1．三平方の定理

基本ワーク

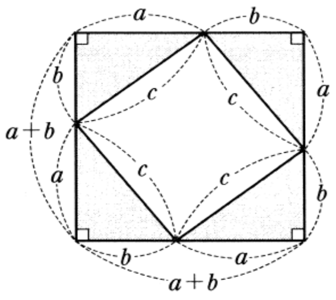
1 **例題** **三平方の定理①**

右の図を利用して，

$$a^2+b^2=c^2$$

であることを証明せよ。

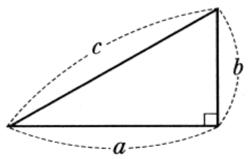
考え方　内側の正方形の面積は，外側の正方形の面積から4つの三角形の面積の和をひいて求めることができる。



ポイント　**三平方の定理①**

● 直角三角形の直角をはさむ2辺の長さを a，b，斜辺の長さを c とするとき，

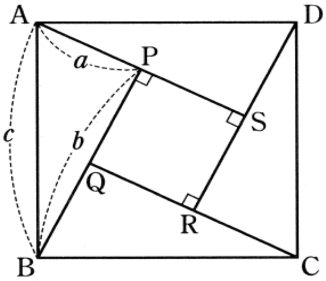
$$\boldsymbol{a^2+b^2=c^2}$$



2　直角をはさむ2辺の長さが a，b，斜辺の長さが c の合同な直角三角形を並べると，正方形ABCDができる。正方形ABCDの面積を2通りに表すことにより，

$$a^2+b^2=c^2$$

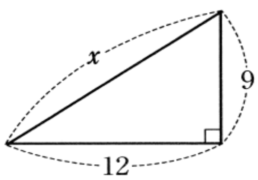
であることを証明せよ。



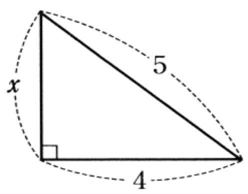
3 **例題** **三平方の定理②**

次の各図の x の長さを求めよ。

(1)



(2)



考え方　(底辺)^2＋(高さ)^2＝(斜辺)^2 に数値を代入する。

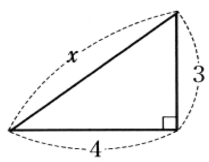
ポイント　**三平方の定理②**

● 直角三角形の3辺

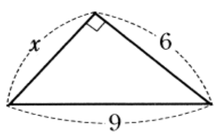
(底辺)^2＋(高さ)^2＝(斜辺)^2

例　下の図の(1)，(2)で

(1)　$x^2=3^2+4^2$

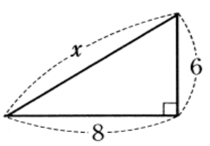


(2)　$9^2=x^2+6^2$

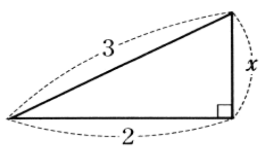


4　次の各図の x の長さを求めよ。

(1)



(2)



基本ワーク

5 例題 三平方の定理の逆

3辺の長さが次のような三角形のうち，直角三角形になるのはどれか。

(1)　3 cm，4 cm，5 cm

(2)　3 cm，5 cm，7 cm

(3)　$\sqrt{5}$ cm，$\sqrt{12}$ cm，$\sqrt{13}$ cm

考え方　$a^2+b^2=c^2$の式で，最大辺をcとし，等式が成り立てば，その三角形は直角三角形である。

6　3辺の長さが次のような三角形のうち，直角三角形になるのはどれか。また，直角はどの長さの辺に対する角か。

(1)　2 cm，4 cm，5 cm

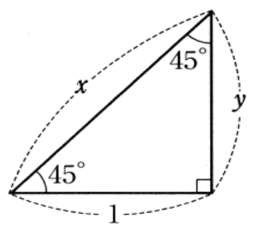
(2)　6 cm，8 cm，10cm

(3)　$\sqrt{3}$ cm，2 cm，$\sqrt{5}$ cm

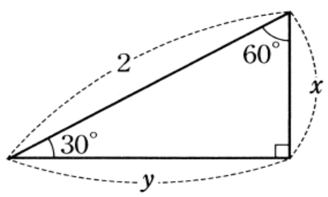
7 例題 特別な三角形の3辺の比

次の各図のx，yの長さを求めよ。

(1)



(2)

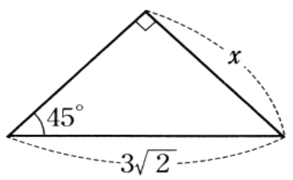


考え方　30°の定規の3辺の比は，1：2：$\sqrt{3}$

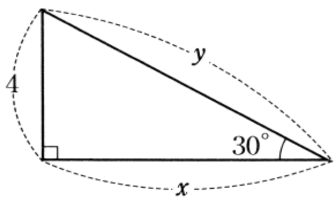
45°の定規の3辺の比は，1：1：$\sqrt{2}$

8　次の各図のx，yの長さを求めよ。

(1)



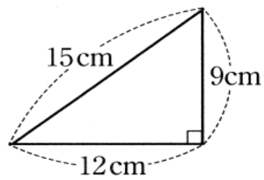
(2)



ポイント 三平方の定理の逆

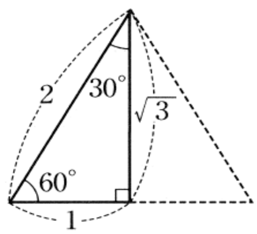
- 三角形の3辺の長さa，b，cの間に，$a^2+b^2=c^2$という関係が成り立てば，その三角形は長さcの辺を斜辺とする直角三角形である。

例　3辺の長さが9 cm，12cm，15cmの三角形は，$15^2=9^2+12^2$が成り立つから，15cmを斜辺とする直角三角形になる。

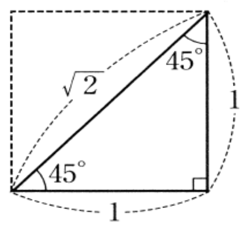


ポイント 特別な三角形の3辺の比

①内角が30°，60°，90°
（正三角形の半分）
1：2：$\sqrt{3}$



②内角が45°，45°，90°
（正方形の半分）
1：1：$\sqrt{2}$

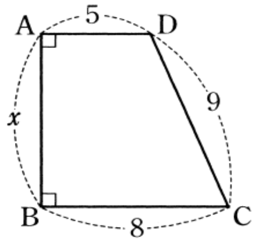


2．三平方の定理と平面図形（1）

基本ワーク

9 例題 三角形，四角形への応用①

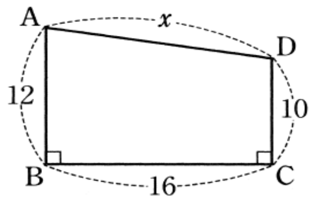
右の図の x の長さを求めよ。



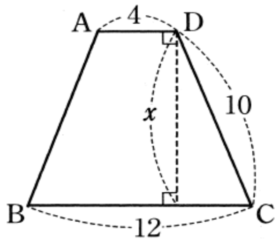
考え方　点Dから辺BCに垂線をおろし，直角三角形をつくる。

10 次の各図の x の長さを求めよ。(2)は，AB＝DCである。

(1)



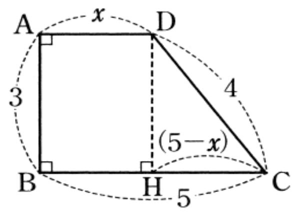
(2)



ポイント　四角形と三平方の定理

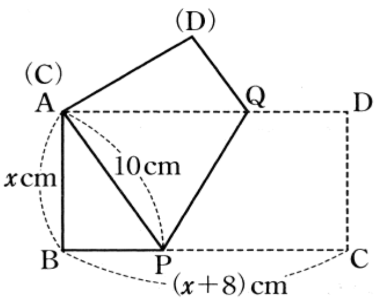
- 三平方の定理が利用できるように，補助線をひく。

例　下の図の台形ABCDでDから辺BCに垂線DHをひき，
△DHCで$DC^2=DH^2+HC^2$
$4^2=3^2+(5-x)^2$



11 例題 三角形，四角形への応用②

横が縦より 8 cm長い長方形ABCDの紙がある。図のように，頂点CがAに重なるように折り，折り目をPQとすると，PA＝10cmであった。AB＝$x$cmとして，xの値を求めよ。　〈大分〉

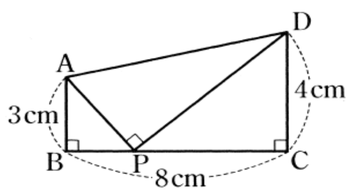


考え方　BPの長さを x の 1 次式で表し，△ABPに三平方の定理をあてはめる。

ポイント　四角形への応用

11　折り返しの問題では，等しい線分の長さに注目し，三平方の定理を適用して，2次方程式をつくる。

12 右の図で，四角形ABCDは∠B＝∠C＝90°の台形である。辺BC上に，∠APD＝90°となるような点Pをとるとき，APの長さを求めよ。

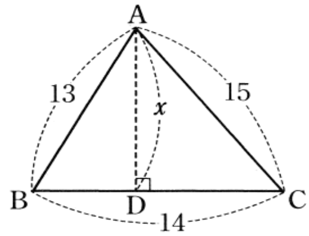


12　まずADの長さを求める。次に，BP＝$x$cmとおき，AP^2，PD^2を x の式で表し，
$AP^2+PD^2=AD^2$にあてはめる。

基本ワーク

13 例題 三角形の高さ

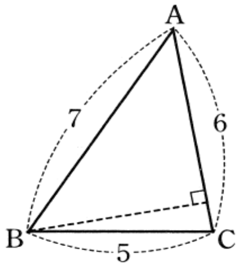
次の図の x の長さを求めよ。



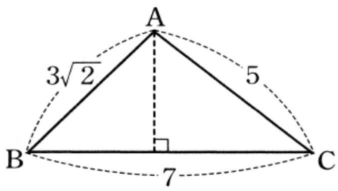
考え方　BD＝a とすると，CD＝14－a だから，△ABD，△ACD に三平方の定理を用い，まず，a の値を求める。

14　次の△ABC の面積を求めよ。

(1)

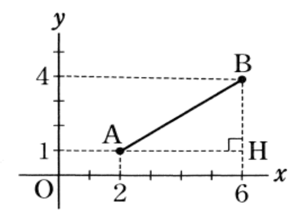


(2)



15 例題 2点間の距離

2点 A(2，1)，B(6，4)の間の距離を求めよ。



考え方　直角三角形 ABH に三平方の定理を用いる。

16　次の2点 A，B 間の距離を求めよ。

(1)　A(3，5)，B(1，1)　　(2)　A(2，－6)　B(－5，2)

17　放物線 $y=x^2$ の上に2点 A，B がある。それぞれの x 座標が －1，2のとき，2点 A，B 間の距離を求めよ。

ポイント　三角形の高さ

● **直角三角形ではない三角形の高さの求め方**

2つの直角三角形をつくり，三平方の定理を利用する。

例　下の図の△ABC で，x の値を求めるには，CH＝a とおき，まず a の値を求める。

△ACHで，

$x^2=5^2-a^2$ ……………①

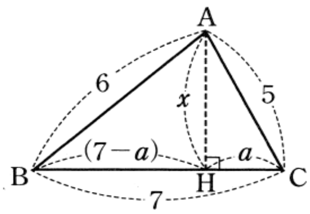
△ABHで，

$x^2=6^2-(7-a)^2$ ………②

①＝②から，

$5^2-a^2=6^2-(7-a)^2$

これを解いて，a の値を求める。



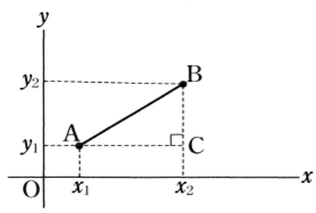
ポイント　2点間の距離

● 2点 A(x_1，y_1)，B(x_2，y_2)間の距離は

AC＝x_2-x_1，BC＝y_2-y_1 より，

$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

で求めることができる。



例　2点 A(2，1)，B(5，－3)間の距離は，

$AB=\sqrt{(5-2)^2+(-3-1)^2}$

$=\sqrt{25}=5$

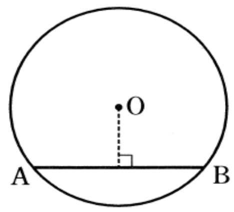
17　それぞれの y 座標をまず求める。

3．三平方の定理と平面図形（2）

基本ワーク

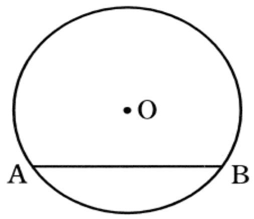
18 例題 円の弦の長さ

半径 5 cm の円で，中心Oからの距離が 3 cm であるような弦 AB の長さを求めよ。



考え方　中心Oから弦 AB に垂線 OH をひくと，H は AB の中点である。

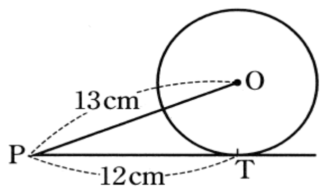
19　半径 4 cm の円Oで，弦 AB の長さが 6 cm のとき，中心Oから弦 AB までの距離を求めよ。



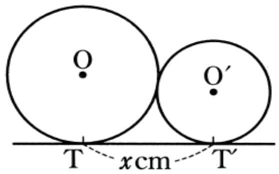
20 例題 円の接線の長さ

次の各図の x の長さを求めよ。ただし，O，O′は円の中心，T，T′は接点である。

(1)　円Oの半径 x cm



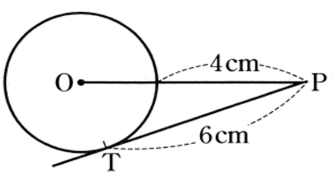
(2)　円Oの半径 5 cm，円O′の半径 3 cm

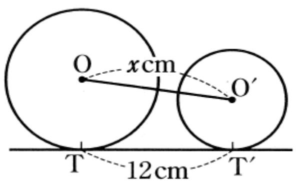


考え方　(2)　O′から OT に垂線O′H をひくと，O′H＝T′T となる。

21　次の各図の x の長さを求めよ。ただし，O，O′は円の中心，T，T′は接点である。

(1)　円Oの半径 x cm　　(2)　円Oの半径 6 cm，円O′の半径 4 cm





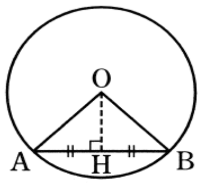
ポイント 円の弦の長さ

● **円の弦**

①円の中心から弦にひいた垂線は，その弦を 2 等分する。

②弦の垂直二等分線は，円の中心を通る。

①，②の性質をもとにして，三平方の定理を用いる。



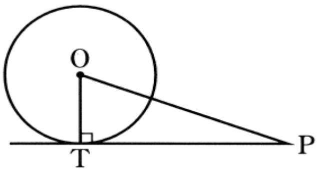
上図で，$OA^2=OH^2+AH^2$が成り立つ。

ポイント 円の接線の長さ

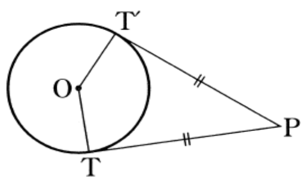
● 円の接線は，接点を通る半径に垂直であるから，

$PO^2=PT^2+OT^2$

が成り立つ。



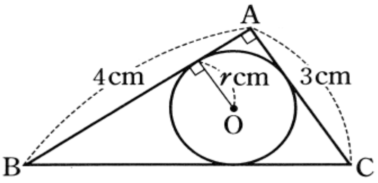
● 円外の点からひいた 2 本の接線の長さは等しい。



基本ワーク

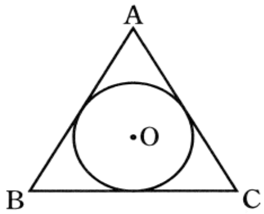
22 例題 内接円

右の図のような直角三角形ABCに円Oが内接している。このとき，円Oの半径 r の長さを求めよ。

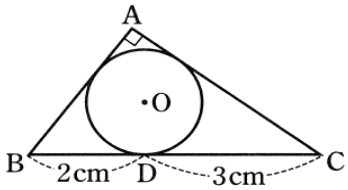


考え方　公式 $S=\frac{1}{2}r\ell$ を利用する。

23　右の図のように，AB＝AC＝5 cm，BC＝6 cmの二等辺三角形ABCに円Oが内接している。このとき，円Oの半径を求めよ。

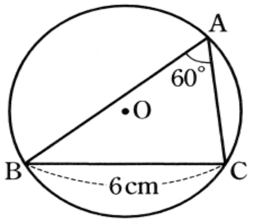


24　右の図のように，直角三角形ABCに円Oが内接し，Dは辺BCとの接点である。BD＝2 cm，DC＝3 cmのとき，円Oの半径を求めよ。



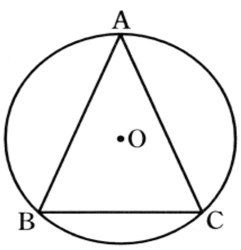
25 例題 外接円

右の図の三角形ABCで，∠A＝60°，BC＝6 cmである。この△ABCの外接円Oの半径を求めよ。



考え方　中心角∠BOC＝2∠BACまた，△OBCは二等辺三角形である。

26　右の図の△ABCは，AB＝AC＝13cm，BC＝10cmの二等辺三角形である。このとき，△ABCの外接円Oの半径を求めよ。

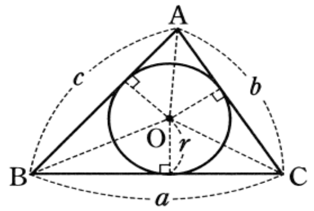


ポイント 三角形の内接円

● 三角形の面積と内接円

△ABCの面積を S，周の長さを ℓ，内接円の半径を r とすると，

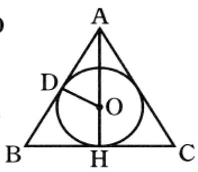
$S=\frac{1}{2}r\ell$（$\ell=a+b+c$）



● 内接円の半径の求め方

①$S=\frac{1}{2}r\ell$ を利用する。

②二等辺三角形の場合には，△ABH∽△AODを利用するか，面積の関係より求められる。



③正三角形の場合には，内接円の中心が正三角形の重心に一致することから求める。

④頂点から接点までの長さが等しいことをもとにして，方程式をつくって求める。

ポイント 外接円

● 外接円の半径は，次の性質などをもとにして求める場合が多い。

①外接円の中心は辺の垂直二等分線上にある。

②外接円の中心から頂点までの距離は等しい。

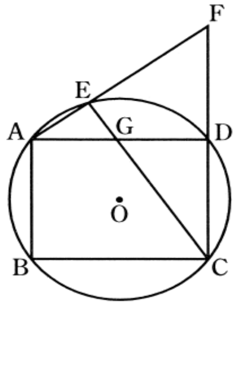
③同じ弧に対する中心角は円周角の2倍である。

26　辺BCの中点をM，半径を x cmとして，△OBMで考える。

基本ワーク

27 例題 円と三平方の定理①

右の図のように，長方形ABCDが円Oに内接している。$\overset{\frown}{AD}$上に，$\overset{\frown}{ED}=\overset{\frown}{DC}$となる点Eをとり，直線AEと辺CDの延長との交点をF，ADとCEの交点をGとする。次の各問いに答えよ。

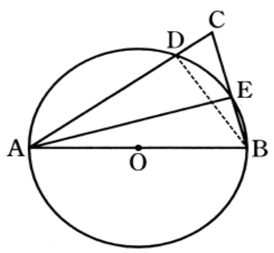


(1)　AC＝AFであることを証明せよ。

(2)　円Oの半径が5 cmで，AB＝6 cmのとき，EFの長さを求めよ。

考え方　(2)　△ACD∽△CFEが成り立つ。

28　右の図で，△ABCはAB＝AC＝3 cm，BC＝2 cmの二等辺三角形であり，点D，Eは，辺ABを直径とする円Oと辺AC，CBとの交点である。次の各問いに答えよ。

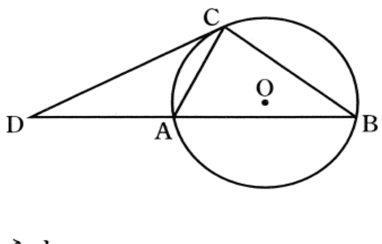


(1)　$\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EB}$であることを証明せよ。

(2)　BDの長さを求めよ。

29★ 例題 円と三平方の定理②［発展］

右の図のように，円Oに内接する△ABCがあり，点Cにおける円Oの接線と辺BAの延長との交点をDとする。DB＝9 cm，DC＝6 cmのとき，次の各問いに答えよ。



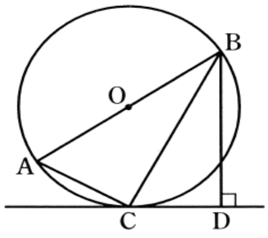
(1)　DAの長さを求めよ。

(2)　ABが円Oの直径のとき，ACの長さを求めよ。

考え方　(1)　△DAC∽△DCBが成り立つ。

(2)　AC＝$2a$，BC＝$3a$とおく。

30★　右の図で，ABは円Oの直径であり，直線CDは点Cで円Oに接し，∠CDB＝90°である。∠ABD＝60°，AB＝12cmのとき，BDの長さを求めよ。



ポイント　**円周角と三平方の定理**

- 円を含む図形の問題では，次のような場合に三平方の定理をよく使う。
  - ①図形の1つの円が直径のとき…直径に対する円周角は90°なので，直角三角形ができる。
  - ②二等辺三角形があるとき…二等辺三角形の頂点と底辺の中点を結ぶ線分は，底辺と垂直に交わるので，直角三角形ができる。
  - ③接線があるとき…接点と円の中心を結ぶ線分は，接線と垂直に交わり，直角三角形ができる。
  - ④特別な三角形になるとき…円周角が30°，60°，45°などのときは注意する。

ポイント　**接線と三平方の定理**

- 接線を含む図形では，直角三角形ができやすく，三平方の定理を使う場合が特に多い。

30　∠CAB＝∠DCB（接弦定理）より，△ACB∽△CDBがいえる。

4．三平方の定理と空間図形（1）

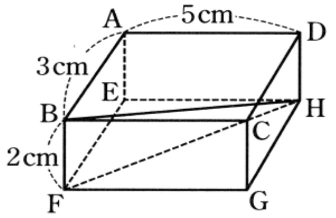
基本ワーク

31 例題 **直方体の対角線の長さ**

右の図の直方体について，次の各問いに答えよ。

(1)　FH の長さを求めよ。

(2)　BH の長さを求めよ。



考え方　(2)　△BFH に三平方の定理を用いて，$BH^2 = BF^2 + FH^2$

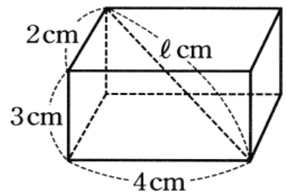
ポイント **直方体の対角線**

● 縦 a cm，横 b cm，高さ c cm の直方体の対角線の長さ ℓ は，

$\ell = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

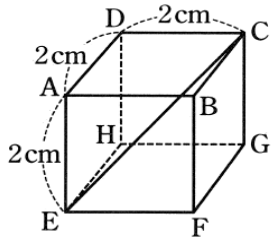
例　下の図で，

$\ell = \sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{29}$ (cm)

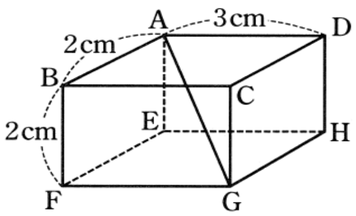


32　次の立方体，直方体の対角線の長さを求めよ。

(1)

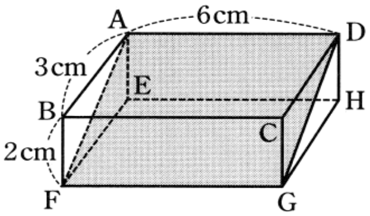


(2)



33 例題 **直方体への応用**

右の図のような直方体で，4 点 A，F，G，D を結んでできる四角形 AFGD の面積を求めよ。



考え方　四角形 AFGD は長方形だから，AD×AF で求まる。

ポイント **直方体への応用**

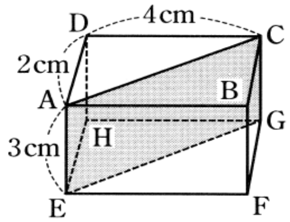
● **立体の中の平面図形の面積**

三平方の定理を用いて，面積の公式が使えるように，辺の長さを求める。

例　下の図で，

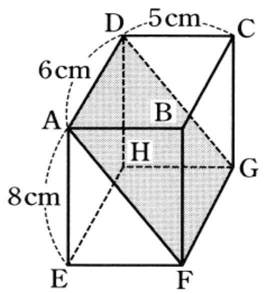
$AC = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ だから，四角形 AEGC の面積は，

$2\sqrt{5} \times 3 = 6\sqrt{5}$ (cm²)

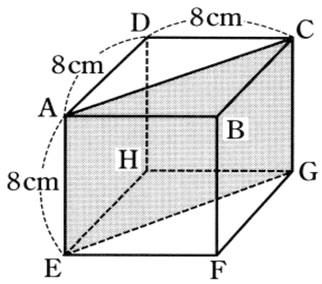


34　次の直方体，立方体で，影をつけた部分の面積を求めよ。

(1)



(2)



基本ワーク

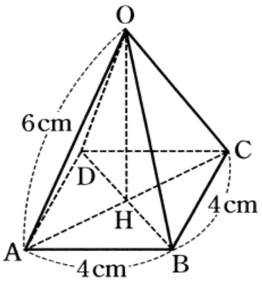
35 例題 角錐への応用

右の図の正四角錐について，次の各問いに答えよ。

(1) AH の長さを求めよ。

(2) OH の長さを求めよ。

(3) この正四角錐の体積を求めよ。

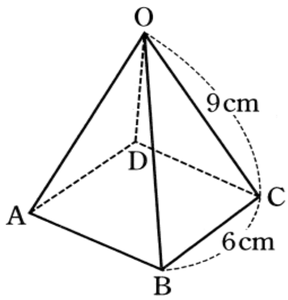


考え方 OH が高さになる。△OAH で，三平方の定理を利用する。

36 右の図の正四角錐について，次の各問いに答えよ。

(1) この正四角錐の高さを求めよ。

(2) この正四角錐の体積を求めよ。

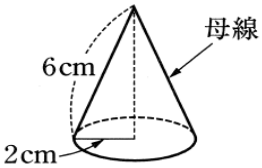


37 例題 円錐への応用

右の図の円錐について，次の各問いに答えよ。

(1) この円錐の体積を求めよ。

(2) この円錐の表面積を求めよ。



考え方 展開図の側面のおうぎ形の中心角を a° とすると，

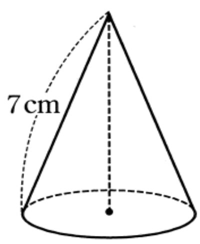
$$\frac{a}{360}=\frac{\text{底面の半径}}{\text{母線}}$$

38 右の図は，母線の長さ 7 cm，底面の円周の長さが 4π cmの円錐である。次の各問いに答えよ。

(1) この円錐の高さは何cmか。

(2) この円錐の体積は何cm^3か。

(3) この円錐の表面積は何cm^2か。



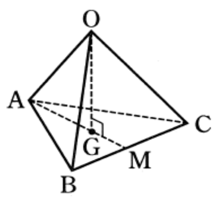
ポイント 正角錐の高さ

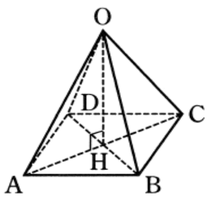
● 正四角錐(底面が正方形である四角錐)では，頂点Oから底面に垂線OHをひくと，Hは底面の正方形ABCDの対角線の交点になる。このことから，OA，AH の長さがわかると，△OAH で三平方の定理を利用して，高さ OH を求めることができる。

$$\text{OH}=\sqrt{\text{OA}^2-\text{AH}^2}$$

注 正三角錐の場合は，頂点Oから底面に垂線OGをひくと，Gは底面の正三角形ABCの重心になり，辺BCの中点をMとすると，

AG：GM＝2：1





ポイント 円錐の高さ

● 母線の長さを ℓ，底面の半径を r，高さを h とすると，

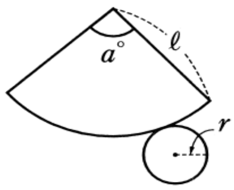
$$\ell^2=r^2+h^2$$

が成り立つ。

注 さらに，側面を展開したときのおうぎ形の中心角を a° とするとき，

$$\frac{a}{360}=\frac{r}{\ell}$$

である。

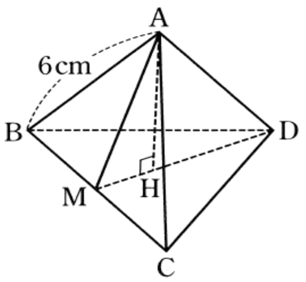


5．三平方の定理と空間図形（2）

基本ワーク

39 例題 正四面体

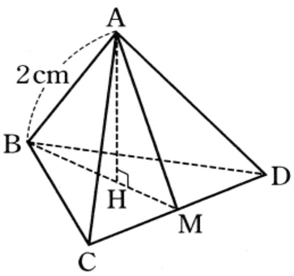
右の図の正四面体で，Mは辺BCの中点である。次の各問いに答えよ。



(1) DMの長さを求めよ。
(2) DHの長さを求めよ。
(3) AHの長さを求めよ。
(4) この立体の体積を求めよ。

考え方 (2) Hは△BCDの重心だから，DH：HM＝2：1より，$DH=\frac{2}{3}DM$

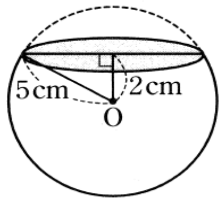
40 右の図は，1辺が2cmの正四面体である。CDの中点をM，Aから△BCDにおろした垂線をAHとするとき，次の各問いに答えよ。



(1) AHの長さを求めよ。
(2) 正四面体の体積を求めよ。

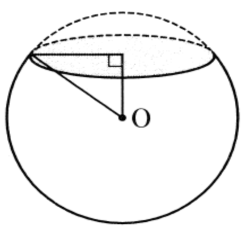
41 例題 球の切り口

右の図は，半径5cmの球Oを，中心Oから2cmの距離にある平面で切ったものである。このとき，切り口の面積を求めよ。



考え方 切り口は円になる。三平方の定理を用いて半径を求める。

42 球Oを平面で切るときについて，次の各問いに答えよ。



(1) 半径が6cmの球Oを，球の中心から4cmの距離にある平面で切ったとき，切り口の面積を求めよ。
(2) 球の中心から7cmの距離にある平面で球Oを切ったとき，切り口の面積が15π cm^{2}になった。この球Oの半径を求めよ。

ポイント 正四面体

● 1辺がaの正四面体の体積は次の順に求める。

$DM=\sqrt{3}MC=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

Hは△BCDの重心だから，

DH：HM＝2：1より

$DH=\frac{2}{3}DM=\frac{\sqrt{3}}{3}a$

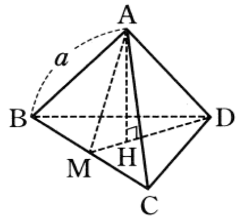
△AHDで，

$AH=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$

$\triangle BCD=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$より，

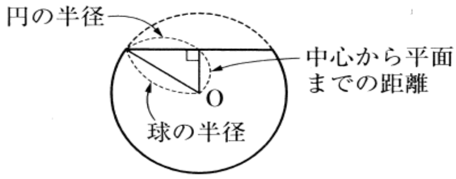
正四面体の体積は，

$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$



ポイント 球の切り口

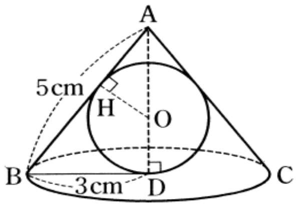
● 球をどのような平面で切っても切り口は円になる。切り口の円の半径は下の図の関係で求める。



基本ワーク

43 例題 **内接球**

右の図のように，底面の円Dの半径が3 cm，母線ABの長さが5 cmの円錐に，球Oが内接している。Hは母線ABと球Oとの接点である。次の各問いに答えよ。



(1)　球Oの半径をx cmとするとき，AOの長さをxの1次式で表せ。

(2)　球Oの半径を求めよ。

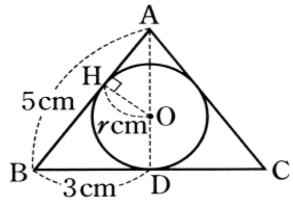
考え方　内接球の半径を求めるには，断面の△ABCに内接する円で考え，△ABD∽△AOHを利用する。

ポイント　内接球

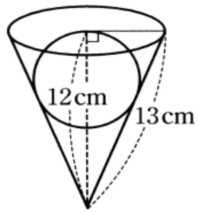
● **内接球の半径の求め方**

断面図にして考え，内接円の半径の求め方(P.116)と同様にして求める。

円錐の場合，断面図は二等辺三角形になるので，内接円の半径は相似を利用して求めるとよい。



44　右の図のように，母線の長さが13cm，高さが12cmの円錐に球が内接しているとき，次の各問いに答えよ。

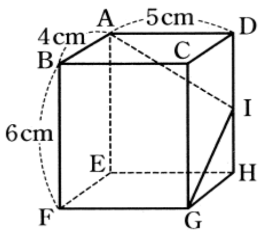


(1)　円錐の底面の半径を求めよ。

(2)　球の半径を求めよ。

45 例題 **最短距離**

右の図は，AB = 4 cm，AD = 5 cm，BF = 6 cmの直方体である。頂点Aから，辺DH上の点Iを通って頂点Gにいくとき，AI + IGの最短の長さを求めよ。

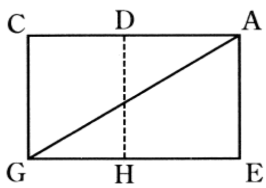


考え方　展開図で，AD＋DCとCGを2辺とする長方形の頂点AとGを結ぶ線分の長さが最短距離になる。

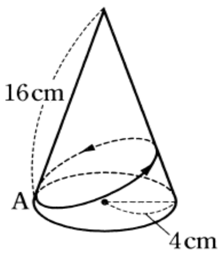
ポイント　最短距離

● **直方体の最短距離**

側面の展開図で，2点を結ぶ線分の長さが最短距離になる。



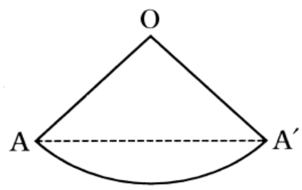
46　右の図のように，底面の半径が4 cm，母線の長さが16cmの円錐がある。底面の周上の点Aから出発して，側面を1回転してもとにもどってくるとき，最短距離を求めたい。次の各問いに答えよ。



(1)　側面を展開したおうぎ形の中心角は何度か。

(2)　最短距離を求めよ。

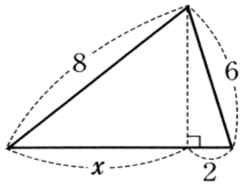
46　側面の展開図で，おうぎ形の弧の両端を結ぶ線分の長さが最短距離になる。



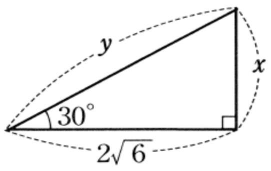
章のまとめ

1　次の各図の x，y の長さを求めよ。

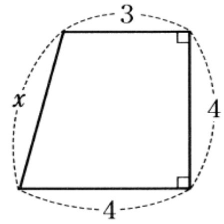
(1)



(2)

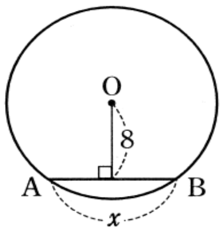


(3)

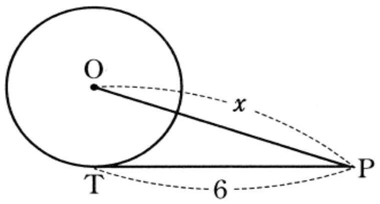


2　次の各図の x の長さを求めよ。O，O′は円の中心，T，T′は接点である。

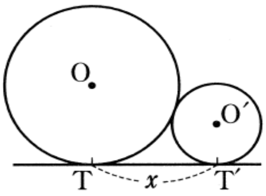
(1)　円Oの半径10



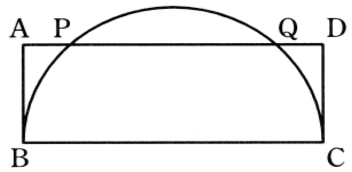
(2)　円Oの半径２



(3)　円Oの半径４，円O′の半径２



3　AB＝３cm，BC＝８cmの長方形ABCDがある。右の図のように，BCを直径とする半円をかき，その弧と辺ADの交点をP，Qとするとき，線分PQの長さを求めよ。

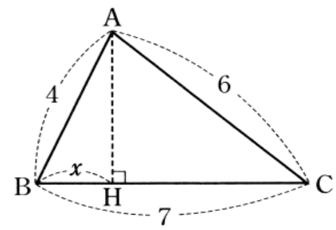


4　3点A(2，－6)，B(－2，6)，C(6，2)を頂点とする三角形はどんな三角形か。

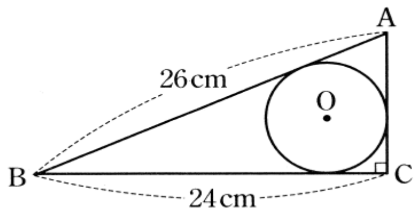
5　右の図の△ABCについて，次の各問いに答えよ。

(1)　△ABH，△ACHでAH^2をそれぞれ x を用いて表せ。

(2)　BHの長さを求めよ。



6　右の図の直角三角形ABCに内接する円Oの半径を求めよ。



7　次の各問いに答えよ。

(1)　１辺が４cmの立方体の対角線の長さを求めよ。

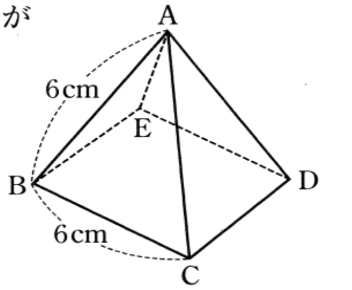
(2)　縦，横，高さが３cm，４cm，２cmの直方体の対角線の長さを求めよ。

(3)　母線の長さ７cm，底面の半径３cmの円錐の高さを求めよ。

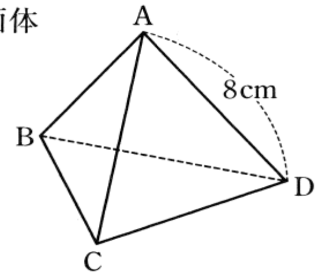
(4)　ある球を，中心Oから３cmの距離の平面で切ったところ，切り口は半径４cmの円であった。この球の半径を求めよ。

8　次の立体の体積を求めよ。

(1)　すべての辺の長さが６cmの正四角錐



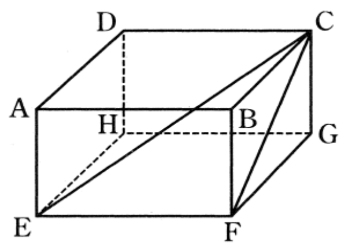
(2)　１辺が８cmの正四面体



9　右の図は，AB＝９cm，AD＝８cm，AE＝６cmの直方体である。これについて，次の各問いに答えよ。

(1)　△CEFの面積を求めよ。

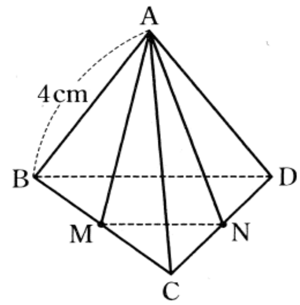
(2)　点FからECに垂線FIをひくとき，FIの長さを求めよ。



10　右の図の正四面体ABCDで，点M，Nはそれぞれ辺BC，CDの中点である。次の各問いに答えよ。

(1)　この正四面体ABCDの体積を求めよ。

(2)　△AMNの面積を求めよ。



11　右の図のように，底面の半径が４cmで母線の長さが６cmの円錐がある。これについて，次の各問いに答えよ。

(1)　この円錐の体積を求めよ。

(2)　この円錐に内接する球の半径を求めよ。