センター試験 40 分模試

第 1 回

数学Ⅰ・数学A

第 1 問　(配点 25 点)

実数を係数とする x の二つの 2 次関数

$$y=x^2-2ax+2a^2+a+b$$

$$y=\frac{1}{3}x^2+2x+1$$

のグラフをそれぞれ G_1, G_2 とし，G_2 の頂点は G_1 上にあるとする。
このとき，G_1 の頂点の座標を a を用いて表すと

$$\left(a,\ -a^2-\boxed{\text{ア}}\,a-\boxed{\text{イウ}}\right)$$

となる。

(1)　G_1 の頂点の y 座標は

$$a=\boxed{\text{エオ}}$$

のとき，最大値

$$\boxed{\text{カキ}}$$

をとる。

$a=\boxed{\text{エオ}}$ のとき，G_1 と x 軸との 2 つの交点を A，B とすると，

$$\text{AB}=\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。

(2) G_1 の頂点の y 座標が -18 であるとき，

$a = \boxed{\text{コ}}$，$\boxed{\text{サシ}}$

である。

$a = $ サシ のとき，G_1 を x 軸方向に

$\boxed{\text{ス}}$

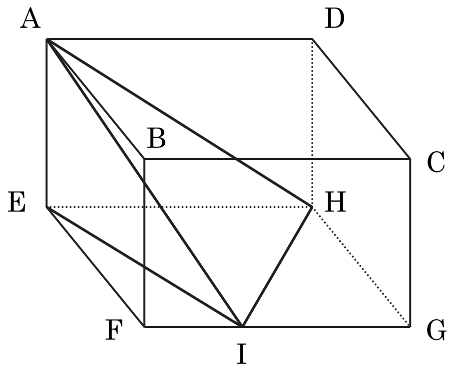
y 軸方向に

$\boxed{\text{セソ}}$

平行移動すると，G_1 と G_2 の頂点が一致する。

第２問 （配点 29 点）

右の図のような直方体 ABCD−EFGH において，FG を１：２ に内分する点を I とすると，$AE = 9$，$AI = 15$，$AH = 18$ である。このとき，



$FI = \boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ であり，

$IH = \boxed{\text{ウエ}}$ である。

さらに，AH の中点を P，HI の中点を Q とし，IP と AQ の交点を R とする。このとき，

$IP = \boxed{\text{オカ}}$

であり，三角形 AIH の面積は

$\boxed{\text{キクケ}}$

である。

したがって，E から平面 AIH に下ろした垂線の長さは

$$\frac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サシ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。また，R は三角形 AIH の $\boxed{\text{セ}}$ である。次の⓪～④のうちから $\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものを一つ選べ。

⓪　外心　　①　内心　　②　重心　　③　垂心　　④　傍心

したがって，

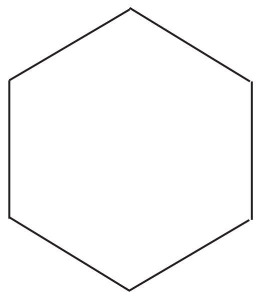
$$\text{PR} = \boxed{\text{ソ}}$$

であり，四面体 AEPR の体積は

$$\frac{\boxed{\text{タチ}}\sqrt{\boxed{\text{ツテ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

である。

第３問　(配点 21 点)



　右図のような正六角形と，1 から 6 までの数字が 1 つずつ記入された 6 枚のカードがある。

　カードを 1 枚ずつ引き，正六角形の頂点 A から出発して，出た数字の数だけ時計回りに進んでいく。

　1 周して，再び頂点 A を通過する時点で終了する。また，1 度引いたカードは元に戻さないものとして，以下の設問に答えよ。

(1)　1 が記入してあるカードを引いて終了するカードの引き方は $\boxed{\text{ア}}$ 通り，2 が記入してあるカードを引いて終了するカードの引き方は $\boxed{\text{イ}}$ 通り，3 が記入してあるカードを引いて終了するカードの引き方は $\boxed{\text{ウ}}$ 通り，4 が記入してあるカードを引いて終了するカードの引き方は $\boxed{\text{エ}}$ 通りである。

(2)　カードを引く回数が 1 回で終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ であり，カードを引く回数が 3 回で終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である。

第４問　(配点 25 点)

次の各問いに答えよ。

(1)　方程式$13x+9y=1$の整数解を$|x|\leqq 3$, $|y|\leqq 3$で考えると，$x=\boxed{\text{アイ}}$，$y=\boxed{\text{ウ}}$である。これを利用すると，方程式$13x+9y=5$の整数解は，整数kを用いて，

$$x=\boxed{\text{エ}}\,k-\boxed{\text{オカ}},\quad y=-\boxed{\text{キク}}\,k+\boxed{\text{ケコ}}$$

と表わすことができる。ただし，$10\leqq \boxed{\text{ケコ}} \leqq 20$とする。

(2)　方程式$157x+47y=1$の整数解の１つは，$x=\boxed{\text{サ}}$，$y=-\boxed{\text{シス}}$である。また，yが３桁の自然数で最大の値をとるとき，$x=\boxed{\text{セソタチ}}$である。

センター試験 40 分模試　第 1 回

問題番号（配点）	設問	解答記号	正解	配点	採点
第1問 (25)		$-a^2-$ ア $a-$ イウ	$-a^2-6a-11$	4	
		エオ	-3	3	
		カキ	-2	3	
		ク $\sqrt{\text{ケ}}$	$2\sqrt{2}$	3	
		$a=$ コ , サシ	1，-7	5	
		ス	4	3	
		セソ	16	4	
		小　計			点
第2問 (29)		ア $\sqrt{\text{イ}}$	$3\sqrt{3}$	3	
		ウエ	15	3	
		オカ	12	3	
		キクケ	108	3	
		$\dfrac{\text{コ}\sqrt{\text{サシ}}}{\text{ス}}$	$\dfrac{9\sqrt{39}}{8}$	4	
		セ	②	4	
		ソ	4	4	
		$\dfrac{\text{タチ}\sqrt{\text{ツテ}}}{\text{ト}}$	$\dfrac{27\sqrt{39}}{4}$	5	
		小　計			点
第3問 (21)		ア	3	3	
		イ	6	3	
		ウ	6	3	
		エ	9	3	
		$\dfrac{\text{オ}}{\text{カ}}$	$\dfrac{1}{6}$	4	
		$\dfrac{\text{キ}}{\text{クケ}}$	$\dfrac{4}{15}$	5	
		小　計			点
第4問 (25)		アイ	-2	2	
		ウ	3	2	
		エ $k-$ オカ	$9k-10$	3	
		$-$ キク $k+$ ケコ	$-13k+15$	3	
		サ	3	5	
		$-$ シス	-10	5	
		セソタチ	-279	5	
		小　計			点
		合　計			点

第１問

$$y=\frac{1}{3}x^2+2x+1=\frac{1}{3}\left(x^2+6x\right)+1=\frac{1}{3}(x+3)^2-2$$ より

G_2 の頂点の座標は $(-3,-2)$ である。この点が G_1 上にあるから

$$-2=9+6a+2a^2+a+b \iff b=-2a^2-7a-11$$

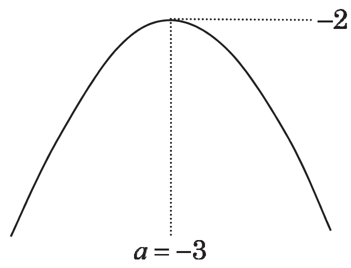
このとき G_1 は，$y=x^2-2ax+2a^2+a+\left(-2a^2-7a-11\right)=x^2-2ax-6a-11$

$=(x-a)^2-a^2-6a-11$

となる。これより，G_1 の頂点の座標は $\left(a,\ -a^2-6a-11\right)$ …（答）

(1) G_1 の頂点の y 座標は $-a^2-6a-11=-\left(a^2+6a\right)-11=-(a+3)^2-2$

となるので，$a=-3$ のとき最大値 -2 をとる。 …（答）



$a=-3$ のとき G_1 は，$y=x^2+6x+7$ となるから，x 軸との交点の

x 座標は $x^2+6x+7=0$ を解いて，$x=-3\pm\sqrt{2}$ となる。よって，

AB$=\left(-3+\sqrt{2}\right)-\left(-3-\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}$ …（答）

(2) G_1 の頂点の y 座標が -18 だから

$-a^2-6a-11=-18$ $\qquad a^2+6a-7=0$ $\qquad (a+7)(a-1)=0$

$\therefore\ a=1,\ -7$ …（答）

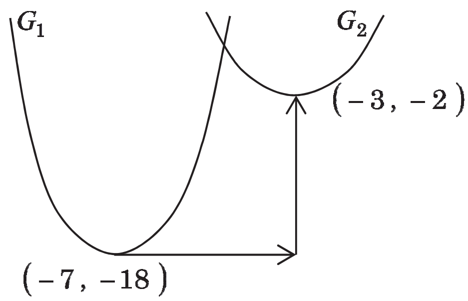
$a=-7$ のとき，G_1 の頂点の座標は $(-7,-18)$，

G_2 の頂点の座標は $(-3,-2)$ だから

G_1 を x 軸方向に $-3-(-7)=4$ …（答）

y 軸方向に $-2-(-18)=16$ …（答）

平行移動すると G_2 の頂点に一致する。



第２問

△AEH で，∠AEH $=90^\circ$ だから 三平方の定理より

$$\mathrm{EH}^2=18^2-9^2=27\times9 \qquad \mathrm{EH}=9\sqrt{3}$$ よって $\mathrm{FI}=9\sqrt{3}\times\frac{1}{3}=3\sqrt{3}$ …（答） …①

△AEI で，∠AEI $=90^\circ$ だから 三平方の定理より

$\mathrm{EI}^2=15^2-9^2=24\times6$ $\qquad \mathrm{EI}=12$ …②

①，②より，△EFI で，∠EFI $=90^\circ$ だから 三平方の定理より

$$\mathrm{EF}^2=12^2-(3\sqrt{3})^2=117 \qquad \mathrm{EF}=3\sqrt{13}$$

また，$\mathrm{IG}=9\sqrt{3}-3\sqrt{3}=6\sqrt{3}$，$\mathrm{HG}=3\sqrt{13}$ だから

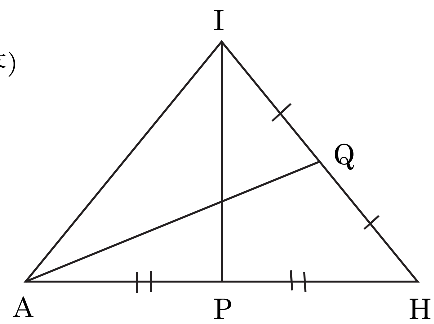
△HIG で，$\mathrm{IH}^2=(6\sqrt{3})^2+(3\sqrt{13})^2=225$ $\quad \mathrm{IH}=15$ …（答）

△AIH は AI＝HI の二等辺三角形だから，∠IPH $=90^\circ$ となり

$\mathrm{IP}^2=15^2-9^2=24\times6$

$\mathrm{IP}=12$ …（答）

$$\triangle\mathrm{AIH}=\frac{1}{2}\times18\times12=108$$ …（答）



四面体 AEIH を，底面を△EIH として考えたときの体積は

$$\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{EIH}\times\mathrm{AE}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times9\sqrt{3}\times3\sqrt{13}\right)\times9=\frac{81\sqrt{39}}{2}$$

次に，E から平面 AIH に下ろした垂線の長さを h として，△AIH を底面として体積を考えれば

$$\frac{1}{3}\times108\times h=\frac{81\sqrt{39}}{2}$$　　これより　$h=\frac{81\sqrt{39}}{2}\times\frac{1}{36}=\frac{9\sqrt{39}}{8}$　…（答）

R は，中線 IP と中線 AQ の交点だから，△AIH の重心である。②　…（答）

したがって，PR : RI＝1 : 2 となるので，$\mathrm{PR}=12\times\frac{1}{3}=4$　…（答）

四面体 AEPR を△AEP を底面として考える。P は AH の中点だから

$$\triangle\mathrm{AEP}=\frac{1}{2}\triangle\mathrm{AEH}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times9\sqrt{3}\times9\right)=\frac{81\sqrt{3}}{4}$$

次に，R から平面 AEH に下ろした垂線の長さを a，I から平面 AEH に下ろした垂線の長さを b とすると，a : b ＝RP : IP＝1 : 3　だから　$a=\frac{1}{3}\times3\sqrt{13}=\sqrt{13}$

求める体積は　$\frac{1}{3}\times\frac{81\sqrt{3}}{4}\times\sqrt{13}=\frac{27\sqrt{39}}{4}$　…（答）

第３問

(1)　1 のカードを引いて終了するためには，それまでに出た数字の合計が 5 でなければならない。その出方は，2→3，3→2，5 の 3 通り。　…（答）

2 のカードを引いて終了するためには，それまでに出た数字の合計が 4 か 5 でなければならない。合計が 4 となる出方は，1→3，3→1，4 の 3 通り。合計が 5 となる出方は，1→4，4→1，5 の 3 通り。よって，3＋3＝6 (通り)　…（答）

3 のカードを引いて終了するためには，それまでに出た数字の合計が 3 か 4 か 5 でなければならない。合計が 3 となる出方は，1→2，2→1 の 2 通り。合計が 4 となる出方は，4 の 1 通り。合計が 5 となる出方は，1→4，4→1，5 の 3 通り。よって，2＋1＋3＝6 (通り)　…（答）

4 のカードを引いて終了するためには，それまでに出た数字の合計が 2 か 3 か 4 か 5 でなければならない。合計が 2 となる出方は，2 の 1 通り。合計が 3 となるのは，1→2，2→1，3 の 3 通り。合計が 4 となるのは，1→3，3→1 の 2 通り。合計が 5 となるのは，2→3，3→2，5 の 3 通り。よって，1＋3＋2＋3＝9 (通り)　…（答）

(2)　1 回で終了するのは，6 のカードを引いたときだけだから，その確率は $\frac{1}{6}$　…（答）

2 回で終了するのは，以下の場合である。

1→5，6　　2→4，5，6　　3→4，5，6　　4→2，3，5，6　　5→1，2，3，4，6

よって，$\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{5}=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+\frac{5}{5}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{17}{5}=\frac{17}{30}$

カードを引く回数は最多でも 3 回だから，3 回で終了する確率は，余事象の確率から

$$1-\left(\frac{1}{6}+\frac{17}{30}\right)=\frac{4}{15}$$　…（答）

第４問

(1)　x＝－2，y＝3　…（答）　が整数解の 1 つなので，

$$13\cdot(-2)+9\cdot3=1$$

両辺に 5 をかけて，　$13\cdot(-10)+9\cdot15=5$

よって， $\begin{cases} 13x+9y=5 & \cdots\cdots ① \\ 13\cdot(-10)+9\cdot 15=5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①－②より， $13(x+10)+9(y-15)=0$

$13(x+10)=-9(y-15)$ ……③

9 と 13 は互いに素なので， $x+10$ は 9 の倍数である。よって， $x+10=9k$（k は整数）

$x=9k-10$ …（答） これを③に代入して，

$13\cdot 9k=-9(y-15)$

$-(y-15)=13k$ $y=-13k+15$ …（答）

(2) 157＝47・3＋16 より，

$(47\cdot 3+16)x+47y=1$ $47(3x+y)+16x=1$

$3x+y=a$ …① とおくと， $47a+16x=1$

47＝16・2＋15 より，

$(16\cdot 2+15)a+16x=1$ $16(2a+x)+15a=1$

$2a+x=b$ …② とおくと，$16b+15a=1$

これを満たす整数は， $b=1$， $a=-1$ なので，①，②より $x=3$， $y=-10$ …（答）

$\begin{cases} 157x+47y=1 & \cdots\cdots ③ \\ 157\cdot 3+47\cdot(-10)=1 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$

③－④より $157(x-3)+47(y+10)=0$

$157(x-3)=-47(y+10)$ ……⑤

157 と 47 は互いに素なので， $x-3$ は 47 の倍数である。よって， $x-3=47k$（k は整数） $x=47k+3$

これを⑤に代入して，

$157\cdot 47k=-47(y+10)$

$-(y+10)=157k$ $y=-157k-10$

y の値が 3 桁の自然数で最大になるのは，

$y=-157k-10 \leqq 999$

$-157k \leqq 1009$ $k \geqq -6.4\cdots$

k は整数なので， $k=-6$ のときである。このとき， $x=47k+3$ より， $x=47\times(-6)+3=-279$