2}$

3 両辺に $x=0$，1，2 を代入すると，

$0=4a-2b+c$,　$0=a-b+c$,　$2=c$

これを解いて，$a=1$，$b=3$，$c=2$

逆に，このとき，

$(\text{右辺})=(x-2)^2+3(x-2)+2$

$=x^2-x$

$=(\text{左辺})$

となるから，もとの等式は恒等式である。

よって，$\boldsymbol{a=1}$，$\boldsymbol{b=3}$，$\boldsymbol{c=2}$

4 (1) 両辺に $(x-1)(x-2)$ をかけると，

$3x-5=a(x-2)+b(x-1)$

右辺を整理すると，

$3x-5=(a+b)x-2a-b$

両辺の係数を比較して，

$3=a+b$,　$-5=-2a-b$

これを解いて，$\boldsymbol{a=2}$，$\boldsymbol{b=1}$

(2) 両辺に $x^2(x-1)$ をかけると，

$2x+1=ax(x-1)+b(x-1)+cx^2$

右辺を整理すると，

$2x+1=(a+c)x^2+(-a+b)x-b$

両辺の係数を比較して，

$0=a+c$,　$2=-a+b$,　$1=-b$

これを解いて，$\boldsymbol{a=-3}$，$\boldsymbol{b=-1}$，$\boldsymbol{c=3}$

p.17～18　**6 等式の証明**

1 (1) $(\text{左辺})=(a^2+2ab+b^2)-2ab$

$=a^2+b^2$

よって，$(a+b)^2-2ab=a^2+b^2$

(2) $(\text{左辺})=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2$

$(\text{右辺})=(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$

$+(a^2y^2-2abxy+b^2x^2)$

$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2$

よって，$(a^2+b^2)(x^2+y^2)$

$=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$

(3) $(\text{右辺})=\dfrac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)$

$+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\dfrac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

よって，与えられた等式は成り立つ。

2 (1) 条件より，$c=-a-b$ だから，

$(\text{左辺})=a^2-b(-a-b)=a^2+ab+b^2$

$(\text{右辺})=b^2-(-a-b)a=b^2+a^2+ab$

よって，$a^2-bc=b^2-ca$

〔別解〕 $(\text{左辺})-(\text{右辺})$

$=a^2-bc-(b^2-ca)$

$=a^2-b^2+ca-bc$

$=(a+b)(a-b)+c(a-b)$

$=(a+b+c)(a-b)$

$a+b+c=0$ だから，$(\text{左辺})-(\text{右辺})=0$

よって，$a^2-bc=b^2-ca$

(2) 条件より，$c=-a-b$ だから，

$(\text{左辺})=a^2+b^2+(-a-b)^2=2a^2+2ab+2b^2$

$(\text{右辺})=-2ab-2b(-a-b)-2a(-a-b)$

$=-2ab+2ab+2b^2+2a^2+2ab$

$=2a^2+2ab+2b^2$

よって，$a^2+b^2+c^2=-2ab-2bc-2ca$

〔別解〕 $(\text{左辺})-(\text{右辺})$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$=(a+b+c)^2=0$

よって，$a^2+b^2+c^2=-2ab-2bc-2ca$

(3) 条件より，

$a+b=-c$,　$b+c=-a$,　$c+a=-b$

だから，

$(\text{左辺})=(-c)(-a)(-b)+abc$

$=-abc+abc=0$

よって，$(a+b)(b+c)(c+a)+abc=0$

$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$
$=a^2(b-c)-a(b+c)(b-c)+bc(b-c)$
$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$
$=(b-c)(a-b)(a-c)$
$=-(a-b)(b-c)(c-a)=$(右辺)

3 (1) $c=-(a+b)$ より，

$\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ca}+\dfrac{c^2}{ab}$

$=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\dfrac{a^3+b^3-(a+b)^3}{-ab(a+b)}$

$=\dfrac{-3ab(a+b)}{-ab(a+b)}=3$

(2) $b=1-a$ より，
$a^3+b^3=a^3+(1-a)^3=a^3+(1-3a+3a^2-a^3)$
$=3a^2-3a+1$
$1-3ab=1-3a(1-a)=3a^2-3a+1$
よって，$a^3+b^3=1-3ab$

(3) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと，$a=bk$，　$c=dk$

(左辺)$=\dfrac{bk}{b}=k$

(右辺)$=\dfrac{p\cdot bk+q\cdot dk}{pb+qd}=\dfrac{(pb+qd)k}{pb+qd}=k$

よって，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{pa+qc}{pb+qd}$

(4) $a=2k$，$b=3k$，$c=4k$ とおくと，
$2k+3k+4k=27$，$9k=27$ より，$k=3$
よって，$\boldsymbol{a=6}$，$\boldsymbol{b=9}$，$\boldsymbol{c=12}$

4 (1) $\dfrac{a}{b}-\dfrac{a+c}{b+c}=\dfrac{a(b+c)-b(a+c)}{b(b+c)}$

$=\dfrac{c(a-b)}{b(b+c)}$

$a>b>0$ より，$a-b>0$
$b>0$，$c>0$ より，$b+c>0$

$\dfrac{c(a-b)}{b(b+c)}>0$ より，$\dfrac{a}{b}>\dfrac{a+c}{b+c}$

(2) $\dfrac{a}{b}-\dfrac{a-c}{b-c}=\dfrac{a(b-c)-b(a-c)}{b(b-c)}=\dfrac{c(b-a)}{b(b-c)}$

$a>b>0$ より，$b-a<0$
$b>0$，$c<0$ より，$b-c>0$

$\dfrac{c(b-a)}{b(b-c)}>0$ より，$\dfrac{a}{b}>\dfrac{a-c}{b-c}$

5 (1) (左辺)$^2-$(右辺)^2
$=(2\sqrt{a}+3\sqrt{b})^2-(\sqrt{4a+9b})^2$
$=4a+12\sqrt{ab}+9b-(4a+9b)$
$=12\sqrt{ab}>0$
よって，$(2\sqrt{a}+3\sqrt{b})^2>(\sqrt{4a+9b})^2$
$2\sqrt{a}+3\sqrt{b}>0$，$\sqrt{4a+9b}>0$ だから，
$2\sqrt{a}+3\sqrt{b}>\sqrt{4a+9b}$

(2) $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}\right)=1+\dfrac{4a}{b}+\dfrac{b}{a}+4$

$=\dfrac{b}{a}+\dfrac{4a}{b}+5$

$\dfrac{b}{a}>0$，$\dfrac{4a}{b}>0$ だから，相加平均と相乗平均の

関係により，$\dfrac{b}{a}+\dfrac{4a}{b}\geqq 2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{4a}{b}}=4$

よって，$\dfrac{b}{a}+\dfrac{4a}{b}+5\geqq 4+5=9$

したがって，$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}\right)\geqq 9$

等号は $\dfrac{b}{a}=\dfrac{4a}{b}$　すなわち　$b^2=4a^2$ だから，

$\boldsymbol{b=2a}$ **のとき成り立つ。**

(3) (左辺)$^2-$(右辺)^2
$=\{\sqrt{2(a^2+b^2)}\}^2-(|a|+|b|)^2$
$=2(a^2+b^2)-(|a|^2+2|a||b|+|b|^2)$
$=2a^2+2b^2-a^2-2|a||b|-b^2$
$=(|a|-|b|)^2\geqq 0$
よって，$\{\sqrt{2(a^2+b^2)}\}^2\geqq(|a|+|b|)^2$
$\sqrt{2(a^2+b^2)}\geqq 0$，$|a|+|b|\geqq 0$ であるから，
$\sqrt{2(a^2+b^2)}\geqq|a|+|b|$
等号は $|a|-|b|=0$　すなわち　$|a|=|b|$ から，
$\boldsymbol{a=\pm b}$ **のとき成り立つ。**

6 k について整理すると，
$(x+y-1)k+(-2x+y+8)=0$
k についての恒等式だから，
$x+y-1=0$，　$-2x+y+8=0$
これを解いて，$\boldsymbol{x=3}$，$\boldsymbol{y=-2}$

p.24～25　章末問題

1 (1) $24x^3+81y^3=3(8x^3+27y^3)$
$\boldsymbol{=3(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)}$

(2) $x^3-(y+z)^3$
$=\{x-(y+z)\}\{x^2+x(y+z)+(y+z)^2\}$
$\boldsymbol{=(x-y-z)(x^2+y^2+z^2+xy+2yz+zx)}$

2 (1) $\boldsymbol{A}=(3x^2+2x+11)(x-2)+9$
$\boldsymbol{=3x^3-4x^2+7x-13}$

(2)
$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & x^2+x-2 \\
2x-1\,\big) & 2x^3+\ x^2-5x+a \\
 & 2x^3-\ x^2 \\ \hline
 & 2x^2-5x \\
 & 2x^2-\ x \\ \hline
 & -4x+a \\
 & -4x+2 \\ \hline
 & a-2
\end{array}
$$

余りが 0 であるから，$a-2=0$
よって，$\boldsymbol{a=2}$

3 (1) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x}\times\dfrac{x-1}{x+3}$

$=\dfrac{(x+3)(x-2)}{x(x-1)}\times\dfrac{x-1}{x+3}=\boldsymbol{\dfrac{x-2}{x}}$

(2) $\dfrac{a^2-2a}{a^2+6a+9}\div\dfrac{a^2-4}{a^2+3a}$

$=\dfrac{a(a-2)}{(a+3)^2}\times\dfrac{a(a+3)}{(a+2)(a-2)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{a^2}{(a+2)(a+3)}}$

(3) $\dfrac{1}{a(a+2)}+\dfrac{1}{(a+2)(a+4)}$

$=\dfrac{a+4}{a(a+2)(a+4)}+\dfrac{a}{a(a+2)(a+4)}$

$=\dfrac{2(a+2)}{a(a+2)(a+4)}=\boldsymbol{\dfrac{2}{a(a+4)}}$

(4) $\dfrac{2}{x^2-2x}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

$=\dfrac{2}{x(x-2)}-\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$

$=\dfrac{2(x-1)}{x(x-2)(x-1)}-\dfrac{x}{x(x-1)(x-2)}$

$=\dfrac{x-2}{x(x-2)(x-1)}=\boldsymbol{\dfrac{1}{x(x-1)}}$

4 (1) 展開式の一般項は，${}_6\mathrm{C}_r x^{6-r}(-1)^r$
求める係数は，$r=3$ のときだから，
${}_6\mathrm{C}_3(-1)^3=\boldsymbol{-20}$

(2) 展開式の一般項は，
${}_5\mathrm{C}_r(3a)^{5-r}b^r=3^{5-r}{}_5\mathrm{C}_r a^{5-r}b^r$
求める係数は，$r=3$ のときだから，
$3^2{}_5\mathrm{C}_3=9\cdot10=\boldsymbol{90}$

(3) $\{(a+b)+c\}^3$ の展開式で，c を含まない項は，
$(a+b)^3$
$(a+b)^3$ の展開式で，a^2b の係数は ${}_3\mathrm{C}_1$ だから，
求める係数は，${}_3\mathrm{C}_1=\boldsymbol{3}$
〔別解〕 $(a+b+c)^3$ の a^2b の項は，

$\dfrac{3!}{2!1!0!}a^2b=3a^2b$

(4) $\{(a+b)+c\}^6$ の展開式で，c^2 を含む項は，
${}_6\mathrm{C}_2(a+b)^4c^2$
$(a+b)^4$ の展開式で，a^2b^2 を含む項の係数は，
${}_4\mathrm{C}_2$ だから，$a^2b^2c^2$ 係数は，
${}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2=15\cdot6=\boldsymbol{90}$
〔別解〕 $(a+b+c)^6$ の $a^2b^2c^2$ の項は，

$\dfrac{6!}{2!2!2!}a^2b^2c^2$ だから，$a^2b^2c^2$ の係数は，

$\dfrac{6!}{2!2!2!}=\boldsymbol{90}$

5 (1) $\dfrac{x+8}{(x-2)(x+3)}=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+3}$ だから，
両辺に $(x-2)(x+3)$ をかけると，
$x+8=a(x+3)+b(x-2)$
右辺を整理すると，
$x+8=(a+b)x+3a-2b$
両辺の係数を比較して，
$1=a+b,\quad 8=3a-2b$
これを解いて，$\boldsymbol{a=2,\ b=-1}$

(2) 右辺を展開して整理すると，
$x^3+3=x^3+(a+3)x^2+(2a+b+3)x$
$+(a+b+c+1)$
両辺の係数を比較して，
$0=a+3,\quad 0=2a+b+3$
$3=a+b+c+1$
これを解いて，$\boldsymbol{a=-3,\ b=3,\ c=2}$
〔別解〕 $x+1=t$ とおくと，与えられた等式は，
$(t-1)^3+3=t^3+at^2+bt+c$
左辺を整理すると，
$t^3-3t^2+3t+2=t^3+at^2+bt+c$
t についての恒等式だから，係数を比較して，
$\boldsymbol{a=-3,\ b=3,\ c=2}$

6 条件より，$y=1-x$ だから，
$(\text{左辺})=\{x^2+(1-x)\}^2=(x^2-x+1)^2$
$(\text{右辺})=\{(1-x)^2+x\}\{1-x(1-x)\}$
$=(1-x+x^2)(1-x+x^2)$
$=(x^2-x+1)^2$
よって，$(x^2+y)^2=(y^2+x)(1-xy)$

7 $(\text{右辺})-(\text{左辺})=x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)$

$=\dfrac{1}{2}(x^2-2xy+y^2)+\dfrac{1}{2}(y^2-2yz+z^2)$

$+\dfrac{1}{2}(z^2-2zx+x^2)$

$=\dfrac{1}{2}(x-y)^2+\dfrac{1}{2}(y-z)^2+\dfrac{1}{2}(z-x)^2\geqq0$

よって，$xy+yz+zx\leqq x^2+y^2+z^2$
等号は $x-y=y-z=z-x=0$ すなわち
$\boldsymbol{x=y=z}$ **のとき成り立つ。**

8 $y+z=A$，$y-z=B$ とおくと，
$(x+y+z)^3-(y+z-x)^3$
$-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3$
$=(x+A)^3-(A-x)^3-(x-B)^3-(x+B)^3$
$=x^3+3x^2A+3xA^2+A^3$
$-(A^3-3A^2x+3Ax^2-x^3)$
$-(x^3-3x^2B+3xB^2-B^3)$
$-(x^3+3x^2B+3xB^2+B^3)$

$=6xA^2-6xB^2=6x(y+z)^2-6x(y-z)^2$
$=6x(y^2+2yz+z^2)-6x(y^2-2yz+z^2)$
$=6xy^2+12xyz+6xz^2-6xy^2+12xyz-6xz^2$
$=\boldsymbol{24xyz}$

9 (1) $x^9-y^9=(x^3)^3-(y^3)^3$
$=(x^3-y^3)(x^6+x^3y^3+y^6)$
$=\boldsymbol{(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^6+x^3y^3+y^6)}$

(2) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$
$=\{(a+b+c)-a\}\{(a+b+c)^2$
$\quad+(a+b+c)a+a^2\}-(b+c)(b^2-bc+c^2)$
$=(b+c)(3a^2+b^2+c^2+3ab+3ca+2bc)$
$\quad-(b+c)(b^2-bc+c^2)$
$=(b+c)\{3a^2+3(b+c)a+3bc\}$
$=\boldsymbol{3(a+b)(b+c)(c+a)}$

10 $x^4+8x-2=B(x^2-2x+5)+(-4x+3)$ だから,
$B(x^2-2x+5)=x^4+12x-5$
$B=(x^4+12x-5)\div(x^2-2x+5)$

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2+2x-1 \\
x^2-2x+5 \,\big) & x^4 \qquad\qquad\quad +12x-5 \\
 & x^4-2x^3+5x^2 \\ \hline
 & \quad 2x^3-5x^2+12x \\
 & \quad 2x^3-4x^2+10x \\ \hline
 & \qquad\quad -x^2+2x-5 \\
 & \qquad\quad -x^2+2x-5 \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

よって,$\boldsymbol{B=x^2+2x-1}$

11 k について整理すると,
$(x+4y-7)k+(2x-4y-2)=0$
k についての恒等式だから,
$x+4y-7=0,\quad 2x-4y-2=0$
これを解いて,$\boldsymbol{x=3,\ y=1}$

12 右辺を展開して整理すると,
$6x^2-11xy-10y^2+7x+11y-3$
$=acx^2+(-5a+2c)xy-10y^2$
$\quad+(3a+bc)x+(-5b+6)y+3b$
両辺の各同類項の係数を比較して,
$6=ac$ ……①,$-11=-5a+2c$ ……②
$7=3a+bc$ ……③,$11=-5b+6$ ……④
$-3=3b$ ……⑤
④,⑤より,$b=-1$
このとき,③は $7=3a-c$ ……⑥
②,⑥より,$a=3$,$c=2$
これは①を満たすから,$\boldsymbol{a=3,\ b=-1,\ c=2}$

13 $x=(b-c)k$,$y=(c-a)k$,$z=(a-b)k$ とおくと,
$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z$
$=(b+c)(b-c)k+(c+a)(c-a)k$
$\quad+(a+b)(a-b)k$
$=(b^2-c^2)k+(c^2-a^2)k+(a^2-b^2)k$
$=\{(b^2-c^2)+(c^2-a^2)+(a^2-b^2)\}k=0$

14 (1) (左辺)−(右辺)
$=3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2$
$=3x^2+3y^2+3z^2-(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)$
$=2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx$
$=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geqq 0$
よって,$3(x^2+y^2+z^2)\geqq(x+y+z)^2$
等号は,$x-y=y-z=z-x=0$ すなわち
$\boldsymbol{x=y=z}$ **のとき成り立つ。**

(2) $x+y+z=6$ のとき,(1)より,
$3(x^2+y^2+z^2)\geqq 6^2$
よって,$x^2+y^2+z^2\geqq 12$
したがって,$x=y=z=2$ のとき**最小値は12**

15 $(\text{右辺})^2-(\text{左辺})^2$
$=(\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+d^2})^2-|ab+cd|^2$
$=(a^2+c^2)(b^2+d^2)-(ab+cd)^2$
$=a^2b^2+a^2d^2+b^2c^2+c^2d^2-a^2b^2-2abcd-c^2d^2$
$=(a^2d^2-2abcd+b^2c^2)$
$=(ad-bc)^2\geqq 0$
よって,$|ab+cd|^2\leqq(\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+d^2})^2$
$|ab+cd|\geqq 0$,$\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+d^2}\geqq 0$ だから
$|ab+cd|\leqq\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+d^2}$
等号は $ad-bc=0$ すなわち $\boldsymbol{ad=bc}$ **のとき成り立つ。**

16 $a+b=2$ より,$b=2-a$
$0<a<2-a$ から,$0<a<1$ ……①
$\dfrac{a^2+b^2}{2}-1=\dfrac{a^2+(2-a)^2-2}{2}$
$\qquad\qquad=a^2-2a+1=(a-1)^2$
$(a-1)^2>0$
よって,$\dfrac{a^2+b^2}{2}>1$ ……②
$1-ab=1-a(2-a)$
$\qquad=a^2-2a+1=(a-1)^2>0$
よって,$1>ab$ ……③
②,③から,$\boldsymbol{ab<1<\dfrac{a^2+b^2}{2}}$

第 2 章　複素数と方程式

p.26～32　**① 複素数と方程式の解**

1 (1) $-1+6i$ の**実部は -1，虚部は 6**

(2) $\sqrt{5}-i$ の**実部は $\sqrt{5}$，虚部は -1**

(3) -2 の**実部は -2，虚部は 0**

(4) $\sqrt{3}i$ の**実部は 0，虚部は $\sqrt{3}$**

2 (1) $x+yi=-2+i$

x，y は実数だから，$\boldsymbol{x=-2}$，$\boldsymbol{y=1}$

(2) $(x+y)+(2x-3)i=2+5i$

$x+y$，$2x-3$ は実数だから，

$x+y=2$，　$2x-3=5$

これを解いて，$\boldsymbol{x=4}$，$\boldsymbol{y=-2}$

(3) $(3x-y)+(x-y+6)i=0$

$3x-y$，$x-y+6$ は実数だから，

$3x-y=0$，　$x-y+6=0$

これを解いて，$\boldsymbol{x=3}$，$\boldsymbol{y=9}$

3 (1) 共役な複素数は $1-i$ だから，

和　$(1+i)+(1-i)=\boldsymbol{2}$

積　$(1+i)(1-i)=1-i^2=\boldsymbol{2}$

(2) 共役な複素数は $-2+7i$ だから，

和　$(-2-7i)+(-2+7i)=\boldsymbol{-4}$

積　$(-2-7i)(-2+7i)=4-49i^2=\boldsymbol{53}$

(3) 共役な複素数は -3 だから，

和　$(-3)+(-3)=\boldsymbol{-6}$

積　$(-3)\cdot(-3)=\boldsymbol{9}$

(4) 共役な複素数は $-\sqrt{5}i$ だから，

和　$(\sqrt{5}i)+(-\sqrt{5}i)=\boldsymbol{0}$

積　$(\sqrt{5}i)(-\sqrt{5}i)=-5i^2=\boldsymbol{5}$

4 (1) $(3+2i)+(5-3i)=(3+5)+(2-3)i$

$=\boldsymbol{8-i}$

(2) $(3+2i)-(5-3i)=(3-5)+(2+3)i$

$=\boldsymbol{-2+5i}$

(3) $(1+3i)(2+i)=2+i+6i+3i^2$

$=2+7i-3=\boldsymbol{-1+7i}$

(4) $\dfrac{1+3i}{2+i}=\dfrac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{2+5i-3i^2}{4-i^2}$

$=\dfrac{2+5i+3}{4+1}=\dfrac{5+5i}{5}=\boldsymbol{1+i}$

5 (1) $\sqrt{-6}=\boldsymbol{\sqrt{6}i}$

(2) $-\sqrt{-18}=-\sqrt{18}i=\boldsymbol{-3\sqrt{2}i}$

(3) $\pm\sqrt{-12}=\pm\sqrt{12}i=\boldsymbol{\pm 2\sqrt{3}i}$

6 (1) $\sqrt{-2}\times\sqrt{-14}=\sqrt{2}i\times\sqrt{14}i$

$=\sqrt{28}i^2=\boldsymbol{-2\sqrt{7}}$

(2) $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{-5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}i}=\dfrac{2}{i}=\dfrac{2i}{i^2}=\boldsymbol{-2i}$

(3) $\dfrac{\sqrt{-27}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{\sqrt{27}i}{\sqrt{3}i}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{3}$

7 (1) $x^2-x+1=0$ の解は，

$\boldsymbol{x}=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4}}{2\cdot1}=\dfrac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$

$=\boldsymbol{\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}}$

(2) $2x^2-5x+3=0$ の解は，

$x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-24}}{2\cdot2}=\dfrac{5\pm1}{4}$

よって，$\boldsymbol{x=\dfrac{3}{2}}$，$\boldsymbol{1}$

(3) $2x^2-8x-1=0$ の解は，

$2b'=-8$ より，$b'=-4$ だから，

$\boldsymbol{x}=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2+2}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{4\pm3\sqrt{2}}{2}}$

(4) $x^2+2\sqrt{2}x+3=0$ の解は，

$\boldsymbol{x}=-\sqrt{2}\pm\sqrt{(\sqrt{2})^2-3}=-\sqrt{2}\pm\sqrt{-1}$

$=\boldsymbol{-\sqrt{2}\pm i}$

8 2 次方程式の判別式を D とする。

(1) $D=3^2-4\cdot5\cdot(-2)=49>0$

よって，**異なる 2 つの実数解をもつ。**

(2) $\dfrac{D}{4}=(-6)^2-4\cdot9=0$

よって，**重解をもつ。**

(3) $D=9^2-4\cdot3\cdot7=-3<0$

よって，**異なる 2 つの虚数解をもつ。**

(4) $\dfrac{D}{4}=7^2-(-13)\cdot(-3)=10>0$

よって，**異なる 2 つの実数解をもつ。**

9 2 次方程式の判別式を D とする。

$\dfrac{D}{4}=(-a)^2-1\cdot9=a^2-9$

(1) 異なる 2 つの実数解をもつ条件は $D>0$ だから，

$a^2-9>0$

$(a+3)(a-3)>0$

よって，$\boldsymbol{a<-3}$，$\boldsymbol{3<a}$

(2) 異なる 2 つの虚数解をもつ条件は $D<0$ だから，

$a^2-9<0$

$(a+3)(a-3)<0$

よって，$\boldsymbol{-3<a<3}$

10 2 つの解を α，β とする。

(1) **和**　$\alpha+\beta=-(-3)=\boldsymbol{3}$，**積**　$\alpha\beta=\boldsymbol{5}$

(2) **和**　$\alpha+\beta=-\dfrac{16}{8}=\boldsymbol{-2}$

積　$\alpha\beta=\dfrac{-3}{8}=\boldsymbol{-\dfrac{3}{8}}$

11　$x^2+3x-4=0$ から,

$\alpha+\beta=-3,\quad \alpha\beta=-4$

(1)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$\qquad=(-3)^2-2\cdot(-4)=\mathbf{17}$

(2)　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$\qquad=(-3)^3-3\cdot(-4)\cdot(-3)=\mathbf{-63}$

(3)　$\left(\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}\right)^2=\left(\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}\right)^2=\dfrac{(\alpha-\beta)^2}{(\alpha\beta)^2}$

$=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}=\dfrac{(-3)^2-4\cdot(-4)}{(-4)^2}=\boldsymbol{\dfrac{25}{16}}$

12　(1)　2 つの解を α, 5α とおくと,

$\alpha+5\alpha=6$　……①,　$\alpha\cdot5\alpha=k$　……②

①より，$6\alpha=6$,　$\alpha=1$

②から，$k=5\alpha^2=5\cdot1^2=5$

他の解 5α は，$5\alpha=5\cdot1=5$

したがって，$\boldsymbol{k=5}$**，2 つの解は　1，5**

(2)　2 つの解を α, $\alpha+2$ とおくと,

$\alpha+(\alpha+2)=6$　……①

$\alpha(\alpha+2)=k$　……②

①より，$2\alpha+2=6$　$\alpha=2$

②より，$k=2(2+2)=8$

他の解 $\alpha+2$ は，$\alpha+2=2+2=4$

したがって，$\boldsymbol{k=8}$**，2 つの解は　2，4**

13　(1)　$3x^2-2x+2=0$ を解くと,

$x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-3\cdot2}}{3}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}\,i}{3}$

よって,

$3x^2-2x+2=\boldsymbol{3\left(x-\dfrac{1+\sqrt{5}\,i}{3}\right)\left(x-\dfrac{1-\sqrt{5}\,i}{3}\right)}$

(2)　$x^2-4x-2=0$ を解くと,

$x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot(-2)}=2\pm\sqrt{6}$

よって,

$x^2-4x-2=\{x-(2+\sqrt{6})\}\{x-(2-\sqrt{6})\}$

$\qquad=\boldsymbol{(x-2-\sqrt{6})(x-2+\sqrt{6})}$

(3)　$2x^2+3x-9=0$ を解くと,

$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot2\cdot(-9)}}{4}=\dfrac{-3\pm9}{4}$

よって，$x=\dfrac{3}{2}$, -3

$2x^2+3x-9=2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x+3)$

$\qquad=\boldsymbol{(2x-3)(x+3)}$

(4)　$x^2+5=0$ を解くと，$x=\pm\sqrt{5}\,i$

よって，$x^2+5=\boldsymbol{(x-\sqrt{5}\,i)(x+\sqrt{5}\,i)}$

14　(1)　2 数の和は，$1+(-2)=-1$

積は，$1\cdot(-2)=-2$

よって，$\boldsymbol{x^2+x-2=0}$

(2)　2 数の和は，$(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})=6$

積は，$(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=9-2=7$

よって，$\boldsymbol{x^2-6x+7=0}$

(3)　2 数の和は，$(4+i)+(4-i)=8$

積は，$(4+i)(4-i)=16-i^2=17$

よって，$\boldsymbol{x^2-8x+17=0}$

(4)　2 数の和は，$\dfrac{2}{3}+\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{5}{6}$

積は，$\dfrac{2}{3}\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-1$

よって，$x^2+\dfrac{5}{6}x-1=0$

したがって，$\boldsymbol{6x^2+5x-6=0}$

15　(1)　2 数は $x^2-2x-1=0$ の解だから,

$x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot(-1)}=1\pm\sqrt{2}$

よって，2 数は，$\boldsymbol{1+\sqrt{2}}$，$\boldsymbol{1-\sqrt{2}}$

(2)　2 数は $x^2-3x+4=0$ の解だから,

$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot4}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{7}\,i}{2}$

よって，2 数は，$\boldsymbol{\dfrac{3+\sqrt{7}\,i}{2}}$，$\boldsymbol{\dfrac{3-\sqrt{7}\,i}{2}}$

16　2 つの解を α, β，判別式を D とする。

α, β がともに負である条件は,

$D>0$　……①

$\alpha+\beta<0$　かつ　$\alpha\beta>0$　……②

$D=(-k)^2-4\cdot1\cdot(2k+5)$

$\quad=k^2-8k-20=(k+2)(k-10)$

①から，$(k+2)(k-10)>0$

よって，$k<-2$, $10<k$　……③

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=k$, $\alpha\beta=2k+5$

②から，$k<0$　かつ　$2k+5>0$

よって，$k<0$　……④,　$k>-\dfrac{5}{2}$　……⑤

③，④，⑤より，求める k の値の範囲は,

$\boldsymbol{-\dfrac{5}{2}<k<-2}$

17　2 つの解を α, β とする。

α, β が異符号の実数解である条件は,

$\alpha\beta<0$　……①

解と係数の関係より，$\alpha\beta=k+14$

①から，$k+14<0$

よって，$\boldsymbol{k<-14}$

p.33～37

❷ 高次方程式

1　(1)　$P(x)=x^3+3x-2$ とおくと，求める余りは,

$P(1)=1^3+3\cdot1-2=\mathbf{2}$

(2)　$P(x)=x^3+3x^2-x-3$ とおくと，求める余り

②から，$\alpha^2+2\alpha-24=0$　$(\alpha+6)(\alpha-4)=0$
よって，$\alpha=-6,\ 4$
このとき，他の解は，$\alpha+2=-4,\ 6$
①から，$\alpha=-6$ のとき，$k=5$
$\alpha=4$ のとき，$k=-5$
よって，**$k=5$ のとき，$x=-6,\ -4$**
$k=-5$ のとき，$x=4,\ 6$

$\boxed{11}$ $P(x)$ を2次式 x^2-2x-3 で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ (a，b は定数) とすると，
$P(x)=(x^2-2x-3)Q(x)+ax+b$
$=(x+1)(x-3)Q(x)+ax+b$　……①
$P(x)$ を $x+1$ で割ったときの余りが3だから，
$P(-1)=3$
①より，$-a+b=3$　……②
$P(x)$ を x^2-4x+3　すなわち，$(x-1)(x-3)$ で割ったときの余りが $2x+9$ だから，
$P(3)=2\cdot3+9=15$
①より，$3a+b=15$　……③
②，③を解いて，$a=3$，$b=6$
求める余りは，**$3x+6$**

$\boxed{12}$ (1) $x=1+\sqrt{3}i$ から，$x-1=\sqrt{3}i$
両辺を2乗して，$(x-1)^2=(\sqrt{3}i)^2$
$x^2-2x+1=-3$　よって，$x^2-2x+4=0$
(2) $P(x)=x^3-4x^2+8x-5$ とおく。
$P(x)$ を x^2-2x+4 で割ると，商が $x-2$，余りが3だから，$P(x)=(x^2-2x+4)(x-2)+3$
$x=1+\sqrt{3}i$ を代入すると，(1)から，
$P(1+\sqrt{3}i)=0+3=$ **3**

$\boxed{13}$ 左辺を a について整理すると，
$x^3-2x^2+3x-6-a(x^2-3x+2)=0$
$x^2(x-2)+3(x-2)-a(x-2)(x-1)=0$
$(x-2)(x^2-ax+a+3)=0$
よって，実数解 $x=2$ をもつ。
$x^2-ax+a+3=0$ が虚数解をもつから，
2次方程式の判別式を D とすると，$D<0$
$D=(-a)^2-4\cdot1\cdot(a+3)$
$=a^2-4a-12=(a+2)(a-6)$
よって，$(a+2)(a-6)<0$
したがって，**$-2<a<6$**

$\boxed{14}$ $\alpha+\beta+\gamma=1$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$，$\alpha\beta\gamma=-2$
(1) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}$
$=\dfrac{3}{-2}=\boldsymbol{-\dfrac{3}{2}}$
(2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$
$=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$
$=1^2-2\cdot3=$ **-5**

第3章 図形と方程式

p.42～45　**❶ 点と座標**

1 (1) $\mathrm{AB}=|5-(-1)|=|6|=$ **6**
(2) $\mathrm{OA}=|-4-0|=|-4|=$ **4**
(3) $\mathrm{AB}=|-9-7|=|-16|=$ **16**

2 (1) $\dfrac{2\times(-3)+3\times7}{3+2}=\dfrac{15}{5}=$ **3**
(2) $\dfrac{-2\times(-3)+3\times7}{3-2}=$ **27**
(3) $\dfrac{-3+7}{2}=$ **2**
(4) $\dfrac{-5\times(-3)+3\times7}{3-5}=\dfrac{36}{-2}=$ **-18**

3 (1) $\mathrm{AB}=\sqrt{(5-2)^2+(5-1)^2}=\sqrt{25}=$ **5**
(2) $\mathrm{OA}=\sqrt{(-6)^2+2^2}=\sqrt{40}=\boldsymbol{2\sqrt{10}}$
(3) $\mathrm{AB}=\sqrt{(7-3)^2+(3-7)^2}=\sqrt{32}=\boldsymbol{4\sqrt{2}}$
(4) $\mathrm{AB}=\sqrt{\{8-(-4)\}^2+(-2-3)^2}=\sqrt{169}=$ **13**

4 (1) 点Pの座標を $(x,\ 0)$ とすると，
$\mathrm{AP}=2\sqrt{2}$ から，$\mathrm{AP}^2=8$
$(x-4)^2+(0-2)^2=8$　　$x^2-8x+12=0$
$(x-2)(x-6)=0$　　$x=2,\ 6$
点Pの座標は，**(2，0)，(6，0)**
(2) 点Qの座標を $(0,\ y)$ とすると，
$\mathrm{AQ}=5$ から，$\mathrm{AQ}^2=25$
$(0-4)^2+(y-2)^2=25$　　$y^2-4y-5=0$
$(y+1)(y-5)=0$　　$y=-1,\ 5$
点Qの座標は，**(0，−1)，(0，5)**

5 (1) $\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(4,\ -4\sqrt{3})$，$\mathrm{C}(8,\ 0)$
$\mathrm{AB}=\sqrt{4^2+(-4\sqrt{3})^2}=\sqrt{64}=8$
$\mathrm{BC}=\sqrt{(8-4)^2+\{0-(-4\sqrt{3})\}^2}=\sqrt{64}=8$
$\mathrm{CA}=8$
AB＝BC＝CA から，△ABC は**正三角形**である。
(2) $\mathrm{A}(1,\ 2)$，$\mathrm{B}(5,\ 5)$，$\mathrm{C}(-2,\ 6)$
$\mathrm{AB}=\sqrt{(5-1)^2+(5-2)^2}=\sqrt{25}=5$
$\mathrm{BC}=\sqrt{(-2-5)^2+(6-5)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$
$\mathrm{CA}=\sqrt{\{1-(-2)\}^2+(2-6)^2}=\sqrt{25}=5$
$\mathrm{AB}=\mathrm{CA}$，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{CA}^2=\mathrm{BC}^2$ から，△ABC は **∠A＝90° の直角二等辺三角形**である。

6 (1) 点Pの座標を $(t,\ 0)$ とすると，
AP＝BP から，$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$
$(t-1)^2+\{0-(-3)\}^2=(t-3)^2+(0-2)^2$
$4t=3$ より，$t=\dfrac{3}{4}$
点Pの座標は，$\boldsymbol{\left(\dfrac{3}{4},\ 0\right)}$

(2)　点Qの座標を$(t,\ -2t)$とすると，
$AQ=BQ$ から，$AQ^2=BQ^2$
$(t-1)^2+(-2t-1)^2=(t-3)^2+(-2t-0)^2$
$8t=7$ より，$t=\frac{7}{8}$
点Qの座標は，$\left(\boldsymbol{\frac{7}{8},\ -\frac{7}{4}}\right)$

7　(1)　$\left(\frac{2\times(-1)+1\times5}{1+2},\ \frac{2\times4+1\times(-5)}{1+2}\right)$
より，$\mathbf{(1,\ 1)}$

(2)　$\left(\frac{-2\times(-1)+1\times5}{1-2},\ \frac{-2\times4+1\times(-5)}{1-2}\right)$
より，$\mathbf{(-7,\ 13)}$

(3)　$\left(\frac{-1+5}{2},\ \frac{4+(-5)}{2}\right)$より，$\left(\boldsymbol{2,\ -\frac{1}{2}}\right)$

(4)　$\left(\frac{-3\times(-1)+5\times5}{5-3},\ \frac{-3\times4+5\times(-5)}{5-3}\right)$
より，$\left(\boldsymbol{14,\ -\frac{37}{2}}\right)$

8　点Qの座標を$(x,\ y)$とすると，線分PQの中点がA$(2,\ 3)$だから，
$\frac{7+x}{2}=2,\quad \frac{-2+y}{2}=3$
これを解いて，$x=-3,\ y=8$
点Qの座標は，$\mathbf{(-3,\ 8)}$

9　(1)　点Pは対角線ACの中点だから，
$\frac{-1+5}{2}=2,\quad \frac{0+2}{2}=1$
点Pの座標は，$\mathbf{(2,\ 1)}$

(2)　点Dの座標を$(x,\ y)$とすると，対角線BDの中点がP$(2,\ 1)$だから，
$\frac{3+x}{2}=2,\quad \frac{-2+y}{2}=1$
これを解いて，$x=1,\ y=4$
点Dの座標は，$\mathbf{(1,\ 4)}$

10　(1)　$\left(\frac{1+2+(-3)}{3},\ \frac{5+3+2}{3}\right)$より，
$\left(\boldsymbol{0,\ \frac{10}{3}}\right)$

(2)　$\left(\frac{-3+(-4)+1}{3},\ \frac{5+0+4}{3}\right)$より，$\mathbf{(-2,\ 3)}$

11　(1)　点Cの座標を$(x,\ y)$とすると，△ABCの重心がG$(1,\ 5)$だから，
$\frac{1+(-4)+x}{3}=1,\quad \frac{10+0+y}{3}=5$
これを解いて，$x=6,\ y=5$
点Cの座標は，$\mathbf{(6,\ 5)}$

(2)　辺ABを3：2に内分する点Dの座標は，
$\left(\frac{2\cdot1+3\cdot(-4)}{3+2},\ \frac{2\cdot10+3\cdot0}{3+2}\right)$より，$\mathbf{(-2,\ 4)}$
辺BCを3：2に内分する点Eの座標は，
$\left(\frac{2\cdot(-4)+3\cdot6}{3+2},\ \frac{2\cdot0+3\cdot5}{3+2}\right)$より，$\mathbf{(2,\ 3)}$
辺CAを3：2に内分する点Fの座標は，
$\left(\frac{2\cdot6+3\cdot1}{3+2},\ \frac{2\cdot5+3\cdot10}{3+2}\right)$より，$\mathbf{(3,\ 8)}$

(3)　△DEFの重心G′の座標は，
$\left(\frac{-2+2+3}{3},\ \frac{4+3+8}{3}\right)$より，$\mathbf{(1,\ 5)}$

p.46～49　**❷ 直線の方程式**

1　(1)　$y-(-3)=3(x-1)$
すなわち，$\boldsymbol{y=3x-6}$

(2)　$y-4=-\frac{1}{2}\{x-(-2)\}$
すなわち，$\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x+3}$

(3)　x軸に垂直だから，$\boldsymbol{x=3}$

2　(1)　$y-(-3)=\frac{5-(-3)}{3-1}(x-1)$
すなわち，$\boldsymbol{y=4x-7}$

(2)　$y-(-1)=\frac{3-(-1)}{-4-4}(x-4)$
すなわち，$\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x+1}$

(3)　x座標がともに-2だから，$\boldsymbol{x=-2}$
(4)　y座標がともに6だから，$\boldsymbol{y=6}$

3　(1)　$\boldsymbol{\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=1}$　$\left(\text{または，}\boldsymbol{y=-\frac{5}{2}x+5}\right)$

(2)　$\frac{x}{-4}+\frac{y}{3}=1$　すなわち，
$\boldsymbol{-\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1}$　$\left(\text{または，}\boldsymbol{y=\frac{3}{4}x+3}\right)$

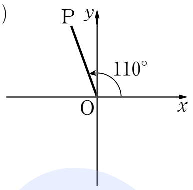
4　(1)　2直線の傾きが-2で等しいから，2直線は**平行**である。

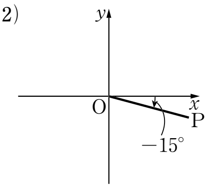
(2)　$y=-3x+2$　……①，　$y=\frac{1}{3}x+7$　……②
①，②の傾きの積は，$-3\times\frac{1}{3}=-1$
よって，2直線は**垂直**である。
①，②より，$-3x+2=\frac{1}{3}x+7$
ゆえに，$x=-\frac{3}{2}$
これを②に代入して，

第 4 章　三角関数

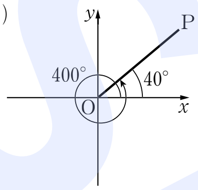
p.68〜72

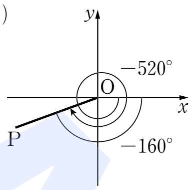
❶ 三角関数

1　(1)


(2)


第 2 象限の角　　第 4 象限の角

(3)


(4)


第 1 象限の角　　第 3 象限の角

2　(1)　500°＝140°＋360° より，一般角は，

140°＋360°×n（n は整数），第 2 象限の角

(2)　730°＝10°＋360°×2 より，一般角は，

10°＋360°×n（n は整数），第 1 象限の角

(3)　−45°＝315°＋360°×(−1) より，一般角は，

315°＋360°×n（n は整数），第 4 象限の角

(4)　−490°＝230°＋360°×(−2) より，一般角は，

230°＋360°×n（n は整数），第 3 象限の角

3　(ア)　0　　　(イ)　$\dfrac{\pi}{180}\times 15=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{12}}$

(ウ)　$\dfrac{\pi}{180}\times 30=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}}$　　(エ)　$\dfrac{\pi}{180}\times 45=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$

(オ)　$\dfrac{\pi}{180}\times 60=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$　　(カ)　$\dfrac{\pi}{180}\times 90=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$

(キ)　$\dfrac{\pi}{180}\times 120=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\pi}$　　(ク)　$\dfrac{\pi}{180}\times 135=\boldsymbol{\dfrac{3}{4}\pi}$

(ケ)　$\dfrac{\pi}{180}\times 150=\boldsymbol{\dfrac{5}{6}\pi}$　　(コ)　$\pi=\mathbf{180°}$

(サ)　$\dfrac{3}{2}\times 180°=\mathbf{270°}$　　(シ)　$\dfrac{\pi}{180}\times 360=\boldsymbol{2\pi}$

4　弧の長さを l，面積を S とする。

(1)　$\boldsymbol{l}=4\times\dfrac{\pi}{6}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\pi}$

$\boldsymbol{S}=\dfrac{1}{2}\times 4^2\times\dfrac{\pi}{6}=\boldsymbol{\dfrac{4}{3}\pi}$

(2)　$120°=\dfrac{2}{3}\pi$

$\boldsymbol{l}=6\times\dfrac{2}{3}\pi=\boldsymbol{4\pi}$

$\boldsymbol{S}=\dfrac{1}{2}\times 6^2\times\dfrac{2}{3}\pi=\boldsymbol{12\pi}$

5　(1)　図より，点Pの座標は$(-1,\ -\sqrt{3})$

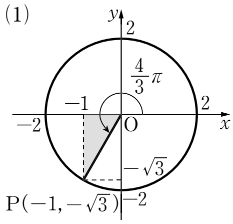
$\boldsymbol{\sin\dfrac{4}{3}\pi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$，　$\boldsymbol{\cos\dfrac{4}{3}\pi=-\dfrac{1}{2}}$

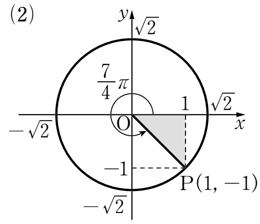
$\boldsymbol{\tan\dfrac{4}{3}\pi}=\dfrac{-\sqrt{3}}{-1}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

(2)　図より，点Pの座標は$(1,\ -1)$

$\boldsymbol{\sin\dfrac{7}{4}\pi=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$，　$\boldsymbol{\cos\dfrac{7}{4}\pi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

$\boldsymbol{\tan\dfrac{7}{4}\pi}=\dfrac{-1}{1}=\boldsymbol{-1}$

(1)


(2)


(3)　$4\pi=0+2\pi\times 2$ だから，点Pの座標は$(1,\ 0)$

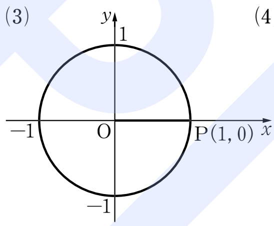
$\boldsymbol{\sin 4\pi=0}$，　$\boldsymbol{\cos 4\pi=1}$

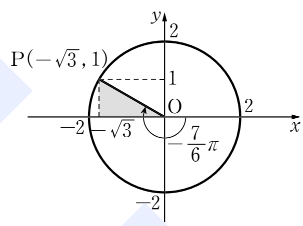
$\boldsymbol{\tan 4\pi}=\dfrac{0}{1}=\boldsymbol{0}$

(4)　図から，点Pの座標は$(-\sqrt{3},\ 1)$

$\boldsymbol{\sin\left(-\dfrac{7}{6}\pi\right)=\dfrac{1}{2}}$，　$\boldsymbol{\cos\left(-\dfrac{7}{6}\pi\right)}=\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

$\boldsymbol{\tan\left(-\dfrac{7}{6}\pi\right)}=\dfrac{1}{-\sqrt{3}}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

(3)


(4)


6　(1)　図の単位円で，点Pの座標は，

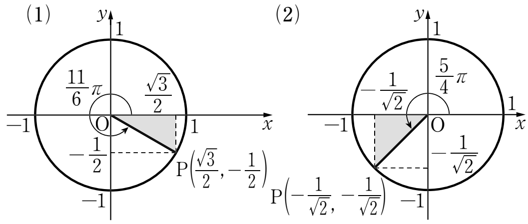
$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

$\sin\dfrac{11}{6}\pi=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$

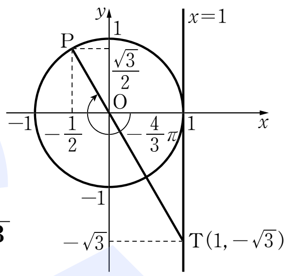
(2)　図の単位円で，点Pの座標は，

$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

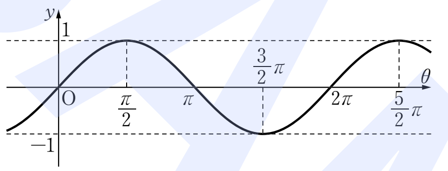
$\cos\dfrac{5}{4}\pi=\boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$



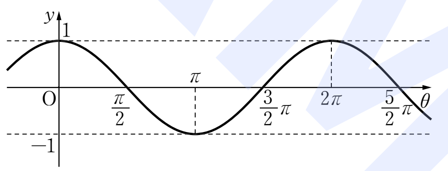
(3) 図の単位円で,
点Pの座標は
$\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
点Tの座標は
$(1,\ -\sqrt{3})$
$\tan\left(-\frac{4}{3}\pi\right) = \boldsymbol{-\sqrt{3}}$



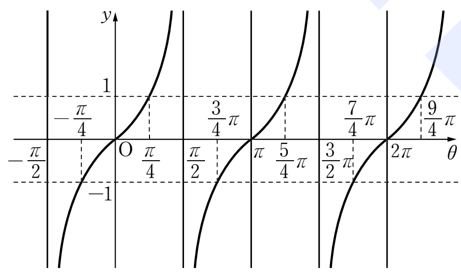
7 (1) $y=\sin\theta$



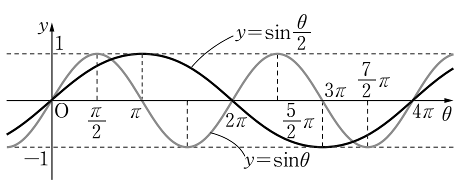
(2) $y=\cos\theta$



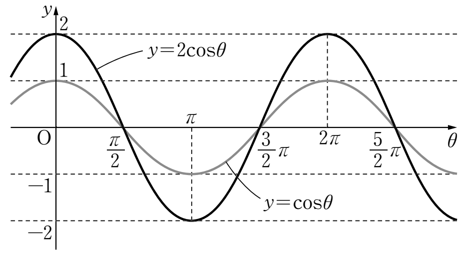
(3) $y=\tan\theta$



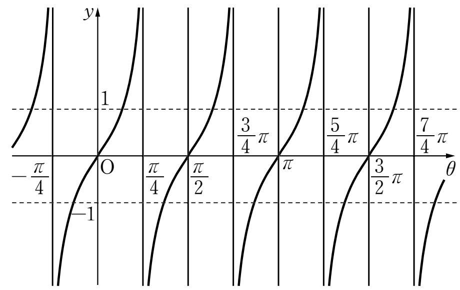
8 (1) $y=\sin\theta$ のグラフを, θ 軸方向に 2 倍に拡大したもの。周期は $2\pi\times 2=\boldsymbol{4\pi}$



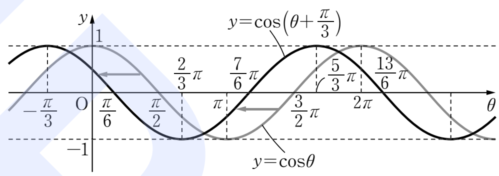
(2) $y=\cos\theta$ のグラフを, y 軸方向に 2 倍に拡大したもの。周期は $\boldsymbol{2\pi}$



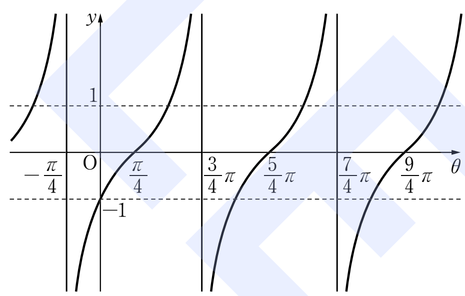
(3) $y=\tan\theta$ のグラフを, θ 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したもの。周期は $\pi\times\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$



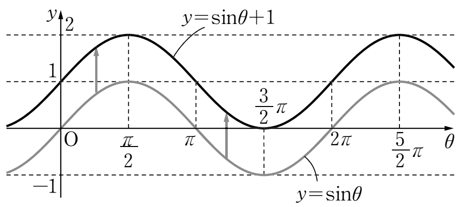
9 (1) $y=\cos\theta$ のグラフを, θ 軸方向に $-\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動したもの。



(2) $y=\tan\theta$ のグラフを, θ 軸方向に $\frac{\pi}{4}$ だけ平行移動したもの。



(3) $y=\sin\theta$ のグラフを, y 軸方向に 1 だけ平行移動したもの。



p.73〜78　❷ 三角関数の性質

1　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144}{169}$

θ は第 3 象限の角だから，$\cos\theta<0$

よって，$\boldsymbol{\cos\theta=}-\sqrt{\frac{144}{169}}=\boldsymbol{-\frac{12}{13}}$

また，$\boldsymbol{\tan\theta=}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left(-\frac{5}{13}\right)\div\left(-\frac{12}{13}\right)=\boldsymbol{\frac{5}{12}}$

2　$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$

よって，$\cos^2\theta=\frac{4}{5}$

θ は第 2 象限の角だから，$\cos\theta<0$

$\boldsymbol{\cos\theta=}-\sqrt{\frac{4}{5}}=-\frac{2}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{-\frac{2\sqrt{5}}{5}}$

$\boldsymbol{\sin\theta=}\cos\theta\tan\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{5}}$

3　(1)　(左辺)$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\tan\theta}=$(右辺)

よって，$\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}-\tan\theta=\frac{1}{\tan\theta}$

(2)　(左辺)$=\frac{\sin^2\theta+(1-\cos\theta)^2}{(1-\cos\theta)\sin\theta}$

$=\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+1-2\cos\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}$

$=\frac{2-2\cos\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}$

$=\frac{2(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=\frac{2}{\sin\theta}=$(右辺)

よって，$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{2}{\sin\theta}$

4　(1)　$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{4}$ の両辺を 2 乗すると，

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{16}$

よって，$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{16}$

したがって，$\sin\theta\cos\theta=\boldsymbol{-\frac{15}{32}}$

(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$

$=\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{15}{32}\right)\right\}=\frac{1}{4}\times\frac{47}{32}=\boldsymbol{\frac{47}{128}}$

(3)　$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\boldsymbol{-\frac{32}{15}}$

5　(1)　$(\sin\theta-\cos\theta)^2$

$=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=2$

θ は第 2 象限の角だから，

$\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$

ゆえに，$\sin\theta-\cos\theta>0$

よって，$\sin\theta-\cos\theta=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

(2)　$\sin^3\theta-\cos^3\theta$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)$

$=\sqrt{2}\left\{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$

$=\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

6　(1)　$\sin\frac{13}{6}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\pi\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(2)　$\cos\frac{19}{3}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{3}+6\pi\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(3)　$\tan\frac{9}{4}\pi=\tan\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)=\tan\frac{\pi}{4}=\boldsymbol{1}$

(4)　$\sin\left(-\frac{17}{4}\pi\right)=-\sin\frac{17}{4}\pi=-\sin\left(\frac{\pi}{4}+4\pi\right)$

$=-\sin\frac{\pi}{4}=\boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$

(5)　$\cos\left(-\frac{9}{2}\pi\right)=\cos\frac{9}{2}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{2}+4\pi\right)$

$=\cos\frac{\pi}{2}=\boldsymbol{0}$

(6)　$\tan\left(-\frac{25}{6}\pi\right)=-\tan\frac{25}{6}\pi=-\tan\left(\frac{\pi}{6}+4\pi\right)$

p.94～95

❶ 指数の拡張

1　(1)　$2^{-1}=\mathbf{\frac{1}{2}}$　　(2)　$5^0=\mathbf{1}$

(3)　$(-3)^{-3}=\frac{1}{(-3)^3}=\frac{1}{-27}=\mathbf{-\frac{1}{27}}$

(4)　$(0.5)^{-4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4}=\frac{1}{\frac{1}{16}}=\mathbf{16}$

(5)　$a^{-3}a^5=a^{-3+5}=\boldsymbol{a^2}$

(6)　$a^{-3}\div a^2=a^{-3-2}=\boldsymbol{a^{-5}}$

(7)　$(a^{-2})^5=a^{-2\times5}=\boldsymbol{a^{-10}}$

(8)　$(a^{-1}b)^{-4}=a^{-1\times(-4)}b^{-4}=\boldsymbol{a^4b^{-4}}$

2　(1)　$\sqrt[6]{1}=\sqrt[6]{1^6}=\mathbf{1}$

(2)　$\sqrt[3]{-125}=\sqrt[3]{(-5)^3}=\mathbf{-5}$

(3)　$\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=\mathbf{3}$

(4)　$(-7)^3=-343$ だから，$\sqrt[3]{-343}=\mathbf{-7}$

(5)　$4^4=256$，$(-4)^4=256$ だから，

$\sqrt[4]{256}=\mathbf{4}$，　$-\sqrt[4]{256}=\mathbf{-4}$

3　(1)　$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{32}=\sqrt[3]{2\times32}=\sqrt[3]{2^6}=\sqrt[3]{4^3}=\mathbf{4}$

(2)　$(\sqrt[4]{36})^2=\sqrt[4]{36^2}=\sqrt[4]{(6^2)^2}=\sqrt[4]{6^4}=\mathbf{6}$

(3)　$\frac{\sqrt[3]{162}}{\sqrt[3]{6}}=\sqrt[3]{\frac{162}{6}}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=\mathbf{3}$

(4)　$\sqrt[4]{\sqrt{256}}=\sqrt[4\times2]{256}=\sqrt[8]{2^8}=\mathbf{2}$

(5)　$\sqrt[6]{125}=\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[2\times3]{5^{1\times3}}=\sqrt[2]{5^1}=\mathbf{\sqrt{5}}$

4　(1)　$32^{\frac{2}{5}}=(\sqrt[5]{32})^2=(\sqrt[5]{2^5})^2=2^2=\mathbf{4}$

(2)　$49^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{49^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{49}}=\mathbf{\frac{1}{7}}$

(3)　$64^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{64^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{(\sqrt[3]{64})^2}=\frac{1}{(\sqrt[3]{4^3})^2}=\frac{1}{4^2}=\mathbf{\frac{1}{16}}$

(4)　$5^{\frac{2}{3}}\div5^{\frac{1}{6}}\times5^{-\frac{1}{2}}=5^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}+\left(-\frac{1}{2}\right)}=5^0=\mathbf{1}$

(5)　$\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{3}=3^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}$

$=3^1=\mathbf{3}$

(6)　$\left\{\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{5}}\right\}^{\frac{5}{6}}=\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{5}\times\frac{5}{6}}=\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3}$

$=\mathbf{\frac{2}{3}}$

(7)　$\sqrt[3]{4}\div\sqrt{8}\times\sqrt[4]{32}=\sqrt[3]{2^2}\div\sqrt{2^3}\times\sqrt[4]{2^5}$

$=2^{\frac{2}{3}}\div2^{\frac{3}{2}}\times2^{\frac{5}{4}}=2^{\frac{2}{3}-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}}=\mathbf{2^{\frac{5}{12}}}$

(8)　$a^2\times(a^{-1})^3\div a^{-2}=a^2\times a^{-3}\div a^{-2}$

$=a^{2+(-3)-(-2)}=a^1=\boldsymbol{a}$

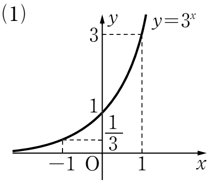
(9)　$(a^{-2}b)^{-\frac{1}{2}}\times a^{-1}b^{\frac{3}{2}}=a^1b^{-\frac{1}{2}}\times a^{-1}b^{\frac{3}{2}}$

$=a^{1+(-1)}b^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}=a^0b^1=1\cdot b=\boldsymbol{b}$

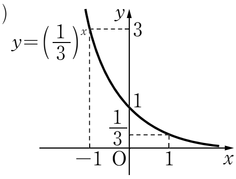
p.96～98

❷ 指数関数

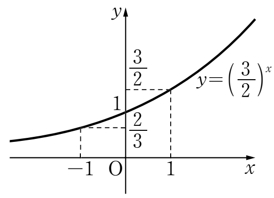
1　(1)



(2)



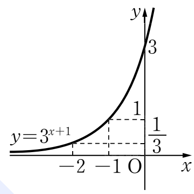
(3)



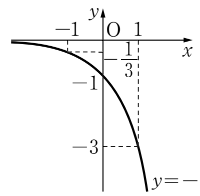
2　(1)　$y=3^{x+1}$ のグラフは，$y=3^x$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したもの。

(2)　$y=-3^x$ のグラフは，$y=3^x$ のグラフを x 軸に関して対称移動したもの。

(1)

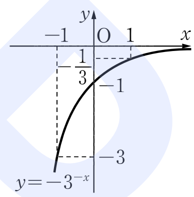


(2)



(3)　$y=-3^{-x}$ のグラフは，$y=3^x$ のグラフを原点に関して対称移動したもの。

(3)



3　(1)　$1=2^0$　$y=2^x$ の底 2 は 1 より大きいから，増加関数である。

$-4<0<\frac{5}{2}$ より，$2^{-4}<2^0<2^{\frac{5}{2}}$

よって，$\mathbf{2^{-4}<1<2^{\frac{5}{2}}}$

(2)　$3=3^1$，$\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{3^2}=3^{\frac{2}{3}}$，$\sqrt[5]{81}=\sqrt[5]{3^4}=3^{\frac{4}{5}}$

$y=3^x$ の底 3 は 1 より大きいから，増加関数である。

$\frac{2}{3}<\frac{4}{5}<1$ より，$3^{\frac{2}{3}}<3^{\frac{4}{5}}<3^1$

よって，$\mathbf{\sqrt[3]{9}<\sqrt[5]{81}<3}$

(3)　$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ の底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから，減少関数である。

$-3<1<\frac{3}{2}$ より，$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}>\left(\frac{1}{2}\right)^1>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$

よって，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}<\dfrac{1}{2}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$

(4)　$\dfrac{1}{9}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$，　$\dfrac{1}{3\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3^3}}=\dfrac{1}{3^{\frac{3}{2}}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$

$y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ の底 $\dfrac{1}{3}$ は 1 より小さいから，減少関数である。

$1<\dfrac{3}{2}<2$ より，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^1>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}>\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$

よって，$\boldsymbol{\dfrac{1}{9}<\dfrac{1}{3\sqrt{3}}<\dfrac{1}{3}}$

4　(1)　方程式を変形すると，$3^{x-1}=3^3$

$x-1=3$ から，$\boldsymbol{x=4}$

(2)　方程式を変形すると，$2^{2x}=2^7$

$2x=7$ から，$\boldsymbol{x=\dfrac{7}{2}}$

(3)　方程式を変形すると，$(4^x)^2+4\cdot4^x-32=0$

$4^x=t$ とおくと，$t^2+4t-32=0$

$(t+8)(t-4)=0$

$t>0$ だから，$t+8>0$

$t-4=0$ から，$t=4$

よって，$4^x=4$

したがって，$\boldsymbol{x=1}$

(4)　方程式を変形すると，$(3^x)^2-2\cdot3\cdot3^x-27=0$

$3^x=t$ とおくと，$t^2-6t-27=0$

$(t-9)(t+3)=0$

$t>0$ だから，$t+3>0$

$t-9=0$ から，$t=9$

よって，$3^x=9$　すなわち，$3^x=3^2$

したがって，$\boldsymbol{x=2}$

5　(1)　不等式を変形すると，$3^x\leqq3^3$

底 3 は 1 より大きいから，$\boldsymbol{x\leqq3}$

(2)　$8^x-2^{x-2}<0$ から，$8^x<2^{x-2}$

この不等式を変形すると，$2^{3x}<2^{x-2}$

底 2 は 1 より大きいから，$3x<x-2$

これを解いて，$\boldsymbol{x<-1}$

(3)　不等式を変形すると，$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2x+1}\geqq\left(\dfrac{1}{5}\right)^{3x}$

底 $\dfrac{1}{5}$ は 1 より小さいから，$2x+1\leqq3x$

これを解いて，$\boldsymbol{x\geqq1}$

6　(1)　底 3 は 1 より大きいから，増加関数である。

したがって，$x=2$ のとき**最大値 3**，

$x=-1$ のとき**最小値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{9}}$

(2)　$3^x=t$ とおくと，

$y=-(3^x)^2+6\cdot3^x=-t^2+6t$

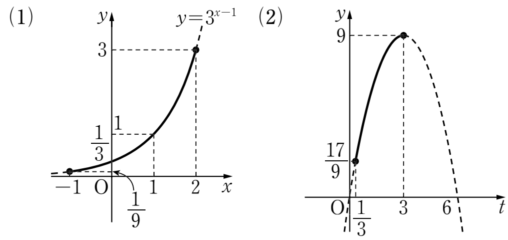
$=-(t-3)^2+9$

$-1\leqq x\leqq1$ のとき，$\dfrac{1}{3}\leqq t\leqq3$　……①

①の範囲で，y は，

$t=3$　すなわち　$x=1$ のとき**最大値 9**，

$t=\dfrac{1}{3}$　すなわち　$x=-1$ のとき**最小値** $\boldsymbol{\dfrac{17}{9}}$



p.99　問題 A

$\boxed{1}$　(1)　$6^0=\boldsymbol{1}$　　(2)　$3^{-1}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

(3)　$(-2)^{-4}=\dfrac{1}{(-2)^4}=\boldsymbol{\dfrac{1}{16}}$

(4)　$(0.2)^{-3}=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-3}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{5}\right)^3}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{125}}=\boldsymbol{125}$

(5)　$a^4a^{-5}=a^{4+(-5)}=a^{-1}=\boldsymbol{\dfrac{1}{a}}$

(6)　$a^3\div a^{-2}=a^{3-(-2)}=\boldsymbol{a^5}$

(7)　$(2a^{-3})^2=2^2\cdot a^{-3\times2}=\boldsymbol{4a^{-6}}$

(8)　$(a^3b^{-1})^3=a^{3\times3}b^{-1\times3}=\boldsymbol{a^9b^{-3}}$

$\boxed{2}$　(1)　$(-2)^3=-8$ だから，$\sqrt[3]{-8}=\boldsymbol{-2}$

(2)　$3^4=81$，$(-3)^4=81$ だから，

$\sqrt[4]{81}=\boldsymbol{3}$，$-\sqrt[4]{81}=\boldsymbol{-3}$

(3)　$\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{(-1)^3}=\boldsymbol{-1}$

(4)　$\sqrt[3]{216}=\sqrt[3]{6^3}=\boldsymbol{6}$

(5)　$\sqrt[4]{625}=\sqrt[4]{5^4}=\boldsymbol{5}$

$\boxed{3}$　(1)　$(\sqrt[4]{7})^8=\sqrt[4]{7^8}=\sqrt[4]{(7^2)^4}=\sqrt[4]{49^4}=\boldsymbol{49}$

(2)　$\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{25}=\sqrt[3]{5\times25}=\sqrt[3]{5^3}=\boldsymbol{5}$

(3)　$\sqrt{\sqrt[3]{729}}=\sqrt[2\times3]{729}=\sqrt[6]{3^6}=\boldsymbol{3}$

(4)　$\dfrac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}=\sqrt[5]{\dfrac{96}{3}}=\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=\boldsymbol{2}$

(5)　$\sqrt[9]{64}=\sqrt[9]{4^3}=\sqrt[3\times3]{4^{1\times3}}=\sqrt[3]{4^1}=\boldsymbol{\sqrt[3]{4}}$

$\boxed{4}$　(1)　$2^{-\frac{1}{3}}\times2^{\frac{3}{2}}\div2^{\frac{1}{6}}=2^{-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-\frac{1}{6}}=2^1=\boldsymbol{2}$

(2)　$\sqrt[3]{25}\div(\sqrt{5})^2\times\sqrt[3]{5^4}=\sqrt[3]{5^2}\div5\times(5^4)^{\frac{1}{3}}$

$=5^{\frac{2}{3}}\div5\times5^{\frac{4}{3}}=5^{\frac{2}{3}-1+\frac{4}{3}}=5^1=\boldsymbol{5}$

(3)　$\sqrt{6}\times\sqrt[4]{54}\div\sqrt[4]{6}=\sqrt{6}\times\sqrt[4]{\dfrac{54}{6}}=\sqrt{6}\times\sqrt[4]{9}$

$=\sqrt{6}\times\sqrt[4]{3^2}=\sqrt{6}\times\sqrt{3}=\boldsymbol{3\sqrt{2}}$

第 6 章　微分と積分

p.112～117　**❶ 微分係数と導関数**

1 (1) $\dfrac{3b-3a}{b-a}=\dfrac{3(b-a)}{b-a}=\mathbf{3}$

(2) $\dfrac{b^2-a^2}{b-a}=\dfrac{(b+a)(b-a)}{b-a}=\boldsymbol{a+b}$

(3) $\dfrac{2(3+h)^2-2\cdot 3^2}{(3+h)-3}=\dfrac{12h+2h^2}{h}=\boldsymbol{12+2h}$

2 (1) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+x)=\mathbf{12}$

(2) $\lim\limits_{h\to 0}(3-2h)=\mathbf{3}$

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4h+h^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(4+h)=\mathbf{4}$

3 (1) $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^2-1^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2h+h^2}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}(2+h)=\mathbf{2}$

(2) $f'(-3)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-3+h)-f(-3)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2(-3+h)^2-2\cdot(-3)^2}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-12h+2h^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(-12+2h)=\mathbf{-12}$

4 (1) $f'(1)=\mathbf{2}$　(2) $f'(-3)=\mathbf{-12}$

5 (1) $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)-x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}1=\mathbf{1}$

(2) $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2xh+h^2}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=\boldsymbol{2x}$

(3) $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{5-5}{h}=\lim\limits_{h\to 0}0=\mathbf{0}$

6 (1) $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2(x+h)-2x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2h}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}2=\mathbf{2}$

(2) $f'(x)$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\{(x+h)^2+(x+h)+1\}-(x^2+x+1)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2x+1)h+h^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\{(2x+1)+h\}$

$=\boldsymbol{2x+1}$

(3) $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\{2(x+h)^3-(x+h)\}-(2x^3-x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(6x^2-1)h+6xh^2+2h^3}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\{(6x^2-1)+6xh+2h^2\}=\boldsymbol{6x^2-1}$

7 (1) $\boldsymbol{y'}=4(x^2)'-(x)'+(3)'=4\cdot 2x-1+0$

$=\boldsymbol{8x-1}$

(2) $\boldsymbol{y'}=(x^3)'-8(x^2)'+(6)'=3x^2-8\cdot 2x+0$

$=\boldsymbol{3x^2-16x}$

(3) $y=3(x^2+x-2)=3x^2+3x-6$

よって，$\boldsymbol{y'}=3(x^2)'+3(x)'-(6)'=\boldsymbol{6x+3}$

(4) $y=x(4x^2-4x+1)=4x^3-4x^2+x$

よって，$\boldsymbol{y'}=4(x^3)'-4(x^2)'+(x)'$

$=\boldsymbol{12x^2-8x+1}$

8 $f(x)=ax^2+bx+c$ とすると，$f'(x)=2ax+b$

$f'(0)=2$ より，$b=2$　……①

$f'(1)=8$ より，$2a+b=8$　……②

$f(1)=4$ より，$a+b+c=4$　……③

①，②から，$a=3$　……④

①，③，④から，$c=-1$

よって，$\boldsymbol{f(x)=3x^2+2x-1}$

9 (1) $\boldsymbol{\dfrac{dV}{dr}}=\dfrac{4}{3}\pi\cdot 3r^2=\boldsymbol{4\pi r^2}$

(2) $\boldsymbol{\dfrac{dh}{dt}}=10-5\cdot 2t=\boldsymbol{10-10t}$

10 (1) $f(x)=x^2-3x$ とすると，$f'(x)=2x-3$

求める接線の傾きは，$f'(1)=2\cdot 1-3=\mathbf{-1}$

(2) 点A$(1,\ -2)$を通り，傾きが-1の直線だから，$y-(-2)=-(x-1)$

すなわち，$\boldsymbol{y=-x-1}$

11 (1) $f(x)=2x^2+3x+1$ とすると，

$f'(x)=4x+3$ より，

$f'(-2)=4(-2)+3=-5$

よって，点$(-2,\ 3)$における接線の方程式は，

$y-3=-5(x+2)$　すなわち，$\boldsymbol{y=-5x-7}$

(2) $f(x)=x^3$ とすると，$f'(x)=3x^2$ より，

$f'(1)=3$　よって，点$(1,\ 1)$における接線の方程式は，$y-1=3(x-1)$

すなわち，$\boldsymbol{y=3x-2}$

12 $f(x)=x^3$ とすると，$f'(x)=3x^2$

接点の x 座標を a とすると，$f'(a)=3a^2=3$

よって，$a=\pm 1$

$f(1)=1$，$f(-1)=-1$ だから，

$a=1$ のとき，接線の方程式は，

$y-1=3(x-1)$　すなわち，$y=3x-2$

$a=-1$ のとき，接線の方程式は，

$y+1=3(x+1)$　すなわち，$y=3x+2$