1　内側の正方形の面積は，その辺の長さ c を用いて，c^2 と表せる。また，外側の正方形と4つの直角三角形の面積を用いて，

$(a+b)^2-\left(\dfrac{1}{2}\times a\times b\right)\times 4=a^2+b^2$　ともかける。

これらは等しいので，$a^2+b^2=c^2$

2　ABCDの面積は，その辺の長さ c を用いると，c^2 と表せる。また，正方形PQRSと4つの直角三角形の面積の和でも表せて，

$(b-a)^2+\left(\dfrac{1}{2}\times a\times b\right)\times 4=a^2+b^2$　…②

これらは等しいので，$a^2+b^2=c^2$

3　(1)　$x=15$　　(2)　$x=3$

解説

(1) $12^2+9^2=x^2$，$x>0$ より，$x=15$

(2) $x^2+4^2=5^2$，$x>0$ より，$x=3$

4　(1)　$x=10$　　(2)　$x=\sqrt{5}$

5　(1)

解説

(1)は，$5^2=25$，$4^2+3^2=25$　で，$5^2=4^2+3^2$ となり，三平方の定理が成り立つから直角三角形といえる。

6　(2)　直角に対するのは10 cm の辺

7　(1)　$x=\sqrt{2}$，$y=1$　　(2)　$x=1$，$y=\sqrt{3}$

解説

(1) $1:y:x=1:1:\sqrt{2}$

(2) $x:2:y=1:2:\sqrt{3}$

8　(1)　$x=3$　　(2)　$x=4\sqrt{3}$，$y=8$

解説

(1) $x:3\sqrt{2}=1:\sqrt{2}$

(2) $4:y:x=1:2:\sqrt{3}$

9　$x=6\sqrt{2}$

解説

DからBCに垂線をひき，交点をHとする。

△DHCにおいて，$DC^2=DH^2+HC^2$　となるから，

$9^2=x^2+(8-5)^2$，$x>0$ より，$x=6\sqrt{2}$

10　(1)　$x=2\sqrt{65}$　　(2)　$x=2\sqrt{21}$

解説

(1) DからABに垂線DHをひく。

$AD^2=AH^2+HD^2$　より，$x^2=(12-10)^2+16^2$

$x>0$ だから，$x=2\sqrt{65}$

(2) DからBCに垂線DHをひく。

$DC^2=DH^2+HC^2$　より，$10^2=x^2+\left(\dfrac{12-4}{2}\right)^2$

$x>0$ だから，$x=2\sqrt{21}$

11　$x=8$

解説

$BP=(x+8)-10=x-2$ (cm)　となる。

$AP^2=AB^2+BP^2$　より，$10^2=x^2+(x-2)^2$，

$2x^2-4x-96=0$，$(x-8)(x+6)=0$

$x>0$ だから，$x=8$

12　$\sqrt{13}$ cm，$3\sqrt{5}$ cm

解説

AからDCに垂線AHをひく。$AD^2=AH^2+DH^2$ より，$AD^2=8^2+(4-3)^2=65$

ここで，$BP=x$ cmとおくと $(0<x<8)$，

$AP^2=AB^2+BP^2$　より，$AP^2=9+x^2$

$PD^2=PC^2+CD^2$　より，

$PD^2=(8-x)^2+4^2=80-16x+x^2$

△APDで，$AD^2=AP^2+PD^2$　となるから，

$65=(9+x^2)+(80-16x+x^2)$

$2x^2-16x+24=0$，$(x-2)(x-6)=0$，

13　$x=12$

解説

$BD=a$ とする。△ABDにおいて，$x^2=13^2-a^2$

△ADCにおいて，$x^2=15^2-(14-a)^2$

よって，$13^2-a^2=15^2-(14-a)^2$，$a=5$

このとき，$x^2=13^2-5^2$　で，$x>0$ より，$x=12$

14　(1)　$6\sqrt{6}$　　(2)　10.5

解説

(1) BからCAに垂線BHをひく。$CH=a$ とすると，BH^2 について，$5^2-a^2=7^2-(6-a)^2$，$a=1$

よって，$BH=\sqrt{5^2-1^2}=2\sqrt{6}$

(2) AからBCに垂線AHをひく。$BH=a$ とすると，AH^2 について，$(3\sqrt{2})^2-a^2=5^2-(7-a)^2$ で，$a=3$　よって，$AH=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-3^2}=3$

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times 7\times 3=10.5$

15　$AB=5$

解説

$AB=\sqrt{(6-2)^2+(4-1)^2}=5$

16　(1)　$AB=2\sqrt{5}$　　(2)　$AB=\sqrt{113}$

解説

(1) $AB=\sqrt{(1-3)^2+(1-5)^2}=2\sqrt{5}$

(2) $AB=\sqrt{(-5-2)^2+(2+6)^2}=\sqrt{113}$

17　$AB=3\sqrt{2}$

解説

$A(-1,\ 1)$，$B(2,\ 4)$　となる。

$AB=\sqrt{(2+1)^2+(4-1)^2}=3\sqrt{2}$

18　AB = 8 cm

解説

OからABに垂線OHをひく。$OA^2=OH^2+AH^2$ より，$5^2=3^2+AH^2$　$AH>0$ だから，

AH = 4 cm　AB = 2AH = 8 cm

19　$\sqrt{7}$ cm

解説

OからABに垂線OHをひく。$OA^2=OH^2+AH^2$ より，$4^2=OH^2+3^2$　$OH>0$ だから，

$OH=\sqrt{7}$ cm

20　(1)　$x=5$　　(2)　$x=2\sqrt{15}$

解説

(1) $x=\sqrt{13^2-12^2}=5$ (cm)

(2) O′からOTに垂線O′Hをひく。△OHO′において，$OO'^2=OH^2+O'H^2$ より，

$(3+5)^2=(5-3)^2+x^2$　$x>0$ だから，$x=2\sqrt{15}$

21　(1)　$x=2.5$　　(2)　$x=2\sqrt{37}$

解説

(1)△OTP において，$OP^2=OT^2+TP^2$　より，
$(x+4)^2=x^2+6^2$，$x=2.5$

(2)O′から OT に垂線 O′H をひく。△OHO′ において，$O'O^2=OH^2+O'H^2$　より，
$x^2=(6-4)^2+12^2$　$x>0$ だから，$x=2\sqrt{37}$

22　$r=1$ cm

解説

$BC=\sqrt{4^2+3^2}=5$　となる。△ABC の面積について，$\frac{1}{2}\times4\times3=\frac{1}{2}\times r\times(4+3+5)$

よって，$r=1$ (cm)

23　$\frac{3}{2}$ cm

解説

AO の延長と BC の交点を H とする。AH⊥BC で，$AH=\sqrt{5^2-3^2}=4$(cm)　円 O の半径を r cm とおくと，△ABC の面積について，

$\frac{1}{2}\times6\times4=\frac{1}{2}\times r\times(5+6+5)$ より，$r=\frac{3}{2}$ (cm)

24　1 cm

解説

O から AB，AC に垂線 OP，OQ をひく。円 O の半径を r cm とする。四角形APOQ は 1 辺が r cm の正方形になるので，$AB=(r+2)$ cm，$AC=(r+3)$ cmと表せる。△ABCの面積について，

$\frac{1}{2}\times r\times\{(r+2)+5+(3+r)\}=\frac{1}{2}(r+2)(r+3)$

より，$(r+6)(r-1)=0$　$r>0$ だから，$r=1$ (cm)

25　$2\sqrt{3}$ cm

解説

O から BC に垂線 OH をひく。$\angle BOC=2\angle BAC=120°$　より，$\angle HOC=120°\div2=60°$

また，$\angle OHC=90°$ だから，△OHC において，

$OC:HC=2:\sqrt{3}$　$HC=3$ cmより，

$OC=2\sqrt{3}$ cm で，これが円 O の半径。

26　$\frac{169}{24}$ cm

解説

BC の中点を M とする。△ABM において，

$AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$ (cm)　円 O の半径を r cmとする。△OBM において，

$OM=(12-r)$ cm，$OB^2=BM^2+OM^2$　より，

$r^2=5^2+(12-r)^2$　よって，$r=\frac{169}{24}$ (cm)

27　(1)　△ACD と△AFD において，
AD は共通…①，$\angle ADC=ADF=90°$　…②，
$\overset{\frown}{ED}=\overset{\frown}{DC}$ より，$\angle CAD=\angle FAD$…③
①，②，③より，1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので，△ACD≡△AFD
よって，AC＝AF

(2)　$EF=\frac{36}{5}$ cm

解説

(2)△ACD∽△CFE（2 組の角の相等）となるから，
AC：CF＝CD：EF，10：12＝6：EF

よって，$EF=\frac{36}{5}$ cm

28　(1)　△AEC と△AEB において，
$\angle AEC=\angle AEB=90°$　…①，AE は共通…②，
AC＝AB…③
①，②，③より，直角三角形の斜辺と他の一辺がそれぞれ等しいので，△AEC≡△AEB
したがって，$\angle EAC=\angle EAB$
円周角が等しいので，$\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EB}$ となる。

(2)　$BD=\frac{4}{3}\sqrt{2}$ cm

解説

(2)△EAB∽△DBC（2 組の角の相等）より，
EA：DB＝AB：BC＝3：2　ここで，
$EA=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$ (cm)だから，

29　(1)　DA＝4 cm　　(2)　$AC=\frac{10}{13}\sqrt{13}$ cm

解説

(1)△CDB∽△ADC（2 組の角の相等）となるから，
CD：AD＝DB：DC　これより AD＝4 cm

(2)CB：AC＝DB：DC＝3：2　より，
$CB=3a$ cm，$AC=2a$ cm とおける。
△ABC において，$AB^2=AC^2+CB^2$ が成り立つから，$(9-4)^2=(2a)^2+(3a)^2$　$a>0$ より，

$a=\frac{5}{13}\sqrt{13}$ (cm)　$AC=2a=\frac{10}{13}\sqrt{13}$ (cm)

30　BD＝9 cm

解説

△BAC∽△BCD（2 組の角の相等）だから，
$\angle ABC=\angle CBD=30°$　となる。
△BAC で，$AB:BC=2:\sqrt{3}$　より，
$BC=6\sqrt{3}$ cm
△BCD で，$BC:BD=2:\sqrt{3}$　より，BD＝9 cm

31　(1)　$FH=\sqrt{34}$ cm　　(2)$BH=\sqrt{38}$ cm

解説

(1)$FH=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$ (cm)

(2)$BH=\sqrt{BF^2+FH^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{34})^2}=\sqrt{38}$ (cm)

32　(1)　$2\sqrt{3}$ cm　　(2)　$\sqrt{17}$ cm

33　$6\sqrt{13}$ cm^2

解説

$AF=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ (cm)

求める面積は，$6\times\sqrt{13}=6\sqrt{13}$ (cm^2)

34　(1)　$6\sqrt{89}$ cm^2　　(2)　$64\sqrt{2}$ cm^2

解説

(1)$\mathrm{AF}=\sqrt{8^2+5^2}=\sqrt{89}$ (cm)

(2)$\mathrm{AC}=\sqrt{2}\ \mathrm{AD}=8\sqrt{2}$ (cm)

35　(1)　$\mathrm{AH}=2\sqrt{2}$ cm　　(2)　$\mathrm{OH}=2\sqrt{7}$ cm

(3)　$\dfrac{32}{3}\sqrt{7}$ cm^3

解説

(1)$\mathrm{AH}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ (cm)

(2)$\mathrm{OH}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{AH}^2}=\sqrt{36-8}=2\sqrt{7}$ (cm)

(3)$\dfrac{1}{3}\times4\times4\times2\sqrt{7}=\dfrac{32}{3}\sqrt{7}$ (cm^3)

36　(1)　$3\sqrt{7}$ cm　　(2)　$36\sqrt{7}$ cm^3

37　(1)　$\dfrac{16\sqrt{2}}{3}\pi$ cm^3　　(2)　16π cm^2

解説

(1)高さは，$\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$ (cm)　よって，体積は，

$\dfrac{1}{3}\times\pi\times2^2\times4\sqrt{2}=\dfrac{16\sqrt{2}}{3}\pi$ (cm^3)

(2)(底面積)＋(側面積)$=\pi\times2^2+\pi\times6^2\times\dfrac{2}{6}$

$=16\pi$ (cm^2)

38　(1)　$3\sqrt{5}$ cm　(2)　$4\sqrt{5}\pi$ cm^3　(3)　18π cm^2

解説

(1)底面の半径を r cm とすると，$2\pi r=4\pi$　より，

$r=2$ (cm) となる。

39　(1)　$\mathrm{DM}=3\sqrt{3}$ cm　　(2)　$\mathrm{DH}=2\sqrt{3}$ cm

(3)　$\mathrm{AH}=2\sqrt{6}$ cm　　(4)　$18\sqrt{2}$ cm^3

解説

(1)MC＝3 cm，$\mathrm{DM}=\sqrt{3}\ \mathrm{MC}=3\sqrt{3}$ (cm)

(2)Hは△DBCの重心でDH：HM＝2：1

(3)$\mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{AD}^2-\mathrm{DH}^2}=\sqrt{36-12}=2\sqrt{6}$ (cm)

(4)$\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times6\times3\sqrt{3}\right)\times2\sqrt{6}=18\sqrt{2}$ (cm^3)

40　(1)　$\mathrm{AH}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ cm　　(2)　$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ cm^3

解説

(1)$\mathrm{BM}=\sqrt{3}$ cm，$\mathrm{BH}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ cm，

$\mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BH}^2}$ よりAHを求める。

(2)$\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}\right)\times\dfrac{2\sqrt{6}}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ (cm^3)

41　21π cm^2

解説

切り口の円の半径を r cm とする。

$r^2=5^2-2^2=21$

切り口の面積は，$\pi r^2=\pi\times21=21\pi$ (cm^2)

42　(1)　20π cm^2　　(2)　8 cm

解説

(1)切り口の円の半径を r cm とする。

$r^2=6^2-4^2=20$　よって，切り口の面積は，

$\pi r^2=20\pi$ (cm^2)

(2)切り口の円の半径を r cm とする。$\pi r^2=15\pi$ より，$r^2=15$　球の半径を R cm とすると，$R^2=r^2+7^2=15+49=64$　$R>0$ より，$R=8$ (cm)

43　(1)　$\mathrm{AO}=\dfrac{5}{3}x$ cm　　(2)　$\dfrac{3}{2}$ cm

解説

(1)△ABD∽△AOHとなる。

AB：AO＝BD：OH，5：AO＝3：x，

よって，$\mathrm{AO}=\dfrac{5}{3}x$ (cm)

(2)$\mathrm{AD}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ (cm)　また，ADは x を用いると

$\mathrm{AD}=\mathrm{AO}+\mathrm{OD}=\dfrac{5}{3}x+x=\dfrac{8}{3}x$　とかける。

$4=\dfrac{8}{3}x$　より，$x=\dfrac{3}{2}$ (cm)

44　(1)　5 cm　　(2)　$\dfrac{10}{3}$ cm

解説

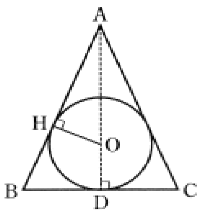
(2)右の図で，△ABD∽△AOH

半径OD＝OH＝x cmとすると，AO＝12－x

AB：AO＝BD：OH

13：(12－x)＝5：x より，

$x=\dfrac{10}{3}$



45　$3\sqrt{13}$ cm

解説

A，I，Gが一直線上にあるとき，AI＋IGは最小となる。したがって，求める長さは，

$\sqrt{6^2+(5+4)^2}=3\sqrt{13}$ (cm)

46　(1)　90°　　(2)　$16\sqrt{2}$ cm

解説

(1)$360°\times\dfrac{4}{16}=90°$

(2)$16\times\sqrt{2}=16\sqrt{2}$ (cm)

章のまとめ

1 (1) $x=4\sqrt{2}$　(2) $x=2\sqrt{2}$，$y=4\sqrt{2}$
(3) $x=\sqrt{17}$

2 (1) $x=12$　(2) $x=2\sqrt{10}$　(3) $x=4\sqrt{2}$

3 $PQ=2\sqrt{7}$ cm

解説
BCの中点をOとし，OからPQに垂線OHをひく
$OP^2=PH^2+OH^2$　より，$PH=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$ (cm)　$PQ=2PH=2\sqrt{7}$ (cm)

4 $\angle C=90°$，$BC=CA$ の直角二等辺三角形

解説
$AB=4\sqrt{10}$，$BC=4\sqrt{5}$，$CA=4\sqrt{5}$　となる。
$BC=CA$，$AB^2=BC^2+CA^2$　が成り立つ。

5 (1) $\triangle ABH \cdots AH^2=-x^2+16$
$\triangle ACH \cdots AH^2=-x^2+14x-13$
(2) $BH=\dfrac{29}{14}$

6 4 cm

解説
$AC=\sqrt{26^2-24^2}=10$ (cm)　円Oの半径を r cm とすると，△ABC の面積について，
$\dfrac{1}{2}\times 24\times 10=\dfrac{1}{2}\times r\times(26+24+10)$
よって，$r=4$ (cm)

7 (1) $4\sqrt{3}$ cm　(2) $\sqrt{29}$ cm
(3) $2\sqrt{10}$ cm　(4) 5 cm

8 (1) $36\sqrt{2}$ cm^3　(2) $\dfrac{128}{3}\sqrt{2}$ cm^3

解説
(1)高さは，$3\sqrt{2}$ cm になる。
(2)$\dfrac{\sqrt{2}}{12}\times 8^3=\dfrac{128}{3}\sqrt{2}$ (cm^3)

9 (1) 45 cm^2　(2) $FI=\dfrac{90}{181}\sqrt{181}$ cm

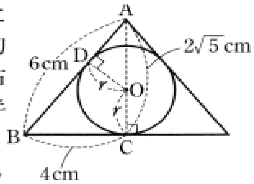
解説
(1)$\angle EFC=90°$，$CF=\sqrt{8^2+6^2}=10$ (cm) より，
$\triangle CEF=\dfrac{1}{2}\times 9\times 10=45$ (cm^2)
(2)$EC=\sqrt{9^2+8^2+6^2}=\sqrt{181}$ (cm)
$45=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{181}\times FI$，$FI=\dfrac{90}{181}\sqrt{181}$ (cm)

10 (1) $\dfrac{16}{3}\sqrt{2}$ cm^3　(2) $\sqrt{11}$ cm^2

解説
(1)$\dfrac{\sqrt{2}}{12}\times 4^3=\dfrac{16}{3}\sqrt{2}$ (cm^3)
(2)△AMN は，$AM=AN=2\sqrt{3}$ cm，$MN=2$ cm の二等辺三角形で，MN を底辺とみたときの高さは，$\sqrt{(2\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{11}$ (cm)
よって，$\triangle AMN=\dfrac{1}{2}\times 2\times\sqrt{11}=\sqrt{11}$ (cm^2)

11 (1) $\dfrac{32\sqrt{5}}{3}\pi$ cm^3　(2) $\dfrac{4}{5}\sqrt{5}$ cm

解説
(1)高さは，$\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$ (cm)
(2)球の中心を通り底面に垂直な平面で立体を切ったときの切り口は右のようになる。球の半径を r cm とする。



$\triangle ABC \backsim \triangle AOD$ より，
$AB:AO=BC:DO$，
$6:(2\sqrt{5}-r)=4:r$　これを解いて r を求める。