センター試験 40 分模試

第 1 回

数学Ⅱ・数学 B

第 1 問 （配点 30 点）

［1］ $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で関数 $f(\theta) = 2\sin\theta - \dfrac{1}{3}\cos 2\theta + 1$ を考える。

$\sin\theta = t$ とおけば

$$\cos 2\theta = \boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}\, t^{\boxed{\text{ウ}}}$$

であるから，$y = f(\theta)$ とおくと

$$y = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} t^{\boxed{\text{ウ}}} + \boxed{\text{カ}}\, t + \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である。したがって，y の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ であり，最小値は $-\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

また，α が $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす角で $f(\alpha) = \dfrac{38}{27}$ のとき

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{\boxed{\text{セ}}} + \boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

である。

［2］　不等式

$$\log_2 x - \frac{1}{2}\log_x 8 \leqq \frac{5}{2} \quad \cdots\cdots （＊）$$

が成り立つような x の値の範囲を求めよう。

(1)　不等式（＊）において，x は対数の底であるから

$$x > \boxed{ツ} \quad かつ \quad x \neq \boxed{テ}$$

を満たさなければならない。また

$$\log_x 8 = \frac{\boxed{ト}}{\log_2 x}$$

である。

(2)　不等式（＊）は

$\boxed{ツ} < x < \boxed{テ}$ のとき

$$\boxed{ナ}(\log_2 x)^2 - \boxed{ニ}\log_2 x - \boxed{ヌ} \geqq 0$$

$x > \boxed{テ}$ のとき

$$\boxed{ナ}(\log_2 x)^2 - \boxed{ニ}\log_2 x - \boxed{ヌ} \leqq 0$$

と変形できる。したがって，求める x の値の範囲は

$$\boxed{ツ} < x \leqq \frac{\sqrt{\boxed{ネ}}}{\boxed{ノ}}, \quad \boxed{テ} < x \leqq \boxed{ハ}$$

である。

第２問　（配点 43 点）

k，t を実数とし，座標平面上に点 P（0，$1-t^2$）をとる。曲線

$$y = x^3 - 2x^2 - 3x + k$$

を C とする。

(1)　点 Q（t，t^3-2t^2-3t+k）における曲線 C の接線が点 P を通るとすると

$$k = \boxed{\text{ア}}\,t^3 - \boxed{\text{イ}}\,t^2 + 1$$

が成り立つ。

$$p(t) = \boxed{\text{ア}}\,t^3 - \boxed{\text{イ}}\,t^2 + 1$$

とおくと，関数 $p(t)$ は

$t = \boxed{\text{ウ}}$ で極大値 $\boxed{\text{エ}}$ をとり，

$t = \boxed{\text{オ}}$ で極小値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる。

したがって，点 P を通る曲線 C の接線の本数がちょうど 2 本となるのは，k の値が $\boxed{\text{キ}}$ または $\boxed{\text{ク}}$ のときである。（ただし，$\boxed{\text{キ}} < \boxed{\text{ク}}$ とする）

(2)　$k=0$ とする。このとき，曲線 C を原点に関して対称移動して得られる曲線を D，x 軸方向に -1，y 軸方向に 6 平行移動して得られる曲線を E とする。

曲線 D を表す式は

$$y=x^3+\boxed{\text{ケ}}\,x^2-\boxed{\text{コ}}\,x$$

であり，曲線 E を表す式は

$$y=x^3+x^2-\boxed{\text{サ}}\,x+\boxed{\text{シ}}$$

である。したがって，曲線 D と曲線 E の交点の x 座標は

$$x=\boxed{\text{スセ}},\ \boxed{\text{ソ}}$$

である。よって，曲線 D，E と直線 $x=2$，y 軸で囲まれた二つの図形の面積の和は

$$\boxed{\text{タ}}$$

である。

第３問　（配点 27 点）

数列$\{a_n\}$は３から始まり２ずつ増えていく自然数の列である。これを次のように群に分ける。

$$3,\ 5,\ 7 \mid 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17 \mid 19,\ 21,\ 23,\ 25,\ 27,\ 29,\ 31 \mid 33,\ \cdots$$

第１群　　第２群　　第３群

ここで，一般に第n群は$(2n+1)$個の項からなるものとする。第n群の末項をb_nで表す。

(1)　$b_1 = 7$，$b_2 = 17$，$b_3 = 31$，$b_4 = \boxed{\text{アイ}}$ である。

一般に，第k群の末項b_kは

$$b_k = \boxed{\text{ウ}}\,k^2 + \boxed{\text{エ}}\,k + \boxed{\text{オ}} \qquad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と表せる。

よって，2011 は第$\boxed{\text{カキ}}$群の小さい方から$\boxed{\text{クケ}}$番目の項である。

(2)　数列$\{b_n\}$と$\{a_n\}$の第n項の差をとった数列$\{b_n - a_n\}$を数列$\{c_n\}$とする。

$$c_n = \boxed{\text{コ}}\,n^2 + \boxed{\text{サ}}\,n$$

であるから

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\,n\left(n+\boxed{\text{セ}}\right)\left(n+\boxed{\text{ソ}}\right)$$ （ただし，$\boxed{\text{セ}} < \boxed{\text{ソ}}$ とする）

また，

$$\frac{1}{c_n} = \frac{1}{\boxed{\text{タ}}}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+\boxed{\text{チ}}}\right)$$

であるから

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k} = \frac{n}{\boxed{\text{ツ}}\,(n+\boxed{\text{テ}})}$$

である。

センター試験 40 分模試　第 1 回

問題番号（配点）	設問	解答記号	正解	配点	採点
第1問 (30)	[1]	$\boxed{ア}-\boxed{イ}t^{\boxed{ウ}}$	$1-2t^2$	3	
		$\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}t^{\boxed{ウ}}+\boxed{カ}t+\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$	$\dfrac{2}{3}t^{\boxed{2}}+2t+\dfrac{2}{3}$	3	
		$\dfrac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サ}}$	$\dfrac{10}{3}$	3	
		$-\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$	$-\dfrac{2}{3}$	3	
		$\dfrac{\sqrt{\boxed{セ}}+\boxed{ソ}\sqrt{\boxed{タ}}}{\boxed{チ}}$	$\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$	3	
			小　計		点
	[2]	$\boxed{ツ}$	0	2	
		$\boxed{テ}$	1	2	
		$\dfrac{\boxed{ト}}{\log_2 x}$	$\dfrac{3}{\log_2 x}$	2	
		$\boxed{ナ}(\log_2 x)^2-\boxed{ニ}\log_2 x-\boxed{ヌ}$	$2(\log_2 x)^2-5\log_2 x-3$	3	
		$\dfrac{\sqrt{\boxed{ネ}}}{\boxed{ノ}}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	3	
		$\boxed{ハ}$	8	3	
			小　計		点
第2問 (43)		$\boxed{ア}t^3-\boxed{イ}t^2+1$	$2t^3-3t^2+1$	3	
		$\boxed{ウ}$	0	3	
		$\boxed{エ}$	1	3	
		$\boxed{オ}$	1	3	
		$\boxed{カ}$	0	3	
		$\boxed{キ}$	0	4	
		$\boxed{ク}$	1	4	
		$x^3+\boxed{ケ}x^2-\boxed{コ}x$	x^3+2x^2-3x	4	
		$x^3+x^2-\boxed{サ}x+\boxed{シ}$	x^3+x^2-4x+2	4	
		$\boxed{スセ}$	-2	4	
		$\boxed{ソ}$	1	4	
		$\boxed{タ}$	3	4	
			小　計		点
第3問 (27)		$\boxed{アイ}$	49	3	
		$\boxed{ウ}k^2+\boxed{エ}k+\boxed{オ}$	$2k^2+4k+1$	3	
		$\boxed{カキ}$	31	3	

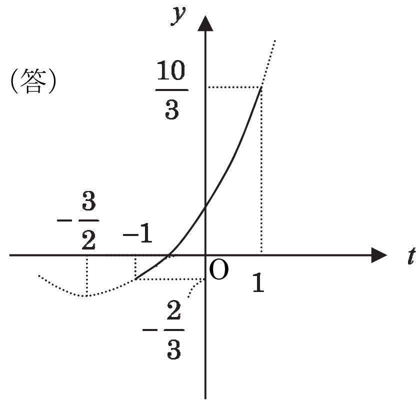
		$\boxed{クケ}$	45	3	
		$\boxed{コ}n^2+\boxed{サ}n$	$2n^2+2n$	3	
		$\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}n\left(n+\boxed{セ}\right)\left(n+\boxed{ソ}\right)$	$\dfrac{2}{3}n(n+1)(n+2)$	4	
		$\dfrac{1}{\boxed{タ}}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+\boxed{チ}}\right)$	$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$	4	
		$\dfrac{n}{\boxed{ツ}(n+\boxed{テ})}$	$\dfrac{n}{2(n+1)}$	4	
			小　計		点
			合　計		点

第１問

［1］２倍角の公式から　$\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta = 1-2t^2$　…（答）

であるから　$y=f(\theta)=2t-\dfrac{1}{3}(1-2t^2)+1=\dfrac{2}{3}t^2+2t+\dfrac{2}{3}$　…（答）

$$=\frac{2}{3}\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{6}$$



$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき　$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$　$\Leftrightarrow$　$-1 \leqq t \leqq 1$

であるから，　右のグラフより

$t=1$　のとき最大値　$y=\dfrac{2}{3}+2+\dfrac{2}{3}=\dfrac{10}{3}$　…（答）

$t=-1$　のとき最小値　$y=\dfrac{2}{3}-2+\dfrac{2}{3}=-\dfrac{2}{3}$　…（答）　また，$f(\alpha)=\dfrac{38}{27}$ のとき

$\dfrac{2}{3}t^2+2t+\dfrac{2}{3}=\dfrac{38}{27}$　$\Leftrightarrow$　$9t^2+27t-10=0$　$\Leftrightarrow$　$(3t+10)(3t-1)=0$　$\Leftrightarrow$　$t=-\dfrac{10}{3},\dfrac{1}{3}$

$-1 \leqq \sin\alpha \leqq 1$　であるから　$t=\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$　また　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$　より　$\cos\alpha>0$

よって　$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\dfrac{1}{9}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　加法定理を用いて

$\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\alpha\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos\alpha\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$　…（答）

［2］(1) 対数の底の条件から　$x>0$　かつ　$x \neq 1$　…（答）

また，底の変換の公式から　$\log_x 8=\dfrac{\log_2 8}{\log_2 x}=\dfrac{3}{\log_2 x}$　…（答）

(2) 不等式（＊）は　$\log_2 x-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{\log_2 x} \leqq \dfrac{5}{2}$

（ｉ）$\log_2 x<0$　すなわち　$0<x<1$　のとき

$2(\log_2 x)^2-3 \geqq 5\log_2 x$　$\Leftrightarrow$　$2(\log_2 x)^2-5\log_2 x-3 \geqq 0$　…（答）

$\Leftrightarrow$　$(2\log_2 x+1)(\log_2 x-3) \geqq 0$

条件より　$\log_2 x \leqq -\dfrac{1}{2} \iff 0 < x \leqq 2^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

（ⅱ）$\log_2 x > 0$　すなわち　$x > 1$　のとき

$(2\log_2 x + 1)(\log_2 x - 3) \leqq 0$

条件より　$0 < \log_2 x \leqq 3 \iff 1 < x \leqq 2^3 = 8$

（ⅰ）（ⅱ）より　$0 < x \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，　$1 < x \leqq 8$　…（答）

第２問

(1)　$y = x^3 - 2x^2 - 3x + k$　より　$y' = 3x^2 - 4x - 3$　だから，点 Q における接線の傾きは　$3t^2 - 4t - 3$

となり，接線の方程式は

$$y - (t^3 - 2t^2 - 3t + k) = (3t^2 - 4t - 3)(x - t)$$

である。これが点 $\mathrm{P}(0,\ 1 - t^2)$ を通るとき

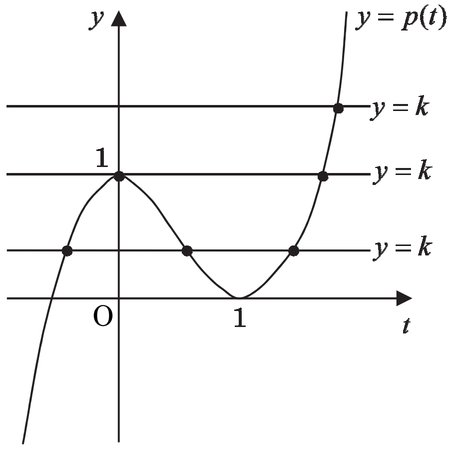
$$1 - t^2 - (t^3 - 2t^2 - 3t + k) = (3t^2 - 4t - 3)(0 - t) \iff k = 2t^3 - 3t^2 + 1 \quad \cdots（答）$$

が成り立つ。　$p(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$　とおくと

$$p'(t) = 6t^2 - 6t = 6t(t-1),\quad p(0) = 1,\quad p(1) = 0$$

だから，増減表は次のようになる。

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$p'(t)$	+	0	−	0	+
$p(t)$	↗	1	↘	0	↗



これより，$t = 0$　で極大値　1，　$t = 1$　で極小値　0

をとる。　…（答）

次に，$y = 2t^3 - 3t^2 + 1$　と　$y = k$　の共有点を考える。

共有点の数だけ接線を決定する t の値があるので，

右図より，接線が 2 本となるのは

$k = 0$　または　1　のときである。　…（答）

(2)　$k = 0$　のとき C は，$y = x^3 - 2x^2 - 3x$　である。

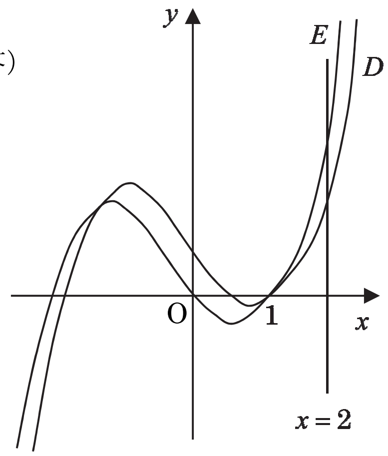
D を表す式は，$(x,\ y)$ の代わりに $(-x,\ -y)$ を代入して

$$-y = (-x)^3 - 2(-x)^2 - 3(-x) \iff y = x^3 + 2x^2 - 3x \quad \cdots（答）$$

E を表す式は，$(x,\ y)$ の代わりに $(x+1,\ y-6)$ を代入して

$$y - 6 = (x+1)^3 - 2(x+1)^2 - 3(x+1)$$

$$\iff y = x^3 + x^2 - 4x + 2 \quad \cdots（答）$$



したがって，D と E の交点の x 座標は

$$x^3 + 2x^2 - 3x = x^3 + x^2 - 4x + 2$$

を解いて，$x = -2,\ 1$　…（答）

$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲では，E が D の上方にあり，$1 \leqq x \leqq 2$ の範囲では，D が E の上方にあるので，求める面積は

$$\int_0^1 \left\{(x^3 + x^2 - 4x + 2) - (x^3 + 2x^2 - 3x)\right\}dx + \int_1^2 \left\{(x^3 + 2x^2 - 3x) - (x^3 + x^2 - 4x + 2)\right\}dx$$

$$=\int_0^1 \left(-x^2-x+2\right)dx+\int_1^2 \left(x^2+x-2\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_1^2$$

$$=\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)+\left(\frac{8}{3}+2-4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=3 \quad \cdots（答）$$

第３問

(1)　もとの数列$\{a_n\}$は，初項 3，公差 2 の等差数列だから $a_n=3+2(n-1)=2n+1$ である。

また，初項から第 4 群の末項までにある項数は

$$\sum_{k=1}^{4}(2k+1)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot4\cdot5+1\cdot4=24$$

だから，$b_4=a_{24}=2\cdot24+1=49$ 　…（答）

一般に，初項から第 k 群の末項までにある項数は

$$\sum_{m=1}^{k}(2m+1)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot k(k+1)+k=k^2+2k$$

だから，$b_k=a_{k^2+2k}=2\left(k^2+2k\right)+1=2k^2+4k+1$ 　…（答）

これを用いて，　$b_{30}=2\cdot30^2+4\cdot30+1=1921$，$b_{31}=2\cdot31^2+4\cdot31+1=2047$

だから，2011 は第 31 群に属している。

第 31 群は初項 1923，公差 2 の等差数列だから，これを d_n とおくと

$$d_n=1923+2(n-1)=2n+1921$$

$2n+1921=2011$　とおくと　$n=45$

すなわち，2011 は第 31 群の 45 番目の項である。　…（答）

(2)　$c_n=b_n-a_n=\left(2n^2+4n+1\right)-(2n+1)=2n^2+2n$ 　…（答）であるから

$$\sum_{k=1}^{n}c_k=\sum_{k=1}^{n}\left(2k^2+2k\right)=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)\{(2n+1)+3\}=\frac{2}{3}n(n+1)(n+2) \quad \cdots（答）$$

また

$$\frac{1}{c_n}=\frac{1}{2n^2+2n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \quad \cdots（答）$$

であるから

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{c_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdot\cdot\cdot\cdot+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{n}{2(n+1)} \quad \cdots（答）$$