数学 A

■数学A

●ねらいと特色

本書は，高校の重要科目である数学Aの内容を，基本的な事柄を中心に，じっくり時間をかけて理解することを目標として編集されています。

数学Aは高校数学の土台となる重要な科目であり，その内容をおろそかにしたままでは，あとで学習する上級の科目の理解はおぼつかなくなります。ですから，数学Aの基礎を確実に固めておくことはとても大切なのです。そのためには，基本となる事柄をしっかり把握したうえで，個々の問題の考え方，定理・公式の使い方に慣れることが何よりも大切です。

本書では，各単元の重要な学習項目，新しい学習項目，定理・公式・計算方法などを各項目ごとに例を用いてわかりやすく示したり，例題の考え方や解答を示したりすることで修得が速やかになるように工夫しました。また，理解を確かなものにするために，例や例題のあとでは精選された類題を生徒自身が解くようにしてあります。

さらに，いくつかの関連する項目をまとめて繰り返し問題を解くことで復習が絶えず可能となり，理解が定着できるようにしてあります。

本書を最大限に活用することで，数学Aの基礎力を大いに養ってください。

●構成と使い方

例・**例題**…**例**は，重要な学習項目，新しい学習項目，重要な定理・公式・計算方法などを確実に修得するために設けてあります。
また，**例題**は，新しく学習する項目の基本的かつ最重要な問題です。じっくり時間をかけて読み，理解することが大切です。

類題…**例**や**例題**で学習した考え方，解き方を時間をおかずに自分自身の力で解くことで，理解を確かなものにします。

問題A・B…いくつかの関連する項目をまとめて反復練習します。A問題は類題と同一レベル，B問題はやや発展した問題を収録してあります。

章末問題…各章のまとめの問題です。基本問題・発展問題の2段階構成で，やや程度の高い問題も含まれています。各章の学習の仕上げとしてアタックしてください。

もくじ

第 1 章　場合の数

1　集合の要素の個数

1　集合の要素の個数

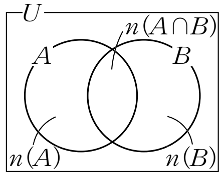
❶　一般に，集合Aの要素の個数を$\boldsymbol{n(A)}$で表す。

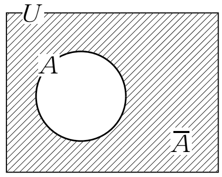
❷　**集合の要素の個数**

全体集合Uの部分集合A，Bに対して，

(1)　$\boldsymbol{n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)}$

(2)　$\boldsymbol{n(\overline{A})=n(U)-n(A)}$





例　全体集合Uの部分集合A，Bについて，$n(U)=50$，$n(A)=27$，$n(A\cap B)=3$，$n(B)=18$であるとき，

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=27+18-3=42$

$n(\overline{A})=n(U)-n(A)=50-27=23$

1　上の例の集合U，A，Bについて，次の個数を求めよ。

(1)　$n(\overline{B})$　　(2)　$n(\overline{A\cup B})$　　(3)　$n(\overline{A}\cup\overline{B})$

2　倍数の個数

例 題　100から200までの整数のうち，３の倍数でない整数はいくつあるか。

考え方　集合の要素の個数を求める問題として考える。

解 答　100から200までの整数の集合をU，そのうち，３の倍数である整数の集合をAとすると，$n(U)=101$，$A=\{3\cdot34,\ 3\cdot35,\ \cdots\cdots,\ 3\cdot66\}$より，$n(A)=33$

３の倍数でない整数の集合は$\overline{A}$だから，

$n(\overline{A})=n(U)-n(A)=101-33=$**68(個)**　答

2　１から100までの整数のうち，次のような数はいくつあるか。

(1)　３の倍数　　(2)　15の倍数

(3)　15との間に，１以外の公約数をもたない数

3　100から200までの整数のうち，次のような数はいくつあるか。

(1)　５の倍数でない整数

(2)　３と５の少なくとも一方で割り切れる整数

(3)　３の倍数でも５の倍数でもない整数

3 集合の応用①

例 題　40人のクラスで生徒の使っている辞書を調べたところ，辞書Aを使っている人は26人，辞書Bを使っている人は17人，辞書Aと辞書Bを両方使っている人は11人であった。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　辞書Aも辞書Bも使っていない人は何人いるか。

(2)　辞書Bだけを使っている人は何人いるか。

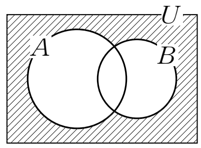
考え方　図をかいて，求める集合を共通部分や和集合で表せるようにする。

解 答　クラスの40人の集合をU，辞書Aを使っている人の集合をA，辞書Bを使っている人の集合をBとすると，$n(U)=40$，$n(A)=26$，$n(B)=17$，$n(A\cap B)=11$である。

(1)　$n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$

$=n(U)-\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}$

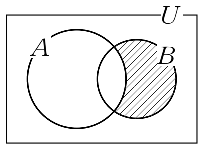
$=40-(26+17-11)=\mathbf{8}$**(人)**　$\boxed{答}$



(2)　辞書Bだけを使っている人の集合は，$\overline{A}\cap B$である。

$n(\overline{A}\cap B)=n(B)-n(A\cap B)$

$=17-11=\mathbf{6}$**(人)**　$\boxed{答}$



4　上の$\boxed{例 題}$において，さらに次の問いに答えよ。

(1)　辞書Aを使っていない人は何人いるか。

(2)　辞書Aか辞書Bのうち，どちらか1冊だけを使っている人は何人いるか。

4 集合の応用②

例 題　Uを全体集合とし，その部分集合をA，Bとする。

$n(U)=100$，$n(A\cup B)=62$，$n(A\cap B)=9$，$n(\overline{A}\cap B)=35$であるとき，次のものを求めよ。

(1)　$n(A\cap\overline{B})$　　　(2)　$n(A)$

考え方　$n(\overline{A}\cap B)+n(A\cap\overline{B})=n(A\cup B)-n(A\cap B)$であることを利用する。

（上の式は，図をかくと確かめることができる。）

解 答　(1)　$n(\overline{A}\cap B)+n(A\cap\overline{B})=n(A\cup B)-n(A\cap B)$より，

$n(A\cap\overline{B})=n(A\cup B)-n(A\cap B)-n(\overline{A}\cap B)$

$=62-9-35=\mathbf{18}$　$\boxed{答}$

(2)　$n(A)=n(A\cap\overline{B})+n(A\cap B)=18+9=\mathbf{27}$　$\boxed{答}$

5　上の$\boxed{例 題}$において，さらに次のものを求めよ。

(1)　$n(B)$　　　(2)　$n(\overline{A}\cap\overline{B})$

２ 場合の数

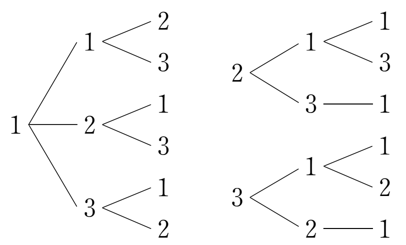
5 樹形図

●起こりうるすべての場合の数を数えるとき，樹形図を用いると便利である。

例　$\boxed{1}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ の４枚のカードから３枚を取り出して１列に並べるとき，並べ方の総数を調べてみよう。

右の樹形図のように場合分けされて，次の12通りがある。

112，113，121，123，131，132，
211，213，231，311，312，321



1　次の５個の文字から３個を選んで並べる場合をすべて求めよ。

(1)　a，a，a，b，b　　(2)　a，a，a，b，c

2　大中小３個のさいころを投げるとき，次の場合は何通りあるか。

(1)　目の和が５　　(2)　目の和が７

6 和の法則

●**和の法則**

事柄A，Bは同時には起こらないとする。Aの起こり方がm通り，Bの起こり方がn通りとすると，AまたはBのどちらかが起こる場合は，$\boldsymbol{m+n}$通りある。

例　大小２個のさいころを同時に投げるとき，目の和が６の倍数になる場合の数を求めてみよう。

［1］　目の和が６
　右の表から，５通り

大	1	2	3	4	5
小	5	4	3	2	1

［2］　目の和が12　　(6，6)の１通り

［1］，［2］から，和の法則により，$5+1=6$（通り）⟵［1］，［2］は同時に起こらない。

3　大小２個のさいころを投げるとき，次の場合は何通りあるか。

(1)　目の和が５の倍数　　(2)　目の和が３の倍数

(3)　目の和が10以上　　(4)　目の和が４または５

7 積の法則

●積の法則

事柄Aの起こり方がm通りあり，そのおのおのの場合について事柄Bの起こり方がn通りあるとすると，A，Bがともに起こる場合は，$\boldsymbol{m \times n}$通りある。

例　(1)　5種類の国語辞典，10種類の英和辞典の中から，それぞれ1種類ずつ選んで，計2冊の組を作る方法は，
国語辞典の選び方の1通りに対して，英和辞典の選び方は10通りずつある。
積の法則により，$5 \times 10 = 50$(通り)

(2)　$(a+b+c+d)(x+y)$ を展開したときの項の個数は，
aについて，ax，ayの2つの項があり，b，c，dについても同様だから，
積の法則により，$4 \times 2 = 8$(通り)

4　生徒Aの家から生徒Bの家まで4通りの道があり，生徒Bの家から学校まで3通りの道があるとき，生徒Aの家から生徒Bの家に寄って学校に行く方法は何通りあるか。

5　次の式を展開した式の項の個数を求めよ。

(1)　$(a+b+c)(x+y+z)$　　(2)　$(a+b)(p+q)(x+y)$

6　大中小3個のさいころを投げるとき，出る目について，次の場合は何通りあるか。

(1)　すべての場合　　(2)　すべて異なる場合

8 約数の個数

例題　200の正の約数は何個あるか。

考え方　200を素因数分解すると，$200 = 2^3 \cdot 5^2$ となるから，200の正の約数は，2^3 の約数と5^2の約数の積の形で表される。したがって，2^3の約数の個数と5^2の約数の個数の積を求めればよい。約数には1とその数自身を含むことに注意する。

解答　200を素因数分解すると，$200 = 2^3 \cdot 5^2$　←― まず素因数分解をする。
2^3の正の約数は，1，2，2^2，2^3の4通り　←― $(3+1)$通り
5^2の正の約数は，1，5，5^2の3通り　←― $(2+1)$通り
よって，求める個数は，積の法則により，
$4 \times 3 = \mathbf{12}$**(個)**　答

7　次の数の正の約数は何個あるか。

(1)　24　　(2)　27　　(3)　108

3 順列

9 順列

❶　いくつかのものを，順序をつけて1列に並べた配列を**順列**という。

例　a，b，c から2個を取って並べた順列は，ab，ac，ba，bc，ca，cb

❷　n 個の異なるものから r 個を取り出して1列に並べた順列を，**n 個から r 個取る順列**といい，その総数を ${}_n\mathrm{P}_r$ で表す。

1番目	2番目	3番目	………	r 番目
$\square$	$\square$	$\square$		$\square$
n 通り	$(n-1)$ 通り	$(n-2)$ 通り		$\{n-(r-1)\}$ 通り $= n-r+1$

積の法則により，$\boldsymbol{{}_n\mathrm{P}_r=\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots(n-r+1)}_{r\text{ 個の積}}}$

例　5人から3人選んで1列に並べる順列の総数は，${}_5\mathrm{P}_3=5\cdot4\cdot3=60$（通り）

1　次の値を求めよ。

(1)　${}_9\mathrm{P}_2$　(2)　${}_7\mathrm{P}_3$　(3)　${}_5\mathrm{P}_4$　(4)　${}_6\mathrm{P}_1$

2　次の順列の総数を求めよ。

(1)　1から9までの数字から3個取って1列に並べる順列

(2)　a，b，c，d，e，f の6個の文字から4個取って1列に並べる順列

10 n の階乗

❶　${}_n\mathrm{P}_r$ の式で，とくに，$n=r$ のとき，1から n までのすべての自然数の積となる。これを n の**階乗**といい，$\boldsymbol{n!}$ で表す。

$$\boldsymbol{n!={}_n\mathrm{P}_n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1}$$

例　a，b，c，d の4個の文字全部を1列に並べる順列の総数は，
　$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$（通り）

❷　${}_n\mathrm{P}_r$ の式を階乗の記号を用いて表すと，$\boldsymbol{{}_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}}$　　$0!=1$ と定める。

3　次の順列の総数を求めよ。

(1)　1から5までの5個の数字全部を1列に並べてできる5桁の整数の個数

(2)　7人を1列に並べてできる順列

11 順列の利用

例 題　8人の委員の中から，委員長，副委員長，書記を各1人ずつ選ぶ方法は何通りあるか。ただし，兼任は認めないものとする。

考え方　8人の中から3人を選んで，委員長，副委員長，書記の順に並べると考える。

解 答　8人から3人を選んで並べる順列の総数と考えられるから，

$_8P_3=8\cdot7\cdot6=$**336(通り)**　答

4　12の駅がある鉄道で，発駅，着駅を書いた切符をつくるとき，切符の種類は何通りあるか。

5　10人の候補選手の中から，リレーの第1走者から第4走者までを選ぶとき，4人の走者の選び方は何通りあるか。

12 0を含む数字の順列

例 題　5個の数字0，1，2，3，4がある。この中の異なる数字を使ってできる次のような整数は何個あるか。

(1)　3桁の整数　　　(2)　3桁の奇数

考え方　百の位に0が使えないことに注意する。

解 答　(1)　百の位の数字は1，2，3，4の中から選ぶので，4通り

十の位，一の位は残りの4個の数字から2個を取って並べる方法で $_4P_2$ 通り

よって，求める3桁の整数の個数は，

$4\times{}_4P_2=4\times4\cdot3=$**48(個)**　答

別解　0，1，2，3，4の5個の数字から3個取って並べる方法は，$_5P_3$ 通りで，このうち，0が百の位となるのは残り4個から2個を取る順列となるから，

$_5P_3-{}_4P_2=5\cdot4\cdot3-4\cdot3=60-12=48$(個)

(2)　一の位が奇数となるのは，1か3の2通りで，百の位は3個のうちから1個選び，十の位を残り3個のうちから1個選ぶ場合だから，

$2\times3\times3=$**18(個)**　答

別解　一の位が1か3のとき，百の位と十の位の並べ方は $_4P_2-{}_3P_1$ 通りだから，

$2\times({}_4P_2-{}_3P_1)=2\times(4\cdot3-3)=2\times9=18$(個)

6　上の 例 題 において，さらに次のような整数は何個できるか。

(1)　4桁の整数　　　(2)　4桁の偶数

(3)　5桁の整数　　　(4)　5桁の5の倍数

13 条件付きの並び方

例　題　男子4人と女子3人が1列に並ぶとき，次のような並び方は，それぞれ何通りあるか。

(1)　両端に男子が並ぶ。　　(2)　女子3人が隣り合うように並ぶ。

考え方　並び方に決まりのある部分は別に考えて，積の法則により求める。

(1)　まず，男子2人の両端の並び方を求め，そのおのおのに対する残り5人の並び方を考える。

男　残り　5人　男

(2)　女子3人をひとまとめにする。まず，女子のひとまとめと男子4人の並び方を求め，そのおのおのに対する女子3人の並び方を考える。

男　男　男　男　女　女　女

解　答　(1)　両端の男子の並び方は，${}_4P_2$ 通りある。
間に並ぶ残り5人の並び方は，5! 通りある。
よって，並び方の総数は，積の法則により，
${}_4P_2 \times 5! = 4\cdot 3\times 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 =$ **1440（通り）**　答

(2)　女子3人のひとまとめと男子4人の並び方は，5! 通りある。
このおのおのに対する女子3人の並び方が 3! 通りある。
よって，並び方の総数は，積の法則により，
$5!\times 3! =$ **720（通り）**　答

7　上の 例　題 において，さらに次のような並び方は，それぞれ何通りあるか。

(1)　両端に女子が並ぶ。　　(2)　男子4人が隣り合うように並ぶ。

(3)　中央に女子3人が並び，左右に男子が2人ずつ並ぶ。

8　A，Bを含む5人が1列に並ぶとき，次のような並び方は，それぞれ何通りあるか。

(1)　Aが中央に並ぶ。　　(2)　A，Bが両端に並ぶ。

(3)　A，Bが隣り合うように並ぶ。　　(4)　A，Bが隣り合わないように並ぶ。

9　男子3人と女子3人が1列に並ぶとき，次のような並び方は，それぞれ何通りあるか。

(1)　男子3人，女子3人それぞれ隣り合うように並ぶ。

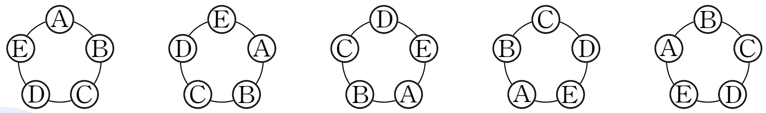
(2)　女子が隣り合わないように並ぶ。

(3)　男子と女子が交互に並ぶ。

14 円順列

❶　いくつかのものを円形に並べたものを**円順列**という。

例　A，B，C，D，Eの5人が手をつないで輪をつくるとき



上のように回転して同じ順序になるものは，同じものと考える。

この円順列の総数は，$\dfrac{{}_5\mathrm{P}_5}{5}=\dfrac{5!}{5}=4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$(通り)

❷　n 個のものを円形に並べてできる円順列の総数は，$\boldsymbol{(n-1)!}$ 通り

10　両親と4人の子どもが円形のテーブルに着席するとき，次の問いに答えよ。

(1)　6人が着席する方法は何通りあるか。

(2)　両親が向かい合うように着席する方法は何通りあるか。

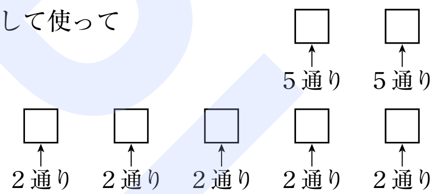
(3)　両親が隣り合うように着席する方法は何通りあるか。

15 重複順列

●　n 個の異なるものから重複を許して r 個取って並べる順列を，n 個から r 個取る**重複順列**という。n 個から r 個取る重複順列の総数は，$\boldsymbol{n^r}$ 通り

例　①　5個の数字1，2，3，4，5を重複を許して使ってできる2桁の数の個数は，$5^2=25$(通り)

②　2個の数字1，2を重複を許して使ってできる5桁の数の個数は，$2^5=32$(通り)



11　次のような整数は何個あるか。ただし，数字は重複して使ってよい。

(1)　4個の数字1，2，3，4を使ってできる3桁の整数

(2)　3個の数字1，2，3を使ってできる4桁の整数

12　4人でじゃんけんをするとき，手の出し方は何通りあるか。

13　記号○，×，△，□を重複を許して並べる順列を作る。次のような順列の総数を求めよ。

(1)　合計3個の記号を並べる順列の総数

(2)　1個以上3個以下の記号を並べる順列の総数

問題 A

1 **［集合の要素の個数］** 集合Uの部分集合A, Bについて, $n(U)=50$, $n(A)=20$, $n(B)=15$, $n(A\cup B)=28$ であるとき, 次の値を求めよ。

(1) $n(A\cap B)$　　(2) $n(\overline{A})$　　(3) $n(\overline{A}\cap\overline{B})$

2 **［樹形図］** 8を3個の自然数の和で表す方法をすべて求めよ。ただし, 加える順序は考えず, また, 同じ数が含まれてもよいものとする。

3 **［和の法則・積の法則］** 次の問いに答えよ。

(1) 大小2個のさいころを投げるとき, 目の和が8または9になる場合は何通りあるか。

(2) 男子5人, 女子4人の中から, 男女1人ずつ委員を選ぶとき, 選び方は何通りあるか。

4 **［約数の個数］** 次の数の正の約数は何個あるか。

(1) 32　　(2) 135　　(3) 400

5 **［$_n\mathrm{P}_r$, nの階乗］** 次の値を求めよ。

(1) $_6\mathrm{P}_3$　　(2) $_8\mathrm{P}_2$　　(3) $3!+4!$　　(4) $\dfrac{8!}{5!}$

6 **［順列の利用］** 4個の数字1, 2, 3, 4がある。この中の異なる数字を使ってできる次のような整数は何個あるか。

(1) 3桁の整数　　(2) 4桁の整数

(3) 3000より大きい4桁の整数

7 **［円順列］** 男子2人と女子5人が円形のテーブルに着席するとき, 次の問いに答えよ。

(1) 7人が着席する方法は何通りあるか。

(2) 男子2人が隣り合うように着席する方法は何通りあるか。

8 **［重複順列］** 次のような整数は何個あるか。ただし, 数字は重複して使ってよい。

(1) 4個の数字1, 2, 3, 4を使ってできる4桁の奇数

(2) 4個の数字0, 1, 2, 3を使ってできる4桁の整数

問題 B

1　1から100までの整数のうち，次のような数の個数を求めよ。

(1)　3または5で割り切れる数

(2)　4で割り切れないかまたは6で割り切れない数

2　60人の生徒に数学と英語の試験を行ったところ，数学の合格者は50人，英語の合格者は30人，2科目とも不合格であった人は8人であった。2科目とも合格した人は何人か。

3　大小2個のさいころを投げるとき，次のようになる場合は何通りあるか。

(1)　目の積が奇数　　(2)　目の積が偶数

(3)　目の和が偶数　　(4)　目の和が奇数

4　次の数の正の約数は何個あるか。

(1)　30　　(2)　360　　(3)　1008

5　7個の数字0，1，2，3，4，5，6がある。この中の異なる数字を使ってできる次のような整数は何個あるか。

(1)　4桁の整数　　(2)　3桁の奇数

(3)　3桁の5の倍数　　(4)　両端が奇数である6桁の整数

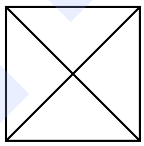
6　A，B，C，D，E，Fの6文字すべてを並べるとき，次のような並べ方は何通りあるか。

(1)　AとBが隣り合わないように1列に並べる。

(2)　AとBの間に他の文字が1個だけはいるように1列に並べる。

(3)　A，B，Cが隣り合うように円形に並べる。

7　右の図は，正方形を2つの対角線で4等分したものである。赤，青，黄，緑の4色全部を使って，4つの部分を色分けする方法は何通りあるか。ただし，回転させて一致する場合は同じものと考える。



8　文字a，b，c，d，eの集合$\{a, b, c, d, e\}$について，次の問いに答えよ。

(1)　部分集合の総数を求めよ。　　(2)　a，bを含む部分集合の総数を求めよ。

章末問題

基本問題

1　１から100までの自然数のうち，次のような数はいくつあるか。

(1)　35で割り切れる数　　(2)　35との間に，１以外の公約数をもたない数

2　ある地区に住む住人100人のうち，75人がＡ新聞を，50人がＢ新聞を購読していた。Ａ新聞とＢ新聞を両方とも購読している人は30人であった。このとき，両方とも購読していない人は何人いるか。

3　数字１，２，３，４を使って３桁の自然数を作るとき，次の場合は何個できるか。

(1)　数字の重複を許さない場合　　(2)　数字の重複を許す場合

4　６個の数字０，１，２，３，４，５がある。この中の異なる数字を使ってできる次のような整数は何個あるか。

(1)　３桁の奇数　　(2)　410以上の３桁の数

5　男子４人，女子４人がいるとき，次のような場合は何通りあるか。

(1)　両端に男子が並んで１列に並ぶ。　　(2)　女子４人が隣り合って１列に並ぶ。

(3)　８人が円形に並ぶ。　　(4)　男女が交互に円形に並ぶ。

(5)　全体から５人を選ぶ。　　(6)　男女各２人ずつ選ぶ。

(7)　男女１人ずつの組を４組作る。　　(8)　２人ずつ４組に分ける。

6　平面上の８本の直線が，どの２直線も平行でなく，どの３本の直線も１点では交わらないとき，次の問いに答えよ。

(1)　交点はいくつあるか。　　(2)　いくつの三角形ができるか。

7　立方体の６つの面を，赤，白，黒，緑，黄，青の６色で塗り分けるとき，異なるものは全部で何通りできるか。

発展問題

8 集合A，Bについて，$n(A)+n(B)=10$，$n(A\cup B)=7$ であるとき，$n(\overline{A}\cap B)+n(A\cap\overline{B})$ の値を求めよ。

9 100から200までの自然数のうち，次のような数はいくつあるか。

(1) 6で割り切れる数　　(2) 5で割ると余りが2にならない数

10 等式$x+2y+3z=12$を満たす自然数の組$(x,\ y,\ z)$は何組あるか。

11 次の問いに答えよ。

(1) 10円，50円，100円の硬貨を使って，200円を支払う方法は何通りあるか。ただし，使わない硬貨があってもよいものとする。

(2) 10円硬貨4枚，100円硬貨3枚，500円硬貨3枚がある。これらの全部または少なくとも1枚を使って，何通りの金額をちょうど支払うことができるか。

12 次の式を満たす自然数nの値を求めよ。

(1) ${}_{n}\mathrm{P}_{2}=56$　　(2) ${}_{n}\mathrm{C}_{2}=21$

13 A，B，C，D，Eの5文字を用いてできる120個の順列をABCDEからEDCBAまで辞書式に並べるとき，次の問いに答えよ。

(1) BECDAは何番目になるか。　　(2) 70番目にくる順列を書け。

14 赤玉4個，青玉3個，白玉2個を次のように並べるとき，何通りの並べ方があるか。

(1) 9個全部を1列に並べる。　　(2) 8個を取り出して1列に並べる。

15 0，1，1，1，2，2，3の7個全部を使って7桁の整数を作るとき，次の問いに答えよ。

(1) 全部で何通りできるか。　　(2) 偶数は何通りできるか。

第2章 確率

1 事象と確率

1 試行と事象

❶ 「さいころを投げる」などのように，同じ状態のもとで繰り返すことのできる実験や観察を**試行**といい，試行の結果として起きる事柄を**事象**という。

❷ ある試行の結果において，これ以上細かく分けることのできない事象を**根元事象**という。また，根元事象の全体からなる事象を**全事象**という。

例　1つのさいころを投げる試行において，

根元事象は，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{4\}$，$\{5\}$，$\{6\}$ ⟵ 事象は集合の形で表す。

全事象は，$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$，偶数の目が出る事象は，$\{2,\ 4,\ 6\}$

例　白玉3個，赤玉2個が入った袋から2個を同時に取り出す試行において，3個の白玉をa_1，a_2，a_3，2個の赤玉をb_1，b_2で表して，たとえば，a_1，a_2を取り出すことを$(a_1,\ a_2)$と表すものとするとき，

根元事象は，$\{(a_1,\ a_2)\}$，$\{(a_1,\ a_3)\}$，$\{(a_2,\ a_3)\}$，$\{(a_1,\ b_1)\}$，$\{(a_1,\ b_2)\}$，
$\{(a_2,\ b_1)\}$，$\{(a_2,\ b_2)\}$，$\{(a_3,\ b_1)\}$，$\{(a_3,\ b_2)\}$，$\{(b_1,\ b_2)\}$

1　10円硬貨1枚と100円硬貨1枚の2枚の硬貨を投げる試行において，表が出ることを1，裏が出ることを0で表し，10円が裏，100円が表が出ることを$(0,\ 1)$のように書くものとする。このとき，すべての根元事象を書き表せ。

2 さいころと確率①

❶ ある試行において，どの根元事象が起こることも同程度に期待できるとき，これらの根元事象は**同様に確からしい**という。

❷ 試行の根元事象のうち，どれが起こることも同様に確からしいとき，

$n(U)$：全事象Uに属する根元事象の数　　$n(A)$：事象Aに属する根元事象の数として，事象Aの起こる確率$P(A)$を次のように定める。

$$\boldsymbol{P(A)=\frac{n(A)}{n(U)}=\frac{\text{事象}A\text{の起こる場合の数}}{\text{起こりうるすべての場合の数}}}$$

例　1個のさいころを投げるとき，6の約数の目が出る確率は

全事象をU，6の約数の目が出るという事象をAとすると，

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$，$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$より，$n(U)=6$，$n(A)=4$

よって，$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(U)}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

2　1個のさいころを投げるとき，次の場合の確率を求めよ。

(1)　奇数の目が出る。　　(2)　3の目が出る。

(3)　3以下の目が出る。　　(4)　素数の目が出る。

3 さいころと確率②

例 題　2個のさいころを同時に投げるとき，出る目の和が4以下になる確率を求めよ。

考え方　まず，全事象Uの根元事象の数$n(U)$，すなわち，起こりうるすべての場合の数を求める。

解 答　2個のさいころを同時に投げるときの目の出方は，$6\times6=36$(通り)

このうち，目の和が4以下になる場合は，

(1，1)，(1，2)，(1，3)，(2，1)，(2，2)，(3，1)

の6通りである。

よって，求める確率は，$\dfrac{6}{36}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$ 答

	1	2	3	4	5	6
1	○	○	○			
2	○	○				
3	○					
4						
5						
6						

3　2個のさいころを同時に投げるとき，次の場合の確率を求めよ。

(1)　目の和が5になる。　　(2)　2個とも同じ目が出る。

(3)　目の和が偶数になる。　　(4)　目の積が5の倍数になる。

4 硬貨と確率

例 題　3枚の硬貨を同時に投げるとき，そのうち1枚だけ表が出る確率を求めよ。

考え方　1枚について，表，裏の2通りの出方がある。

解 答　3枚の硬貨に，それぞれ表，裏の2通りの出方がある。

よって，起こりうるすべての場合の数は，$2\times2\times2=8$(通り)

このうち，1枚だけ表が出る場合は，

(表，裏，裏)，(裏，表，裏)，(裏，裏，表)の3通りである。

よって，求める確率は，$\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}$ 答

4　3枚の硬貨を同時に投げるとき，次の場合の確率を求めよ。

(1)　3枚とも表が出る。　　(2)　1枚だけ裏が出る。

5 順列と確率

例題　A，B，C，D，Eの５文字を１列に並べるとき，AとBが隣り合う確率を求めよ。

考え方　分母と分子を順列の計算により求める。

○ $\boxed{AB}$ ○ ○
○ $\boxed{BA}$ ○ ○

解答　５文字の並べ方は，全部で，5! 通りある。
AとBが隣り合う場合の数は，2×4! 通りある。
よって，求める確率は，$\underline{\dfrac{2\times4!}{5!}}=\dfrac{2\times4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\boldsymbol{\dfrac{2}{5}}$ 答
約分のしやすい形にする。

5　A，B，C，D，Eの５文字を１列に並べるとき，次の確率を求めよ。
(1)　まん中にAがくる確率　　(2)　両端がA，Bになる確率
(3)　A，B，Cの３文字が隣り合う確率

6　5，6，7，8，9の５個の数字から異なる３個を選んで，３桁の整数をつくるとき，次のような整数ができる確率を求めよ。
(1)　奇数である確率　　(2)　900以上の数である確率

6 組合せと確率①

例題　白玉６個，赤玉２個が入っている袋から，よくかき混ぜて２個を同時に取り出すとき，次の確率を求めよ。
(1)　２個とも白玉である確率　　(2)　白玉と赤玉が１個ずつである確率

考え方　「選ぶ」あるいは「取り出す」場合の数は，組合せで求める。同じ色の玉でも区別して考える。

解答　８個の玉から２個の玉の取り出し方は${}_8C_2$通りである。
(1)　２個とも白玉である場合は${}_6C_2$通りより，求める確率は，$\dfrac{{}_6C_2}{{}_8C_2}=\boldsymbol{\dfrac{15}{28}}$ 答
(2)　白玉と赤玉が１個ずつである場合は${}_6C_1\times{}_2C_1$通りより，
求める確率は，$\dfrac{{}_6C_1\times{}_2C_1}{{}_8C_2}=\boldsymbol{\dfrac{3}{7}}$ 答

7　白玉５個，赤玉４個が入っている袋から，よくかき混ぜて３個を同時に取り出すとき，次の確率を求めよ。
(1)　３個とも赤玉である確率　　(2)　３個とも白玉である確率
(3)　白玉１個と赤玉２個である確率　　(4)　白玉２個と赤玉１個である確率

7 組合せと確率②

例 題　10本のくじの中に当たりくじが４本入っている。このくじを同時に３本引くとき，次の場合の確率を求めよ。

(1)　３本とも当たりくじである。　　(2)　２本だけ当たりくじである。

考え方　10本のくじの中に，当たりくじが４本，はずれくじが６本ある。「３本の引き方」は，３本の選び方となる。

解 答　10本のくじから３本のくじの引き方は，${}_{10}C_3$通りである。

(1)　３本とも当たりくじとなる場合は，${}_{4}C_3$通りある。

よって，求める確率は，$\dfrac{{}_{4}C_3}{{}_{10}C_3}=\dfrac{4}{120}=\mathbf{\dfrac{1}{30}}$ 答

(2)　２本だけ当たる場合は，${}_{4}C_2\times{}_{6}C_1$ 通りある。

よって，求める確率は，$\dfrac{{}_{4}C_2\times{}_{6}C_1}{{}_{10}C_3}=\dfrac{6\times6}{120}=\mathbf{\dfrac{3}{10}}$ 答

8　16本のくじの中に当たりくじが５本入っている。このくじを同時に３本引くとき，次の場合の確率を求めよ。

(1)　３本ともはずれくじである。　　(2)　１本だけ当たりくじである。

8 組合せと確率③

例 題　男子８人，女子３人の中から３人の委員を選ぶとき，次の場合の確率を求めよ。

(1)　男子２人，女子１人が選ばれる。

(2)　特定の男子A，Bの２人を含んで３人を選ぶ。

考え方　(1)　男子２人，女子１人の選び方は積の法則による。

(2)　A，B以外の９人から残り１人を選ぶ。

解 答　11人から３人の委員の選び方は，${}_{11}C_3$通りである。

(1)　男子２人，女子１人の選び方は，${}_{8}C_2\times{}_{3}C_1$ 通りである。

よって，求める確率は，$\dfrac{{}_{8}C_2\times{}_{3}C_1}{{}_{11}C_3}=\dfrac{28\times3}{165}=\mathbf{\dfrac{28}{55}}$ 答

(2)　A，B以外のもう１人の選び方は，${}_{9}C_1$通りある。

よって，求める確率は，$\dfrac{{}_{9}C_1}{{}_{11}C_3}=\dfrac{9}{165}=\mathbf{\dfrac{3}{55}}$ 答

9　上の 例 題 について，さらに，次の場合の確率を求めよ。

(1)　男子だけ３人が選ばれる。　　(2)　男子１人，女子２人が選ばれる。

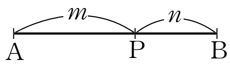
(3)　11人の中の特定のA，B，C，D，Eから３人が選ばれる。

第3章　図形の性質

1　三角形の辺の比

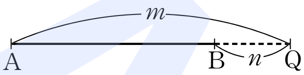
1　内分と外分

❶　線分AB上の点Pが，AP：PB$=m:n$（m，nは正の数）を満たすとき，PはABを$m:n$に**内分する**という。

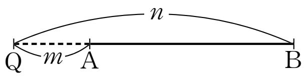


❷　線分ABの延長上に点Qがあり，AQ：QB$=m:n$（m，nは異なる正の数）を満たすとき，QはABを$m:n$に**外分する**という。

・$m>n$



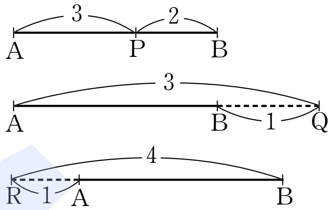
・$m<n$



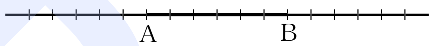
例　(1)　ABを3：2に内分する点P

(2)　ABを3：1に外分する点Q

(3)　ABを1：4に外分する点R

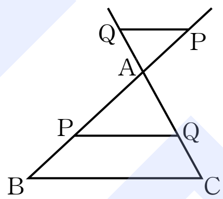


1　右の図で，線分ABを1：2に内分する点P，4：1に外分する点Q，1：3に外分する点Rをそれぞれ示せ。



2　三角形と平行線の性質

●△ABCの辺AB，AC上又は，辺AB，ACをAの方向に延長した直線上にそれぞれ点P，Qがあるとき，次のことが成り立つ。



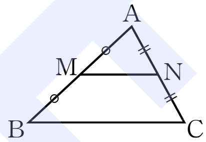
［1］　**PQ∥BC ⟺ AP：AB＝AQ：AC**

［2］　**PQ∥BC ⟺ AP：PB＝AQ：QC**

［3］　**PQ∥BC ⟹ AP：AB＝PQ：BC**　（逆は成り立たない。）

例　特に，△ABCの辺AB，ACの中点をそれぞれM，Nとすると，

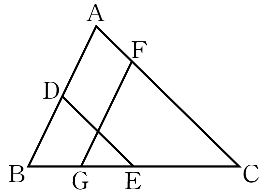
［2］より，MN∥BC　更に，［3］より，MN$=\frac{1}{2}$BC（中点連結定理）



2　右の図の△ABCにおいて，AD：DB＝1：1，AF：FC＝1：3，AB∥FG，AC∥DEであるとき，次の線分の比を求めよ。

(1)　BE：EC　　(2)　BG：GC

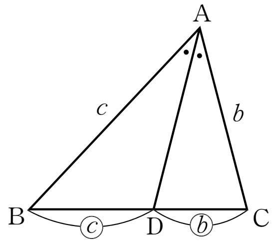
(3)　BC：GE



3 三角形の角の二等分線と比

●△ABCの∠Aの二等分線と辺BCとの交点をDとするとき，
次のことが成り立つ。

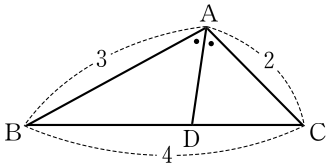
BD：DC＝AB：AC



例　AB＝3，BC＝4，CA＝2の△ABCにおいて，
ADが∠Aの二等分線であるとき，

(1)　BD：DC＝AB：AC
＝3：2

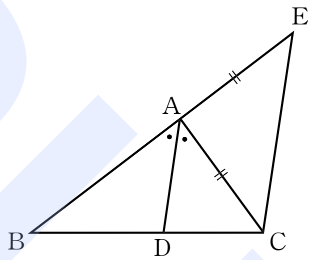
(2)　$BD=4\times\frac{3}{3+2}$
$=\frac{12}{5}$



注　△ABCの∠A，∠B，∠Cに向かい合う辺BC，CA，ABの長さを，それぞれa，b，cで表す。また，向かい合う辺のことを**対辺**ということもある。

3　△ABCの∠Aの二等分線と辺BCの交点をDとするとき，BD：DC＝AB：ACが成り立つことを，次のように証明した。□にあてはまるものを記入せよ。

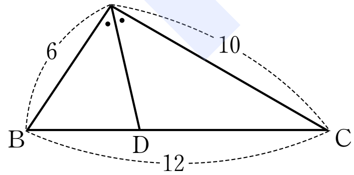
〔証明〕
△ABCにおいて，辺BAの延長上にAE＝ACとなる点Eをとると，
△ACEは二等辺三角形であるから，
∠ACE＝(1)
∠BACは△ACEの外角であるから，
∠BAC＝∠ACE＋∠AEC＝2(2)
また，∠BAC＝∠BAD＋∠CAD＝2∠CAD
よって，∠ACE＝∠CAD
(3)が等しいから，AD∥EC
したがって，BD：(4)＝(5)：AE
AE＝ACであるから，BD：DC＝AB：AC



4　AB＝6，BC＝12，CA＝10である△ABCにおいて，∠Aの二等分線と辺BCの交点をDとする。次のものを求めよ。

(1)　BD：DC

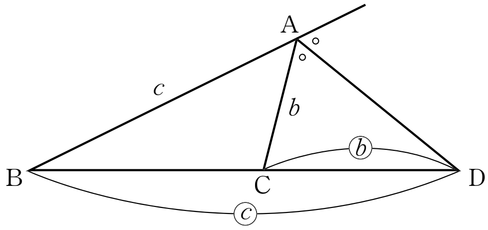
(2)　BDの長さ



4 三角形の外角の二等分線と比

●AB≠AC である△ABCの∠Aの外角の二等分線と辺BCの延長との交点をDとするとき，次のことが成り立つ。

BD：DC＝AB：AC

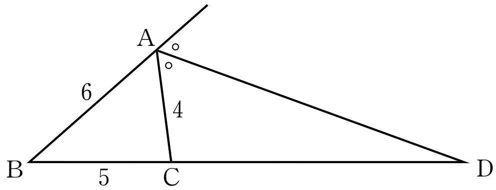


例　AB＝6，BC＝5，CA＝4 の△ABCにおいて，ADが∠Aの外角の二等分線であるとき，

(1)　BD：DC＝AB：AC
　　　　＝6：4
　　　　＝3：2

(2)　BD：BC＝3：(3－2)
　　　　＝3：1

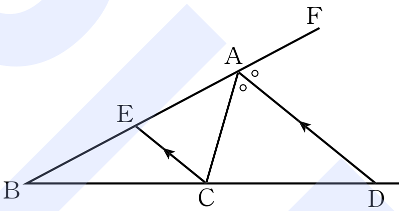
(3)　BD＝3BC＝3×5＝15



注　AB＝AC である△ABCでは，∠Aの外角の二等分線は辺BCに平行になる。

5　AB＞AC である△ABCの∠Aの外角の二等分線と辺BCの延長との交点をDとするとき，BD：DC＝AB：AC が成り立つことを次のように証明した。□にあてはまるものを記入せよ。

〔証明〕
△ABCにおいて，辺BAの延長上に点Fをとる。
∠FACの二等分線とBCの延長との交点をDとすると，
∠CAD＝［(1)］　……①
Cを通りADに平行な直線と辺ABとの交点をEとすると，AD∥EC であるから，
∠CAD＝［(2)］(錯角)　……②
∠FAD＝∠AEC(［(3)］)　……③
①，②，③から，∠ACE＝∠AEC
よって，［(4)］＝［(5)］
したがって，BD：DC＝BA：AE＝AB：AC



6　AB＝8，BC＝6，CA＝4 である△ABCの∠Aの外角の二等分線と辺BCの延長との交点をDとする。次のものを求めよ。

(1)　BD：DC　　　(2)　BD：BC　　　(3)　BDの長さ

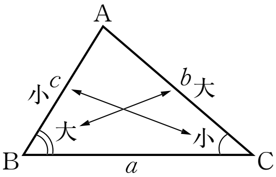
5 三角形の辺と角の大小関係

● △ABCにおいて，次のことが成り立つ。

$\angle \mathrm{B} > \angle \mathrm{C} \Longleftrightarrow b > c$

$\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{C} \Longleftrightarrow b = c$

$\angle \mathrm{B} < \angle \mathrm{C} \Longleftrightarrow b < c$

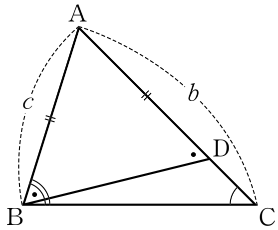


例　AB＝2，BC＝3，CA＝4 である△ABCの 3 つの角の大小関係を調べる。
AB＜BC より，∠C＜∠A　　BC＜CA より，∠A＜∠B
よって，∠C＜∠A＜∠B

例　∠A＝80°，∠B＝60°，∠C＝40° である△ABCの 3 辺の大小関係を調べる。
∠C＜∠B より，AB＜CA　　∠B＜∠A より，CA＜BC
よって，AB＜CA＜BC

7　△ABCにおいて，$b>c$ ならば ∠B＞∠C が成り立つことを証明した。次の□にあてはまるものを記入せよ。

〔証明〕
△ABCにおいて，$b>c$ とすると，辺AC上に AD＝AB となる点Dがとれる。
△ABDは二等辺三角形であるから，∠ABD＝$\boxed{(1)}$ ……①
∠B＝∠ABD＋$\boxed{(2)}$ より，∠B＞∠ABD ……②
また，∠ADB＝$\boxed{(2)}$＋∠C より，∠ADB＞∠C ……③
①，②，③より，∠B＞∠C
よって，$\boxed{(3)}$ ならば $\boxed{(4)}$ が成り立つ。



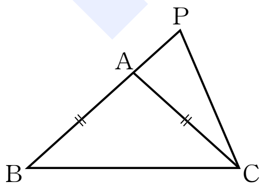
8　次の△ABCにおいて，3 つの角の大小関係を調べよ。

(1)　AB＝4，BC＝6，CA＝5
(2)　AB＝11，BC＝7，CA＝7
(3)　∠B＝90°，AB＝1，BC＝$\sqrt{3}$
(4)　BC＝2，CA＝5，∠C＝110°

9　次の△ABCにおいて，3 辺の大小関係を調べよ。

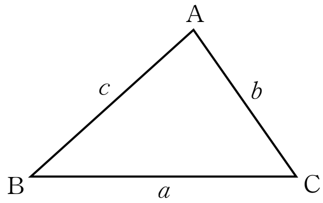
(1)　∠A＝50°，∠B＝60°，∠C＝70°
(2)　∠A＝30°，∠B＝110°，∠C＝40°
(3)　∠A＝45°，∠B＝90°
(4)　∠B＝55°，∠C＝60°

10　AB＝AC である二等辺三角形ABCにおいて，BAの延長上に点Pをとる。
このとき，PB＞PC が成り立つことを証明せよ。



6 三角形の３辺の長さの大小関係

●△ABCの３辺の長さを a，b，c とするとき，次のことが成り立つ。



$$|b-c|<a<b+c$$

例　△ABCの３辺の長さが3，4，5のとき

$|4-5|<3<4+5$

$|3-5|<4<3+5$

$|3-4|<5<3+4$

が成り立つ。

●逆に，正の数 a，b，c が上の不等式を満たすとき，
３辺の長さが a，b，c である三角形が存在する。

例　３辺の長さが2，3，4である三角形が存在するかどうか調べてみよう。

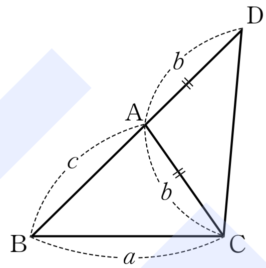
$|3-4|<2<3+4$

が成り立つので，三角形は存在する。

注　$|b-c|$ は $b-c$ の絶対値を表し，$b>c$ のとき $b-c$，
$b<c$ のとき $-(b-c)=c-b$

11　「三角形の２辺の長さの和は，他の１辺の長さよりも大きい。」ということを，次のように証明した。$\boxed{}$にあてはまるものを記入せよ。

〔証明〕



△ABCにおいて，$b+c>a$ を証明する。
辺BAの延長上に AD＝AC＝b であるような点Dをとると，
BD＝AD＋AB＝$b+c$　……①
また，△ACDは二等辺三角形であるから，
∠D＝$\boxed{(1)}$
△BCDにおいて，∠BCD＝∠BCA＋∠ACD＞∠ACD
すなわち，∠BCD＞∠D
よって，**5** により，BD＞$\boxed{(2)}$　……②
したがって，①，②より，$\boxed{(3)}>a$
同様にして，$a+b>c$，$\boxed{(4)}>b$

12　３辺の長さが次のような三角形は存在するかどうかを調べよ。

(1)　3，5，7　　　(2)　3，6，9　　　(3)　5，8，5

第4章　数学と人間の活動

1　約数と倍数

1　約数と倍数

● 2つの整数 a，b について，ある整数 k を用いて，$a=bk$ と表されるとき，b は a の**約数**であるといい，a は b の**倍数**であるという。

例　(1)　10の約数は　1，2，5，10，-1，-2，-5，-10　←負の整数を含む。

(2)　5の倍数は　……，-15，-10，-5，0，5，10，15，……　←無数にある。

1　次の数の約数をすべて求めよ。

(1)　9　　(2)　15

2　次の数の負の倍数を大きいものから3個求めよ。

(1)　3　　(2)　7

2　倍数の判定

● 自然数 N について，N がある自然数の倍数であるかどうかは，次の 例 のように判定できる。

例　(1)　2の倍数…一の位が 0，2，4，6，8

(2)　5の倍数…一の位が 0，5

補足　N の一の位を a とすると，負でない整数 k を用いて，

$N=10k+a=2\cdot5k+a$ と表せることから，一の位の数により判定できる。

(3)　3の倍数…各位の数の和が3の倍数

(4)　9の倍数…各位の数の和が9の倍数

補足　例えば，N が3桁の自然数のとき，N の百の位を a，十の位を b，一の位を c とすると，

$N=\underbrace{9(11a+b)}_{\text{3および9の倍数}}+(a+b+c)$ と表せることから，各位の数の和により判定できる。

※自然数と整数のちがいに注意すること。

3　次の3桁の自然数は，9の倍数である。□にあてはまる数を求めよ。

(1)　12□　　(2)　6□7

4　次の4桁の自然数は，3の倍数かつ5の倍数である。□にあてはまる数を求めよ。

(1)　111□　　(2)　721□

3 素因数分解

❶　2以上の自然数で，1とその数以外に正の約数をもたない数を**素数**という。
また，2以上の自然数で，素数でない数を**合成数**という。

❷　自然数を素数だけの積の形に表すことを**素因数分解**するという。

例題　$\sqrt{90n}$ が自然数になるような最小の自然数 n を求めよ。

考え方　$\sqrt{90n}$ が自然数になるには，$90n$ がある自然数の2乗になればよい。

解答　90を素因数分解すると，$90=2\cdot3^2\cdot5$
90に $2\cdot5$ を掛けると，$2^2\cdot3^2\cdot5^2=(2\cdot3\cdot5)^2$ になる。
よって，求める自然数 n は，$n=2\cdot5=\mathbf{10}$　答

$$\begin{array}{r|l} 2 & 90 \\ \hline 3 & 45 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array}$$

5　次の数が自然数となるような最小の自然数 n を求めよ。

(1)　$\sqrt{27n}$　　(2)　$\sqrt{72n}$

(3)　$\sqrt{150n}$　　(4)　$\sqrt{504n}$

4 正の約数の個数

● 自然数 N の素因数分解が $N=p^a\cdot q^b\cdot r^c\cdots\cdots$ となるとき，N の正の約数の個数は
$(a+1)(b+1)(c+1)\cdots\cdots$ である。

例　(1)　81の正の約数の個数を求める。
81を素因数分解すると，$81=3^4$
よって，81の正の約数の個数は，$4+1=5$(個)

補足　81の正の約数は，素因数3を4個以下もつ数であるから，
3^0，3^1，3^2，3^3，3^4 の5個である。

注　一般に，自然数 n に対して，$n^0=1$ と定める。

(2)　600の正の約数の個数を求める。
600を素因数分解すると，$600=2^3\cdot3\cdot5^2$
よって，600の正の約数の個数は，$(3+1)(1+1)(2+1)=24$(個)

補足　600の正の約数は，次のように表すことができる。
$2^a\cdot3^b\cdot5^c$ $(a=0,\ 1,\ 2,\ 3\,;\ b=0,\ 1\,;\ c=0,\ 1,\ 2)$
ここで，指数 a，b，c の選び方について，a が4通り，b が2通り，
c が3通りあると考えると，正の約数の個数は，$4\times2\times3=24$(個)

6　次の数の正の約数の個数を求めよ。

(1)　32　　(2)　108

(3)　175　　(4)　540

2　最大公約数，最小公倍数

5　最大公約数と最小公倍数

●公約数は最大公約数の約数，公倍数は最小公倍数の倍数である。

例題　24と252の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

考え方　共通する約数，共通する倍数を素因数分解の指数を利用して求める。

解答　24，252を素因数分解すると，それぞれ次のようになる。

$24=2^3\cdot3$　　$252=2^2\cdot3^2\cdot7$

［最大公約数］

$24=2^3\cdot3$

$252=2^2\cdot3^2\cdot7$

よって，$2^2\cdot3=\mathbf{12}$　答

共通な素因数は２と３。指数は小さい方を選ぶ。

［最小公倍数］

$24=2^3\cdot3$

$252=2^2\cdot3^2\cdot7$

よって，$2^3\cdot3^2\cdot7=\mathbf{504}$　答

すべての素因数2，3，7を含み，指数は大きい方を選ぶ。

1　次の２つの整数の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(1)　27，45　　(2)　240，168

2　次の３つの整数の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(1)　56，80，224　　(2)　50，175，140

6　最小公倍数から整数の決定

例題　nを正の整数とする。nと18の最小公倍数が252であるようなnをすべて求めよ。

考え方　まず，18と252を素因数分解する。

解答　18，252を素因数分解すると，

$18=2\cdot3^2$　$252=2^2\cdot3^2\cdot7$

よって，18との最小公倍数が252である正の整数は，

$2^2\cdot3^a\cdot7$ ($a=0$，1，2) と表される。

したがって，求める整数nは

$n=2^2\cdot3^0\cdot7$，$2^2\cdot3^1\cdot7$，$2^2\cdot3^2\cdot7$

すなわち，$n=\mathbf{28}$，**84**，**252**　答

3　nを正の整数とする。nと50の最小公倍数が300であるようなnをすべて求めよ。

7 互いに素

● 2 つの整数 a，b について，共通な素因数がないとき，a，b の最大公約数は 1 である。2 つの整数 a，b の最大公約数が 1 であるとき，a，b は**互いに素**であるという。

例　(1)　$35=5\cdot7$，$48=2^4\cdot3$ であるから，35と48の最大公約数は 1 である。
よって，35と48は互いに素である。

(2)　$15=3\cdot5$，$24=2^3\cdot3$ であるから，15と24の最大公約数は 3 である。
よって，15と24は互いに素ではない。

4　次の 2 つの整数が互いに素であるかどうかを答えよ。

(1)　6 と10　　(2)　21と32　　(3)　45と66

8 互いに素な整数の性質

●a，b，c は整数で，a，b は互いに素であるとする。このとき，次のことが成り立つ。

[1]　ac が b の倍数であるとき，c は b の倍数である。

[2]　a の倍数であり，b の倍数でもある整数は，ab の倍数である。

例 題　a は自然数とする。$a+2$ は 3 の倍数であり，$a+4$ は 7 の倍数であるとき，$a+11$ は21の倍数であることを証明せよ。

考え方　自然数 m，n を用いて，まず $a+2$ と $a+4$ を表してみる。

解 答　$a+2$，$a+4$ は，自然数 m，n を用いて

$a+2=3m$，$a+4=7n$ と表される。

$a+11=(a+2)+9=3m+9=3(m+3)$　……①

また，$a+11=(a+4)+7=7n+7=7(n+1)$　……②

よって，①より $a+11$ は 3 の倍数であり，②より $a+11$ は 7 の倍数である。

3 と 7 は互いに素であるから，

$a+11$ は $3\cdot7$ の倍数，すなわち，21の倍数である。

5　a は自然数とする。$a+1$ は 4 の倍数であり，$a+4$ は 5 の倍数であるとき，$a+9$ は20の倍数であることを証明せよ。

6　a は自然数とする。$a+2$ は 5 の倍数であり，$a+8$ は 7 の倍数であるとき，$a+22$ は35の倍数であることを証明せよ。

高校ゼミ
Standard

数学A

解答編

第1章　場合の数

p.4〜5　**❶ 場合の要素の個数**

1　$n(U)=50$，$n(A)=27$，$n(A\cap B)=3$，
$n(B)=18$ より，

(1)　$n(\overline{B})=n(U)-n(B)=50-18=\mathbf{32}$

(2)　$n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)=50-42=\mathbf{8}$

(3)　$n(\overline{A}\cup\overline{B})=n(\overline{A\cap B})$
$=n(U)-n(A\cap B)=50-3=\mathbf{47}$

2　1から100までの整数の集合をU，3の倍数の集合をA，5の倍数の集合をBとする。

(1)　$n(A)=$**33(個)**

(2)　$n(A\cap B)=$**6(個)**

(3)　$15=3\times5$ であるから，求める自然数の個数は，
$n(U)-n(A\cup B)$
$=n(U)-\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}$
$=100-(33+20-6)=$**53(個)**

3　100から200までの整数の集合をU，そのうち3の倍数である整数の集合をA，5の倍数である整数の集合をBとする。

(1)　$B=\{5\cdot20,\ 5\cdot21,\ \cdots,\ 5\cdot40\}$ より，$n(B)=21$
5の倍数でない整数の集合は$\overline{B}$だから，
$n(\overline{B})=n(U)-n(B)=101-21=$**80(個)**

(2)　$A\cap B$ は15の倍数である整数の集合だから，
$A\cap B=\{15\cdot7,\ 15\cdot8,\ \cdots,\ 15\cdot13\}$，
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=33+21-7=$**47(個)**

(3)　$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(U)-n(A\cup B)$
$=101-47=$**54(個)**

4　(1)　$n(\overline{A})=n(U)-n(A)=40-26=$**14(人)**

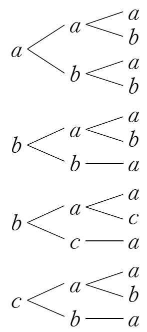
(2)　辞書Aだけを使っている人の集合は$A\cap\overline{B}$であり，辞書Bだけを使っている人の集合は$\overline{A}\cap B$である。よって，どちらか1冊だけを使っている人の人数は，
$n(A\cap\overline{B})+n(\overline{A}\cap B)=(26-11)+6=$**21(人)**

5　(1)　$n(B)=n(\overline{A}\cap B)+n(A\cap B)=35+9=\mathbf{44}$

(2)　$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$
$=100-62=\mathbf{38}$

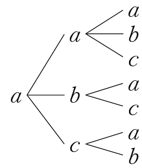
p.6〜7　**❷ 場合の数**

1　(1)　右の樹形図から，次の7通りである。



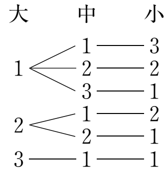
aaa*，*aab*，*aba*，*abb*，*baa*，*bab*，*bba

(2)

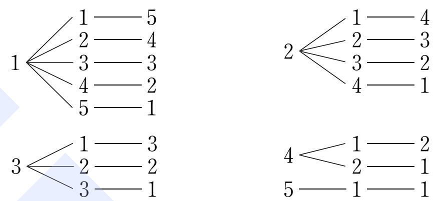


上の樹形図から，次の13通りである。
aaa*，*aab*，*aac*，*aba*，*abc*，*aca*，*acb*，*baa*，*bac*，*bca*，*caa*，*cab*，*cba

2　(1)　右の樹形図から，
6通り



(2)



上の樹形図から，**15通り**

3　(1)[1]　目の和が5
右の表から，4通り

大	1	2	3	4
小	4	3	2	1

[2]　目の和が10
右の表から，3通り

大	4	5	6
小	6	5	4

[1]，[2]から，和の法則により，
$4+3=$**7(通り)**

(2)[1]　目の和が3　(1，2)，(2，1)の2通り

[2]　目の和が6
右の表から，5通り

大	1	2	3	4	5
小	5	4	3	2	1

[3]　目の和が9
右の表から，4通り

大	3	4	5	6
小	6	5	4	3

[4]　目の和が12　(6，6)の1通り
[1]，[2]，[3]，[4]から，和の法則により，
$2+5+4+1=$**12(通り)**

(3)[1]　目の和が10　(1)から，3通り
[2]　目の和が11　(5，6)，(6，5)の2通り
[3]　目の和が12　(2)から，1通り
[1]，[2]，[3]から，和の法則により，
$3+2+1=$**6(通り)**

(4)[1]　目の和が4
右の表から，3通り

大	1	2	3
小	3	2	1

［2］　目の和が5　(1)から，4通り

［1］，［2］から，和の法則により，

$3+4=$**7(通り)**

〔別解〕　下のような表をかいて求める。

(1)

大＼小	1	2	3	4	5	6
1				○		
2			○			
3		○				
4	○					○
5					○	
6				○		

(2)

大＼小	1	2	3	4	5	6
1		○			○	
2	○			○		
3			○			○
4		○			○	
5	○			○		
6			○			○

(3)

大＼小	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						○
5					○	○
6				○	○	○

(4)

大＼小	1	2	3	4	5	6
1			○	○		
2		○	○			
3	○	○				
4	○					
5						
6						

4　生徒Aの家から生徒Bの家までの道の1通りに対して，生徒Bの家から学校までの道の選び方は3通りあるから，学校に行く方法は，積の法則により，$4\times3=$**12(通り)**

5　(1)　$3\times3=$**9(個)**

(2)　$2\times2\times2=$**8(個)**

6　(1)　$6\times6\times6=$**216(通り)**

(2)　$6\times5\times4=$**120(通り)**

7　(1)　$24=2^3\cdot3$ である。

2^3 の正の約数は，1，2，2^2，2^3 の4通り

3の正の約数は，1，3の2通り

よって，求める個数は，積の法則により，

$4\times2=$**8(個)**

(2)　$27=3^3$ であるから，正の約数の個数は，

$3+1=$**4(個)**

(3)　$108=2^2\cdot3^3$ であるから，正の約数の個数は，

$(2+1)\times(3+1)=$**12(個)**

p.8〜11

❸ 順列

1　(1)　${}_9P_2=9\cdot8=\mathbf{72}$

(2)　${}_7P_3=7\cdot6\cdot5=\mathbf{210}$

(3)　${}_5P_4=5\cdot4\cdot3\cdot2=\mathbf{120}$

(4)　${}_6P_1=\mathbf{6}$

2　(1)　${}_9P_3=9\cdot8\cdot7=$**504(通り)**

(2)　${}_6P_4=6\cdot5\cdot4\cdot3=$**360(通り)**

3　(1)　${}_5P_5=5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=$**120(個)**

(2)　${}_7P_7=7!=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=$**5040(通り)**

4　${}_{12}P_2=12\cdot11=$**132(通り)**

5　${}_{10}P_4=10\cdot9\cdot8\cdot7=$**5040(通り)**

6　(1)　千の位の数字は1，2，3，4の中から選ぶので4通りある。百の位，十の位，一の位は残り4個の数字から3個を取って並べる方法で${}_4P_3$通りだから，求める4桁の整数の個数は，

$4\times{}_4P_3=4\times4\cdot3\cdot2=$**96(個)**

〔別解〕　${}_5P_4-{}_4P_3=5\cdot4\cdot3\cdot2-4\cdot3\cdot2$

$=120-24=96$(個)

(2)［1］　一の位が0のとき，

${}_4P_3=4\cdot3\cdot2=24$(個)

［2］　一の位が2または4のとき，

それぞれ千の位は3通り，百，十の位は${}_3P_2$通りだから，

$2\times3\times{}_3P_2=2\times3\times3\cdot2=36$(個)

［1］，［2］から，求める4桁の偶数の個数は，和の法則により，$24+36=$**60(個)**

〔別解〕　${}_4P_3+2\times({}_4P_3-{}_3P_2)$

$=24+2\times(24-6)=60$(個)

(3)　$4\times{}_4P_4=4\times4\cdot3\cdot2\cdot1=$**96(個)**

(4)　一の位が0となる場合だから，求める5桁の5の倍数の個数は，${}_4P_4=4\cdot3\cdot2\cdot1=$**24(個)**

7　(1)　${}_3P_2\times5!=3\cdot2\times5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=$**720(通り)**

(2)　男子4人のひとまとめと女子3人の並び方は4!通りある。このおのおのに対する男子4人の並び方が4!通りあるから，積の法則により，

$4!\times4!=4\cdot3\cdot2\cdot1\times4\cdot3\cdot2\cdot1=$**576(通り)**

(3)　女子の並び方は3!通りあり，そのおのおのに対して男子の並び方は4!通りあるから，積の法則により，

$3!\times4!=3\cdot2\cdot1\times4\cdot3\cdot2\cdot1=$**144(通り)**

8　(1)　$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=$**24(通り)**

(2)　A，B以外の3人の並び方は3!通りあり，そのおのおのに対して，A，Bの並び方が2!通りあるから，積の法則により，

$3!\times2!=$**12(通り)**

(3)　A，Bのひとまとめと残り3人の並び方は4!通りあり，そのおのおのに対して，A，Bの並び方は2!通りあるから，積の法則により，

$4!\times2!=$**48(通り)**

(4)　5人の並び方は，$5!=$**120(通り)**

(3)から，求める並び方の数は，

$120-48=$**72(通り)**

9　(1)　$2!\times3!\times3!=$**72(通り)**

(2)　男子3人の並び方は3!通りあり，そのおのおのに対して，右の図の4か所から3か所を選んで女子3人が並ぶ場合だから，${}_4P_3$通りある。

△男△男△男△

よって，求める並び方の総数は，

$3!\times{}_4P_3=3\cdot2\cdot1\times4\cdot3\cdot2=$**144(通り)**

(3) 右の図のように，左端に男子が並ぶ場合と，女子が並ぶ場合があるので，求める並び方の総数は，

男女男女男女
女男女男女男

$3!\times3!\times2=$**72(通り)**

10 (1) 6人の円順列より，
$(6-1)!=5!=$**120(通り)**

(2) 父の席を決めると母の席も決まるので，5人の円順列として考えて，
$(5-1)!=4!=$**24(通り)**

(3) 父母をひとまとめとしたとき，円順列は $(5-1)!$ 通りあり，そのおのおのに対して父母の並び方が $2!$ 通りあるので，
$(5-1)!\times2!=4!\times2=$**48(通り)**

11 (1) $4^3=$**64(個)**

(2) $3^4=$**81(個)**

12 1人につき，グー，チョキ，パーの3通りの手の出し方があるので，$3^4=$**81(通り)**

13 (1) $4^3=$**64(通り)**

(2) $4+4^2+4^3=$**84(通り)**

p.12 問題 A

1 (1) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ より，
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=20+15-28=$**7**

(2) $n(\overline{A})=n(U)-n(A)=50-20=$**30**

(3) $n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$
$=50-28=$**22**

2 右の樹形図から，次の5通りである。

1 — 1 — 6
1 — 2 — 5
1 — 3 — 4
2 — 2 — 4
2 — 3 — 3

1+1+6，1+2+5，1+3+4，2+2+4，2+3+3

3 (1)[1] 目の和が8
右の表から，5通り

大	2	3	4	5	6
小	6	5	4	3	2

[2] 目の和が9
右の表から，4通り

大	3	4	5	6
小	6	5	4	3

[1]，[2]から，和の法則により，
$5+4=$**9(通り)**

(2) $5\times4=$**20(通り)**

4 (1) $32=2^5$ であるから，
正の約数は，1，2，2^2，2^3，2^4，2^5 の6通り，
すなわち，1，2，4，8，16，32の**6個**

(2) $135=3^3\cdot5$ であるから，正の約数の個数は，
$(3+1)\times(1+1)=$**8(個)**

(3) $400=2^4\cdot5^2$ であるから，正の約数の個数は，
$(4+1)\times(2+1)=$**15(個)**

5 (1) ${}_6P_3=6\cdot5\cdot4=$**120**

(2) ${}_8P_2=8\cdot7=$**56**

(3) $3!+4!=3\cdot2\cdot1+4\cdot3\cdot2\cdot1=6+24=$**30**

(4) $\dfrac{8!}{5!}=8\cdot7\cdot6=$**336**

6 (1) ${}_4P_3=4\cdot3\cdot2=$**24(個)**

(2) ${}_4P_4=4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=$**24(個)**

(3) 千の位が3，4のものはそれぞれ${}_3P_3$個ずつあるから，$3!\times2=$**12(個)**

7 (1) $(7-1)!=6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=$**720(通り)**

(2) $(6-1)!\times2!=120\times2=$**240(通り)**

8 (1) 千，百，十の位は4通り，一の位は1，3の2通りだから，$4\times4\times4\times2=$**128(個)**

(2) 千の位は3通り，百，十，一の位は4通りずつあるので，$3\times4\times4\times4=$**192(個)**

p.13 問題 B

1 1から100までの整数の集合をU，そのうち3で割り切れる整数の集合をA，5で割り切れる整数の集合をBとする。

(1) 求める整数の個数は $n(A\cup B)$ であり，
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
ここで，$n(A\cap B)$ は3と5の公倍数の個数，すなわち，15の倍数の個数であり，
$\{15\cdot1,\ 15\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 15\cdot6\}$ より，
$n(A\cap B)=6$(個)
よって，$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=33+20-6=$**47(個)**

(2) 4で割り切れる整数の集合をC，6で割り切れる整数の集合をDとすると，求める整数の個数は，$n(\overline{C}\cup\overline{D})$ であり，$\overline{C}\cup\overline{D}=\overline{C\cap D}$ であるから，$C\cap D=\{12\cdot1,\ 12\cdot2,\ \cdots\cdots12\cdot8\}$ より，
$n(\overline{C}\cup\overline{D})=n(\overline{C\cap D})=n(U)-n(C\cap D)$
$=100-8=$**92(個)**

2 生徒全体の集合をU，数学の合格者の集合をA，英語の合格者の集合をBとする。
求める人数は，$n(A\cap B)$であり，
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=50+30-(60-8)=$**28(人)**

3 (1) 2個とも奇数の目が出る場合で，
$3\times3=$**9(通り)**

(2) (すべての場合)−(目の積が奇数になる場合)により求められる。(1)から，
$6\times6-9=$**27(通り)**

(3) 2個とも奇数の目か，2個とも偶数の目が出る場合で，$3\times3\times2=$**18(通り)**

(4) (すべての場合)−(目の和が偶数になる場合)により求められる。(3)から，
$6\times6-18=$**18(通り)**

4 (1) $30=2\cdot3\cdot5$ であるから，正の約数の個数は，

$(1+1)\times(1+1)\times(1+1)=$**8(個)**

(2) $360=2^3\cdot3^2\cdot5$ であるから，正の約数の個数は，
$(3+1)\times(2+1)\times(1+1)=$**24(個)**

(3) $1008=2^4\cdot3^2\cdot7$ であるから，正の約数の個数は，
$(4+1)\times(2+1)\times(1+1)=$**30(個)**

5 (1) $6\times{}_6P_3=6\times6\cdot5\cdot4=$**720(個)**

〔別解〕 ${}_7P_4-{}_6P_3=7\cdot6\cdot5\cdot4-6\cdot5\cdot4$
$=840-120=720$(個)

(2) 一の位が 1，3，5 の 3 通りで，百の位は 0 と一の位の数字以外の 5 通り，十の位は残りの 5 通りだから，$3\times5\times5=$**75(個)**

〔別解〕 $3\times({}_6P_2-{}_5P_1)=75$(個)

(3) 一の位が 0 のとき，${}_6P_2=6\cdot5=30$
一の位が 5 のとき，${}_6P_2-{}_5P_1=30-5=25$
よって，$30+25=$**55(個)**

(4) ${}_3P_2\times{}_5P_4=3\cdot2\times5\cdot4\cdot3\cdot2=$**720(個)**

6 (1) (すべての場合)－(AとBが隣り合う場合)より，$6!-5!\times2!=$**480(通り)**

(2) A○Bの 3 つの文字を 1 つの文字と考えると 4 つの文字の並べ方で，さらに○に入る文字は 4 通り，またB○Aとなる場合も考えて，
${}_4P_4\times4\times2=4\cdot3\cdot2\cdot1\times4\times2=$**192(通り)**

(3) A，B，Cのひとまとめと，D，E，Fの円順列は $(4-1)!$ 通りあり，A，B，Cの並べ方が $3!$ 通りあるので，$(4-1)!\times3!=$**36(通り)**

7 円順列として考える。$(4-1)!=3!=$**6(通り)**

8 (1) 各要素について，含まれるか含まれないかの 2 通りがある。(すべて含まれないときは ϕ，すべて含まれるときは全体集合 U であり，これらは部分集合とみなされる。)
よって，部分集合の総数は，$2^5=$**32(個)**

(2) $\{c,\ d,\ e\}$の部分集合は 2^3 個ある。
この部分集合と$\{a,\ b\}$との和集合が，a，b を含む部分集合となるので，その総数は，
$2^3=$**8(個)**

p.14～19 　**❹ 組合せ**

1 $\{a,\ b,\ c\}$，$\{a,\ b,\ d\}$，$\{a,\ b,\ e\}$，
$\{a,\ c,\ d\}$，$\{a,\ c,\ e\}$，$\{a,\ d,\ e\}$，
$\{b,\ c,\ d\}$，$\{b,\ c,\ e\}$，$\{b,\ d,\ e\}$，
$\{c,\ d,\ e\}$

2 (1) ${}_4C_2=\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}=$**6** 　(2) ${}_7C_3=\dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=$**35**

(3) ${}_9C_4=\dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=$**126**

(4) ${}_6C_1=$**6** 　(5) ${}_7C_7=$**1** 　(6) ${}_3C_0=$**1**

(7) ${}_8C_6={}_8C_2=\dfrac{8\cdot7}{2\cdot1}=$**28**

(8) ${}_{12}C_9={}_{12}C_3=\dfrac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}=$**220**

3 (1) ${}_{10}C_4=\dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=$**210(通り)**

(2) ${}_{20}C_3=\dfrac{20\cdot19\cdot18}{3\cdot2\cdot1}=$**1140(通り)**

4 (1) ${}_{12}C_2=\dfrac{12\cdot11}{2\cdot1}=$**66(試合)**

(2) ${}_6C_4={}_6C_2=\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}=$**15(通り)**

5 (1) ${}_{11}C_5=\dfrac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=$**462(通り)**

(2) ${}_8C_3\times{}_3C_2=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}\times3=$**168(通り)**

6 (1) ${}_9C_3=\dfrac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=$**84(通り)**

(2) 全体から 4 人を選ぶ方法は，${}_{10}C_4$ 通りある。男子だけから 4 人を選ぶとき，${}_7C_4$ 通りであるから，求める選び方の総数は，

${}_{10}C_4-{}_7C_4=\dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}-\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4\cdot3\cdot2\cdot1}$
$=210-35=$**175(通り)**

7 (1) ${}_{10}C_3=\dfrac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=$**120(個)**

(2) ${}_{10}C_2-10=45-10=$**35(本)**

8 ${}_8C_2\times{}_5C_2=\dfrac{8\cdot7}{2\cdot1}\times\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=$**280(個)**

9 (1) ${}_{12}C_5\times{}_7C_4=\dfrac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\times\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4\cdot3\cdot2\cdot1}$
$=$**27720(通り)**

(2) ${}_{12}C_4\times{}_8C_4=\dfrac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\times\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}$
$=$**34650(通り)**

(3) 求める組分けを x 通りとすると，組分け 1 つにつき 3 室に分ける方法は $3!$ 通りあるから，
(2)より，$x\times3!=34650$

$x=\dfrac{34650}{3!}=$**5775(通り)**

(4) ${}_{12}C_6\times\dfrac{{}_6C_3}{2!}=\dfrac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\times\dfrac{6\cdot5\cdot4}{2\cdot3\cdot2\cdot1}$
$=$**9240(通り)**

10 (1) ${}_{10}C_4\times\dfrac{{}_6C_2\times{}_4C_2}{3!}=\dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\times\dfrac{15\times6}{3\cdot2\cdot1}$
$=$**3150(通り)**

(2) $\dfrac{{}_{10}C_2\times{}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_2}{5!}=\dfrac{45\times28\times15\times6}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}$
$=$**945(通り)**

(2)　黒玉2個をまとめて1個と考えればよいから，赤玉3個，白玉2個，黒玉1個の合計6個を1列に並べる並べ方を求めることになる。

$\dfrac{6!}{3!2!1!}=$**60(通り)**

4 (1)　→5個と↑5個の順列の総数を求めて，

$\dfrac{10!}{5!5!}=$**252(通り)**

(2)　(AからPまでの最短の道順の総数)×(PからBまでの最短の道順の総数)より，

$\dfrac{5!}{3!2!}\times\dfrac{5!}{2!3!}=10\times10=$**100(通り)**

(3)　PQ間は1通りだから，
(AからPまでの最短の道順の総数)×1×(QからBまでの最短の道順の総数)

$=\dfrac{5!}{3!2!}\times1\times\dfrac{4!}{1!3!}=10\times1\times4=$**40(通り)**

5 (1)　3人を，A，B，Cとする。
たとえば，りんご10個をAに3個，Bに3個，Cに4個分けるとき，AAABBBCCCCのように表すとする。
これは，3個のものから重複を許して10個取る組合せである。
よって，この分け方の総数は，
${}_{10+3-1}C_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=$**66(通り)**

(2)　3人に1個ずつ分けておき，残り7個の分け方を考えればよい。
(1)と同様にして，
${}_{7+3-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=$**36(通り)**

6 (1)　6冊の選び方が ${}_7C_6=7$(通り) あるから，
$7\times{}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2=$**630(通り)**

(2)[1]　a と b が3冊の組に入る場合
残りの5冊を1冊，2冊，2冊に分けると考えて，${}_5C_1\times\dfrac{{}_4C_2\times{}_2C_2}{2!}=15$(通り)

[2]　a と b が2冊の組に入る場合
残りの5冊を3冊，2冊に分けると考えて，
${}_5C_3\times{}_2C_2=10$(通り)
よって，15＋10＝**25(通り)**

p.22〜23　**章末問題**

1　1から100までの自然数の集合を U とする。

(1)　35で割り切れる数の集合を A とすると，求める自然数の個数は $n(A)$ であり，
$n(A)=$**2(個)**

(2)　$35=5\cdot7$ であるから，1から100までの自然数のうち，5，7で割り切れる数の集合をそれぞれ B，C とおくと，求める自然数の個数は，
$n(U)-n(B\cup C)$
$=n(U)-\{n(B)+n(C)-n(B\cap C)\}$
$=100-(20+14-2)=$**68(個)**

2　A新聞を購読している人の集合を A，B新聞を購読している人の集合を B とする。
求める人数は $n(\overline{A}\cap\overline{B})$ であり，$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$ であるから，
$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})$
$=100-\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}$
$=100-(75+50-30)=$**5(人)**

3 (1)　${}_4P_3=4\cdot3\cdot2=$**24(個)**

(2)　$4\times4\times4=$**64(個)**

4 (1)　一の位の数字は1，3，5の3通りある。
百の位は，0と一の位の数字以外の4通りあり，十の位は，残り4通りだから，
$3\times4\times4=$**48(個)**

(2)[1]　百の位が4のとき
410より小さい数は，401，402，403，405の4個だから，${}_5P_2-4=5\cdot4-4=16$(個)

[2]　百の位が5のとき
${}_5P_2=5\cdot4=20$(個)

[1]，[2]から，和の法則により，
16＋20＝**36(個)**

5 (1)　両端の男子の並び方は，${}_4P_2=4\cdot3=12$
間に入る残り6人の並び方は，
${}_6P_6=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$
よって，求める並び方は，
$12\times720=$**8640(通り)**

(2)　女子4人を1人としたとき，5人の並び方は，
${}_5P_5=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$
女子4人の並び方は，${}_4P_4=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$
よって，求める並び方は，
$120\times24=$**2880(通り)**

(3)　円順列だから，$(n-1)!$ により，求められる。
よって，$(8-1)!=7!=$**5040(通り)**

(4)　男子の円順列を作り，その間に女子が入ると考える。男子の円順列は，$(4-1)!=3!=6$
女子の間への入り方は，${}_4P_4=4!=24$
求める並び方は，$6\times24=$**144(通り)**

(5)　${}_8C_5={}_8C_3=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=$**56(通り)**

(6)　${}_4C_2\times{}_4C_2=\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}\times\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}=$**36(通り)**

(7)　男子4人を固定して考えれば，女子4人の順列で，男女2人ずつの組の数が求められる。
よって，${}_4P_4=4!=$**24(通り)**

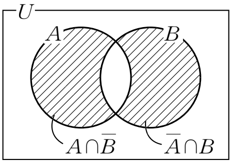
(8)　$\dfrac{{}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_2}{4!}=\dfrac{28\times15\times6}{24}=$**105(通り)**

6 (1) ${}_8C_2=\dfrac{8\cdot7}{2\cdot1}=$**28(個)**

(2) ${}_8C_3=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=$**56(個)**

7 1つの面の色を決めると対面の色は5通りであり，側面は4色の円順列となるので，
$5\times(4-1)!=5\times3\cdot2\cdot1=$**30(通り)**

8 右の図より，



$n(\overline{A}\cap B)+n(A\cap\overline{B})$
$=n(A\cup B)-n(A\cap B)$
$=n(A\cup B)-\{n(A)$
$\quad+n(B)-n(A\cup B)\}$
$=7-(10-7)=$**4**

9 100から200までの自然数全体の集合をU，6で割り切れる数の集合をA，5で割ると余りが2になる集合をBとする。

(1) $A=\{6\cdot17,\ 6\cdot18,\ \cdots,\ 6\cdot33\}$より，
$n(A)=33-17+1=$**17(個)**

(2) $n(U)=101$より，
$B=\{102,\ 107,\ \cdots,\ 197\}$
$\quad=\{5\cdot20+2,\ 5\cdot21+2,\ 5\cdot39+2\}$より，
$n(B)=39-20+1=20$
よって，$n(\overline{B})=n(U)-n(B)$
$\quad=101-20=$**81(個)**

10 $x\geqq1,\ y\geqq1$より，$x+2y\geqq3$
よって，$1\leqq z\leqq3$
[1] $z=1$のとき，$x+2y=9$より，
$(x,\ y)=(1,\ 4),\ (3,\ 3),\ (5,\ 2),\ (7,\ 1)$
の4通り
[2] $z=2$のとき，$x+2y=6$より，
$(x,\ y)=(2,\ 2),\ (4,\ 1)$の2通り
[3] $z=3$のとき，$x+2y=3$より，
$(x,\ y)=(1,\ 1)$の1通り
よって，求める$(x,\ y,\ z)$の組は，
$4+2+1=$**7(組)**

11 (1)

100円	0					1			2
50円	0	1	2	3	4	0	1	2	0
10円	20	15	10	5	0	10	5	0	0

上の表から，**9通り**

(2) 10円硬貨の使い方は，0枚，1枚，2枚，3枚，4枚の5通り，100円硬貨，500円硬貨はそれぞれ4通りとなるから，積の法則を用いて次のように求められる。
ただし，3種類の硬貨すべてが0枚である場合を除く。
$5\times4\times4-1=$**79(通り)**

12 (1) $n(n-1)=56$より，$n^2-n-56=0$
$(n+7)(n-8)=0$
nは自然数より，$n>0$
よって，$\boldsymbol{n=8}$

(2) $\dfrac{n(n-1)}{2}=21$より，$n^2-n-42=0$
$(n+6)(n-7)=0$
nは自然数より，$n>0$
よって，$\boldsymbol{n=7}$

13 (1) Aが左端にくるのは，$4!=24$
BA，BC，BDが左にくる順列は全部で，
$3\times3!=3\times6=18$
BEAが左にくる順列は2
BECDAの前はBECAD
よって，BECDAの前の順列の総数は，
$24+18+2+1=45$
だから，BECDAは**46番目**

(2) CEDBAが72番目にくる順列だから，71番目はCEDAB，70番目は**CEBDA**

14 (1) $\dfrac{9!}{4!3!2!}=$**1260(通り)**

(2)[1] 赤玉3，青玉3，白玉2
[2] 赤玉4，青玉2，白玉2
[3] 赤玉4，青玉3，白玉1
の場合があるので，
$\dfrac{8!}{3!3!2!}+\dfrac{8!}{4!2!2!}+\dfrac{8!}{4!3!1!}=$**1260(通り)**

15 (1) 7個全部を使った順列の総数は，
$\dfrac{7!}{1!3!2!1!}=420$
0がはじめにくるものの総数は，
$\dfrac{6!}{3!2!1!}=60$
よって，求める7桁の整数は，
$420-60=$**360(通り)**

(2) 一の位が0である場合
$\dfrac{6!}{3!2!1!}=60$
一の位が2である場合
0がはじめにくるものを除いて，
$\dfrac{6!}{3!1!1!1!}-\dfrac{5!}{3!1!1!}=120-20=100$
よって，$60+100=$**160(通り)**

第 2 章　確率

p.24～27　**❶ 事象と確率**

1　$\{(0,\ 0)\}$，$\{(0,\ 1)\}$，$\{(1,\ 0)\}$，$\{(1,\ 1)\}$

2　全事象 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

(1)　奇数の目が出るという事象を A とすると，$A=\{1,\ 3,\ 5\}$ より，その根元事象の数は 3

よって，$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(U)}=\dfrac{3}{6}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(2)　3 の目が出るという事象を A とすると，$A=\{3\}$ より，その根元事象の数は 1

よって，$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(U)}=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

(3)　3 以下の目が出るという事象を A とすると，$A=\{1,\ 2,\ 3\}$ より，その根元事象の数は 3

よって，$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(U)}=\dfrac{3}{6}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(4)　素数の目が出るという事象を A とすると，$A=\{2,\ 3,\ 5\}$ より，その根元事象の数は 3

よって，$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(U)}=\dfrac{3}{6}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

3　2 個のさいころを同時に投げるとき，目の出方は，$6\times6=36$(通り)

(1)　目の和が 5 になる場合は，(1，4)，(2，3)，(4，1)，(3，2)の 4 通りである。

よって，求める確率は，$\dfrac{4}{36}=\boldsymbol{\dfrac{1}{9}}$

(2)　2 個とも同じ目が出る場合は，(1，1)，(2，2)，(3，3)，(4，4)，(5，5)，(6，6)の 6 通りである。

よって，求める確率は，$\dfrac{6}{36}=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

(3)　2 個とも偶数の目が出るか，2 個とも奇数の目が出るかの場合で，

$3\times3+3\times3=18$(通り)

よって，求める確率は，$\dfrac{18}{36}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(4)　目の積が 5 の倍数になる場合は，右の図のように，11通りである。よって，求める確率は，$\boldsymbol{\dfrac{11}{36}}$

	1	2	3	4	5	6
1					○	
2					○	
3					○	
4					○	
5	○	○	○	○	○	○
6					○	

4　3 枚の硬貨の表裏の出方は，$2\times2\times2=8$(通り)

(1)　3 枚とも表が出る場合は 1 通りだから，求める確率は，$\boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$

(2)　1 枚だけ裏が出る場合は，(表，表，裏)，(表，裏，表)，(裏，表，表)の 3 通りである。

よって，求める確率は，$\boldsymbol{\dfrac{3}{8}}$

5　5 文字の並べ方は，全部で，5! 通りある。

(1)　A以外の 4 個の文字の並べ方は，4! 通りある。

よって，求める確率は，$\dfrac{4!}{5!}=\boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$

(2)　両端のA，Bの並べ方は，A○○○B，B○○○Aの 2 通りある。間の 3 文字の並び方は 3! 通りあるから，両端がA，Bになる並び方は，$2\times3!$ 通りある。

よって，求める確率は，$\dfrac{2\times3!}{5!}=\boldsymbol{\dfrac{1}{10}}$

(3)　A，B，Cのひとまとめと D，E の並べ方は 3! 通りあり，そのそれぞれに対して，A，B，C の並べ方が 3! 通りある。

よって，求める確率は，$\dfrac{3!\times3!}{5!}=\boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$

6　3 桁の整数は全部で ${}_5P_3$ 個できる。

(1)　一の位が 5，7，9 のとき，それぞれ ${}_4P_2$ 個ずつできるから，求める確率は，

$\dfrac{3\times{}_4P_2}{{}_5P_3}=\dfrac{3\times4\cdot3}{5\cdot4\cdot3}=\boldsymbol{\dfrac{3}{5}}$

(2)　900以上の数は，${}_4P_2$ 個できる。

よって，求める確率は，$\dfrac{{}_4P_2}{{}_5P_3}=\dfrac{4\cdot3}{5\cdot4\cdot3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$

7　9 個から 3 個の玉の取り出し方は ${}_9C_3$ 通りである。

(1)　3 個とも赤玉である場合は ${}_4C_3$ 通りより，求める確率は，$\dfrac{{}_4C_3}{{}_9C_3}=\dfrac{4}{84}=\boldsymbol{\dfrac{1}{21}}$

(2)　3 個とも白玉である場合は ${}_5C_3$ 通りより，求める確率は，$\dfrac{{}_5C_3}{{}_9C_3}=\dfrac{10}{84}=\boldsymbol{\dfrac{5}{42}}$

(3)　白玉 1 個と赤玉 2 個である場合は ${}_5C_1\times{}_4C_2$ 通りより，求める確率は，

$\dfrac{{}_5C_1\times{}_4C_2}{{}_9C_3}=\dfrac{5\times6}{84}=\boldsymbol{\dfrac{5}{14}}$

(4)　白玉 2 個と赤玉 1 個である場合は ${}_5C_2\times{}_4C_1$ 通りより，求める確率は，

$\dfrac{{}_5C_2\times{}_4C_1}{{}_9C_3}=\dfrac{10\times4}{84}=\boldsymbol{\dfrac{10}{21}}$

8　16本のくじから 3 本のくじの引き方は ${}_{16}C_3$ 通りである。

(1)　3 本ともはずれである場合は，${}_{11}C_3$ 通りある。

よって，求める確率は，$\dfrac{{}_{11}C_3}{{}_{16}C_3}=\boldsymbol{\dfrac{33}{112}}$

(2)　1本だけ当たりくじである場合は，
$_5C_1\times{}_{11}C_2$ 通りある。

よって，求める確率は，$\dfrac{_5C_1\times{}_{11}C_2}{_{16}C_3}=\mathbf{\dfrac{55}{112}}$

9　(1)　$\dfrac{_8C_3}{_{11}C_3}=\mathbf{\dfrac{56}{165}}$

(2)　$\dfrac{_8C_1\times{}_3C_2}{_{11}C_3}=\dfrac{8\times3}{165}=\mathbf{\dfrac{8}{55}}$

(3)　$\dfrac{_5C_3}{_{11}C_3}=\dfrac{10}{165}=\mathbf{\dfrac{2}{33}}$

p.28～31

❷ 確率の基本性質

1　$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$，$B=\{3,\ 6,\ 9\}$，
$C=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ である。

(1)　$A\cup B=\{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9\}$

(2)　$A\cup C=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

(3)　$A\cap B=\{3\}$

(4)　$A\cap C=\{3,\ 5,\ 7\}$

2　集合で表すと，
$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$，$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$，
$C=\{4,\ 8\}$，$D=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$
よって，$B\cap C=\phi$，$C\cap D=\phi$ より，互いに排反である事象は，$\boldsymbol{B}$ **と** $\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{C}$ **と** $\boldsymbol{D}$

3　18個の玉から2個の玉の取り出し方は $_{18}C_2$ 通り。

2個とも白玉である確率は，$\dfrac{_{10}C_2}{_{18}C_2}=\dfrac{5}{17}$

2個とも赤玉である確率は，$\dfrac{_8C_2}{_{18}C_2}=\dfrac{28}{153}$

2つの事象は排反事象であるから，求める確率は，

$\dfrac{5}{17}+\dfrac{28}{153}=\mathbf{\dfrac{73}{153}}$

4　ジョーカーを除いた1組のトランプは52枚である。

(1)　絵札は12枚あるから，その選ぶ確率は，$\dfrac{12}{52}$

エースは4枚あるから，その選ぶ確率は，$\dfrac{4}{52}$

2つの事象は排反事象であるから，求める確率は，$\dfrac{12}{52}+\dfrac{4}{52}=\dfrac{16}{52}=\mathbf{\dfrac{4}{13}}$

(2)　ハートの札の出る確率は，$\dfrac{13}{52}$

スペードのエースの出る確率は，$\dfrac{1}{52}$

2つの事象は排反事象であるから，求める確率は，$\dfrac{13}{52}+\dfrac{1}{52}=\dfrac{14}{52}=\mathbf{\dfrac{7}{26}}$

5　各等に当たる事象は互いに排反だから，求める確率は，$\dfrac{3}{100}+\dfrac{5}{100}+\dfrac{20}{100}=\dfrac{28}{100}=\mathbf{\dfrac{7}{25}}$

6　15個の玉から3個の玉の取り出し方は $_{15}C_3$ 通り。

(1)　3個とも白玉である確率は，$\dfrac{_8C_3}{_{15}C_3}=\dfrac{56}{455}$

3個とも赤玉である確率は，$\dfrac{_4C_3}{_{15}C_3}=\dfrac{4}{455}$

3個とも青玉である確率は，$\dfrac{_3C_3}{_{15}C_3}=\dfrac{1}{455}$

3つの事象は互いに排反だから，求める確率は，

$\dfrac{56}{455}+\dfrac{4}{455}+\dfrac{1}{455}=\mathbf{\dfrac{61}{455}}$

(2)　白玉と赤玉を合わせた12個から2個と，青玉3個から1個を取り出す場合だから，求める確率は，$\dfrac{_{12}C_2\times{}_3C_1}{_{15}C_3}=\mathbf{\dfrac{198}{455}}$

7　(1)　同じ目が出る。

(2)　2回とも奇数の目が出る。

8　偶数の目が少なくとも1個出る事象の余事象は2個とも奇数の目が出る事象である。
2個とも奇数が出る場合は，$3\times3=9$(通り)

その確率は，$\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$

よって，求める確率は，$1-\dfrac{1}{4}=\mathbf{\dfrac{3}{4}}$

9　(1)　3枚とも裏が出るという事象の余事象の確率だから，$1-\dfrac{1}{2^3}=1-\dfrac{1}{8}=\mathbf{\dfrac{7}{8}}$

(2)　A，Bが隣り合うという事象の余事象の確率だから，$1-\dfrac{2\times5!}{6!}=1-\dfrac{1}{3}=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$

(3)　3人とも男子が選ばれるという事象の余事象の確率だから，$1-\dfrac{_4C_3}{_7C_3}=1-\dfrac{4}{35}=\mathbf{\dfrac{31}{35}}$

(4)　3個とも赤玉が出るという事象の余事象の確率だから，$1-\dfrac{_4C_3}{_9C_3}=1-\dfrac{1}{21}=\mathbf{\dfrac{20}{21}}$

10　(1)　6の倍数であるという事象を A，8の倍数であるという事象を B とすると，
$A=\{6\cdot1,\ 6\cdot2,\ \cdots,\ 6\cdot16\}$，
$B=\{8\cdot1,\ 8\cdot2,\ \cdots,\ 8\cdot12\}$，
$A\cap B=\{24\cdot1,\ 24\cdot2,\ 24\cdot3,\ 24\cdot4\}$ より，

$P(A)=\dfrac{16}{100}$，$P(B)=\dfrac{12}{100}$，$P(A\cap B)=\dfrac{4}{100}$

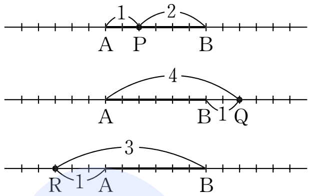
よって，$P(A\cup B)=\dfrac{16}{100}+\dfrac{12}{100}-\dfrac{4}{100}=\dfrac{24}{100}$

$=\mathbf{\dfrac{6}{25}}$

第 3 章 図形の性質

p.46～50 **❶ 三角形の辺の比**

1



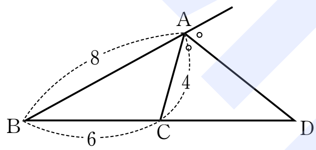
2 (1) AC∥DE より，
BE : EC＝BD : DA＝**1 : 1**
(2) AB∥FG より，BG : GC＝AF : FC＝**1 : 3**
(3) (1)より，BE＝$\frac{1}{2}$BC　(2)より，BG＝$\frac{1}{4}$BC
であるから，GE＝BE－BG＝$\frac{1}{4}$BC
よって，BC : GE＝**4 : 1**

3 (1) ∠AEC　(2) ∠ACE　(3) 錯角
(4) DC　(5) BA

4 (1) ADは∠Aの二等分線であるから，
BD : DC＝AB : AC＝6 : 10＝**3 : 5**
(2) BD＝12×$\frac{3}{3+5}$＝12×$\frac{3}{8}$＝$\boldsymbol{\frac{9}{2}}$

5 (1) ∠FAD　(2) ∠ACE　(3) 同位角
(4) AC(AE)　(5) AE(AC)

6 (1) BD : DC
＝AB : AC
＝8 : 4
＝**2 : 1**



(2) BD : BC
＝2 : (2－1)＝**2 : 1**
(3) BD＝2BC＝2×6＝**12**

7 (1) ∠ADB　(2) ∠DBC
(3) $b>c$　(4) ∠B＞∠C

8 (1) AB＜CA＜BC であるから，
∠C＜∠B＜∠A
(2) BC＝CA＜AB であるから，
∠A＝∠B＜∠C
(3) AC＝$\sqrt{AB^2+BC^2}$＝$\sqrt{1+3}$＝2
よって，AB＜BC＜CA
したがって，**∠C＜∠A＜∠B**
(4) △ABCは鈍角三角形であり，∠Cが最大角。
また，BC＜CA より，∠A＜∠B
よって，**∠A＜∠B＜∠C**

9 (1) ∠A＜∠B＜∠C であるから，
BC＜CA＜AB
(2) ∠A＜∠C＜∠B であるから，
BC＜AB＜CA
(3) ∠C＝180°－(∠A＋∠B)
＝180°－(45°＋90°)
＝45°
よって，∠A＝∠C＜∠B
したがって，**BC＝AB＜CA**
(4) ∠A＝180°－(∠B＋∠C)
＝180°－(55°＋60°)
＝65°
よって，∠B＜∠C＜∠A
したがって，**CA＜AB＜BC**

10 AB＝AC であるから，∠B＝∠ACB　…①
∠PCB＝∠ACB＋∠PCA であるから，
∠PCB＞∠ACB　…②
①，②より，∠PCB＞∠B
よって，PB＞PC

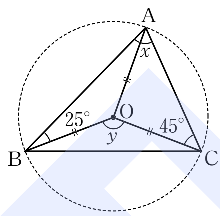
11 (1) ∠ACD　(2) BC
(3) $b+c$　(4) $a+c$

12 (1) |5－7|＜3＜5＋7 が成り立つので，三角形は**存在する**。
(2) |6－9|＝3 となり，|6－9|＜3＜6＋9 が成り立たないので，三角形は**存在しない**。
(3) |5－8|＜5＜5＋8 が成り立つので，三角形は**存在する**。

p.51～53 **❷ 三角形の外心･内心･重心**

1 (1) 両端　(2) OC　(3) 垂直二等分
(4) 頂点　(5) 等距離

2 (1) OとAを結ぶと，△OAB，△OBC，△OCAは二等辺三角形である。
∠OAB＝∠OBA＝25°
∠OAC＝∠OCA＝45°
よって，
∠$\boldsymbol{x}$＝25°＋45°＝70°
また，
∠OBC＝∠OCB＝α
とすると，



70°＋(25°＋α)
＋(α＋45°)＝180°
2α＋140°＝180°より，α＝20°
よって，**∠$\boldsymbol{y}$＝180°－20°×2＝140°**
〔別解〕 ∠yは円周角の定理を用いて，次のように，求めることができる。
∠y＝2∠x＝2×70°＝140°
(2) △OAB，△OBC，△OCAは二等辺三角形であるから，
∠$\boldsymbol{x}$＝180°－34°×2＝112°
△ABCにおいて，

よって，AB＝12

PQ＝AQ＝BQ より，PQ＝$\frac{1}{2}$AB＝**6**

15 ［1］　辺PRの中点をMとすると，点A，Bはそれぞれ△PQR，△PRSの重心であるから，平面MQS上にあり，
MA：MQ＝MB：MS＝1：3

よって，AB＝$\frac{1}{3}$QS　…①　AB∥QS　…②

同様に，BC＝$\frac{1}{3}$RT　…③　BC∥RT　…④

QS＝RT，QS⊥RT であるから，
①，③より，AB＝BC
②，④より，AB⊥BC
同様に考えると，四角形ABCDは正方形であり，多面体ABCD–EFGHのすべての面は合同な正方形である。

［2］　8つの頂点に集まる正方形の数はすべて3で等しい。

［1］，［2］から，多面体ABCD–EFGHは正六面体である。

第4章　数学と人間の活動

p.84～85

❶ 約数と倍数

1 (1)　1，3，9，−1，−3，−9
(2)　1，3，5，15，−1，−3，−5，−15

2 (1)　−3，−6，−9
(2)　−7，−14，−21

3 (1)　1＋2＋□＝9 より，□＝**6**
(2)　6＋□＋7＝18 より，□＝**5**

4　5の倍数は一の位が0か5である。
(1)　1＋1＋1＋0＝3，1＋1＋1＋5＝8
3の倍数となるのは，□＝**0**
(2)　7＋2＋1＋0＝10，7＋2＋1＋5＝15
3の倍数となるのは，□＝**5**

5 (1)　$27=3^3$ より，$\boldsymbol{n=3}$
(2)　$72=2^3\cdot3^2$ より，$\boldsymbol{n=2}$
(3)　$150=2\cdot3\cdot5^2$ より，$n=2\cdot3=\boldsymbol{6}$
(4)　$504=2^3\cdot3^2\cdot7$ より，$n=2\cdot7=\boldsymbol{14}$

6 (1)　$32=2^5$ より，正の約数の個数は
5＋1＝**6(個)**
(2)　$108=2^2\cdot3^3$ より，正の約数の個数は
(2＋1)(3＋1)＝**12(個)**
(3)　$175=5^2\cdot7$ より，正の約数の個数は
(2＋1)(1＋1)＝**6(個)**
(4)　$540=2^2\cdot3^3\cdot5$ より，正の約数の個数は
(2＋1)(3＋1)(1＋1)＝**24(個)**

p.86～87

❷ 最大公約数，最小公倍数

1 (1)　$27=3^3$，$45=3^2\cdot5$ であるから，
最大公約数は，$3^2=\boldsymbol{9}$
最小公倍数は，$3^3\cdot5=\boldsymbol{135}$
(2)　$240=2^4\cdot3\cdot5$，$168=2^3\cdot3\cdot7$ であるから，
最大公約数は，$2^3\cdot3=\boldsymbol{24}$
最小公倍数は，$2^4\cdot3\cdot5\cdot7=\boldsymbol{1680}$

2 (1)　$56=2^3\cdot7$，$80=2^4\cdot5$，$224=2^5\cdot7$
であるから，最大公約数は，$2^3=\boldsymbol{8}$
最小公倍数は，$2^5\cdot5\cdot7=\boldsymbol{1120}$
(2)　$50=2\cdot5^2$，$175=5^2\cdot7$，$140=2^2\cdot5\cdot7$
であるから，最大公約数は，**5**
最小公倍数は，$2^2\cdot5^2\cdot7=\boldsymbol{700}$

3　50と300を素因数分解すると
$50=2\cdot5^2$，$300=2^2\cdot3\cdot5^2$
よって，50との最小公倍数が300である正の整数は，$2^2\cdot3\cdot5^a$ ($a=0$，1，2) と表される。
したがって，求める整数 n は
$n=2^2\cdot3\cdot5^0$，$2^2\cdot3\cdot5^1$，$2^2\cdot3\cdot5^2$
すなわち，$\boldsymbol{n=12}$，**60**，**300**

4 (1) $6=2\cdot3$，$10=2\cdot5$ より，最大公約数は 2 であるから，**互いに素ではない。**

(2) $21=3\cdot7$，$32=2^5$ より，最大公約数は 1 であるから，**互いに素である。**

(3) $45=3^2\cdot5$，$66=2\cdot3\cdot11$ より，最大公約数は 3 であるから，**互いに素ではない。**

5 $a+1$，$a+4$ は，自然数 m，n を用いて $a+1=4m$，$a+4=5n$ と表される。

$a+9=(a+1)+8=4m+8$

$\quad=4(m+2)$ …①

$a+9=(a+4)+5=5n+5$

$\quad=5(n+1)$ …②

よって，①より，$a+9$ は 4 の倍数であり，②より，$a+9$ は 5 の倍数である。

4 と 5 は互いに素であるから，$a+9$ は $4\cdot5$ すなわち20の倍数である。

6 $a+2$，$a+8$ は，自然数 m，n を用いて $a+2=5m$，$a+8=7n$ と表される。

$a+22=(a+2)+20=5m+20$

$\quad=5(m+4)$ …①

$a+22=(a+8)+14=7n+14$

$\quad=7(n+2)$ …②

よって，①より，$a+22$ は 5 の倍数であり，②より，$a+22$ は 7 の倍数である。

5 と 7 は互いに素であるから，$a+22$ は $5\cdot7$ すなわち35の倍数である。

p.88～92

❸ 整数の割り算と商・余り

1 (1) $31=4\cdot7+3$ より，**商は 7，余りは 3**

(2) $-24=3\cdot(-8)$ より，**商は -8，余りは 0**

(3) $-15=9\cdot(-2)+3$ より，**商は -2，余りは 3**

(4) $-46=10\cdot(-5)+4$ より，**商は -5，余りは 4**

2 a，b は整数 k，l を用いて $a=5k+2$，$b=5l+4$ と表される。

(1) $a+b=(5k+2)+(5l+4)$

$\quad=5(k+l+1)+1$

よって，$a+b$ を 5 で割ったときの余りは **1**

(2) $3a+2b=3(5k+2)+2(5l+4)$

$\quad=5(3k+2l+2)+4$

よって，$3a+2b$ を 5 で割ったときの余りは **4**

(3) $ab=(5k+2)(5l+4)$

$\quad=5^2kl+5k\cdot4+2\cdot5l+2\cdot4$

$\quad=5(5kl+4k+2l+1)+3$

よって，ab を 5 で割ったときの余りは **3**

(4) $a^2+b^2=(5k+2)^2+(5l+4)^2$

$\quad=5^2k^2+2\cdot5\cdot2k+2^2+5^2l^2+2\cdot5\cdot4l+4^2$

$\quad=5(5k^2+4k+5l^2+8l+4)$

よって，a^2+b^2 を 5 で割ったときの余りは **0**

3 (1) 偶数は，整数 k を用いて $2k$ と表される。

$n^2+2n=(2k)^2+2\cdot2k$

$\quad=4k^2+4k=4k(k+1)$

連続する 2 つの整数の積 $k(k+1)$ は 2 の倍数である。

よって，$4k(k+1)$ は 8 の倍数である。

したがって，n^2+2n は 8 の倍数である。

(2) 連続する 2 つの奇数は，整数 k を用いて，$2k+1$，$2k+3$ と表される。

$(2k+3)^2-(2k+1)^2+4$

$=(4k^2+12k+9)-(4k^2+4k+1)+4$

$=8k+12=4(2k+3)$

ここで，$2k+3$ は整数であるから，$4(2k+3)$ は 4 の倍数である。

また，$2k+3$ は奇数であるから，$4(2k+3)$ は 8 の倍数ではない。

よって，連続する 2 つの奇数の 2 乗の差に 4 をたした数は，4 の倍数であるが 8 の倍数ではない。

4 (1) n は整数であるから，整数 k を用いて，$n=3k$，$n=3k+1$，$n=3k+2$ のいずれかの形で表される。

[1] $n=3k$ のとき

$n^2=(3k)^2=9k^2=3\cdot3k^2$

[2] $n=3k+1$ のとき

$n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1$

$\quad=3(3k^2+2k)+1$

[3] $n=3k+2$ のとき

$n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4$

$\quad=3(3k^2+4k+1)+1$

よって，n^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である。

(2) 奇数は，整数 k を用いて，$4k+1$，$4k+3$ のいずれかの形で表される。

[1] $n=4k+1$ のとき

$(4k+1)(4k+3)=16k^2+16k+3$

$\quad=8(2k^2+2k)+3$

[2] $n=4k+3$ のとき

$(4k+3)(4k+5)=16k^2+32k+15$

$\quad=8(2k^2+4k+1)+7$

よって，連続する 2 つの奇数の積を 8 で割った余りは 3 か 7 である。

5 $m^3n-mn^3=m^3n-mn+mn-mn^3$

$=n(m^3-m)-m(n^3-n)$

$=n(m-1)m(m+1)-m(n-1)n(n+1)$

$(m-1)m(m+1)$，$(n-1)n(n+1)$ は連続する 3 つの整数の積であるから，6 の倍数で，$6k$，$6l$，(k，l は整数)と表せる。

よって，$m^3n-mn^3=n\cdot6k-m\cdot6l$