ステップワーク　数学ⅡＢ

◆本書の使い方◆

本書は，数学ⅡＢの基本的かつ代表的な問題を短期間で習得したい生徒，あるいは，センター試験で数学ⅡＢが必要だが基本問題が解けない生徒向けに編集されている。各単元の代表的な問題を「基本例題」，教科書レベルだが少しだけ難易度の高い問題を「重要例題」として取り上げ，「覚えておくべきポイント」と詳解を掲載し，自学自習できるようにしている。例題の選考にあたっては受験を意識している。そのため，扱う問題数を絞ったが，受験に必要な問題ばかりになっている。また，各例題に「練習問題」を準備している。練習問題は，例題の類題になるが，問題文の表現などを少し変更した部分もある。

高１，２生にとっては「基礎の確認」，高３生にとっては「高校数学の再出発（リスタート）」として活用してほしい。

基　本　例　題：基本例題を解きながら，各単元の基礎的な公式や定理を確認している。最低限必要な基礎知識の定着をはかるために利用してほしい。実際に書きながら解いてみて，何も見ずに正解できるようにしておいてほしい。

重　要　例　題：基本例題よりも少し難易度の高い問題を扱っている。基本レベルから標準レベルへのステップアップには必要な問題なので，ぜひ挑戦してほしい。

練　習　問　題：基本例題，重要例題の類題になっている。例題で出てきたことを実際に使って問題を解いてほしい。

間違えた問題はチェックしておき，本書を一通り解き終えた後に見直しておくと，より効率よく学習を進めることができる。高３生は，本書の内容が理解できたら，標準的なセンター試験対策へと勉強を進めてほしい。

◆　も　く　じ　◆

第１章　式と証明，複素数と方程式

基本例題 01　多項式の割り算

次の問いに答えよ。

(1)　x の多項式 $f(x)$ を x^2-2x+4 で割ったときの商が $x-3$，余りが $-x+5$ であるとき，$f(x)$ を求めよ。

(2)　$x^3+ax^2+2bx+3$ を x^2-x+1 で割ったときの商と余りを求めよ。

(3)　(2)で $x^3+ax^2+2bx+3$ が x^2-x+1 で割り切れるとき，a，b の値を求めよ。

ココを覚えよう

★割り算の基本

A を B で割ったときの商が Q で，余りが R のとき

$A=BQ+R$　　（ただし，R の次数＜B の次数）

★「割り切れる」⇔「余りが0」

余りが１次式 $px+q$ の場合，「余りが 0」ということから，

$px+q=0$ より $x=-\dfrac{q}{p}$??

としてはいけない。$px+q=0$ を x の恒等式と考えて，$p=0$ かつ $q=0$ とする。

恒等式については，**基本例題 03** を参照。

解答＆解説

(1)　$f(x)=(x^2-2x+4)(x-3)-x+5=x^3-5x^2+9x-7$　……(答)

(2)　右の計算より，
商は $x+a+1$，余りは $(a+2b)x-a+2$　……(答)

$$
\begin{array}{rrr|rrrr}
 & & & & 1 & a+1 & \\
\hline
1 & -1 & 1 & 1 & a & 2b & 3 \\
 & & & 1 & -1 & 1 & \\
\hline
 & & & & a+1 & 2b-1 & 3 \\
 & & & & a+1 & -a-1 & a+1 \\
\hline
 & & & & & a+2b & -a+2
\end{array}
$$

各項の係数だけを書き出して計算するのがよい。

(3)　(2)の余りが 0 であればよいので，
$a+2b=0$ かつ $-a+2=0$
よって，$a=2$，$b=-1$　……(答)

練習問題 01

次の問いに答えよ。

(1)　x の多項式 $f(x)$ を $2x^2-x-2$ で割ったときの商が $2x+1$，余りが $-x-7$ であるとき，$f(x)$ を求めよ。

(2)　x^3+ax^2+2b を x^2-2x+3 で割ったときの商と余りを求めよ。

(3)　(2)で x^3+ax^2+2b が x^2-2x+3 で割り切れるとき，a，b の値を求めよ。

基本例題 02　分数式の計算

次の計算をせよ。

$$\frac{x+1}{3x^2-2x-1}+\frac{2x+1}{3x^2+4x+1}$$

ココを覚えよう

★まずは因数分解する

分数の計算なので，通分をすることになるが，文字式を通分する場合は，まず分母を因数分解して，分母をどのような式にすればよいかを判断することが重要になる。

最後の答えも分母と分子を因数分解して，約分できるときは約分する。

解答＆解説

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{3x^2-2x-1}+\frac{2x+1}{3x^2+4x+1} &= \frac{x+1}{(3x+1)(x-1)}+\frac{2x+1}{(3x+1)(x+1)} \\
&= \frac{(x+1)^2}{(3x+1)(x-1)(x+1)}+\frac{(2x+1)(x-1)}{(3x+1)(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{(x^2+2x+1)+(2x^2-x-1)}{(3x+1)(x-1)(x+1)} \\
&= \frac{x(3x+1)}{(3x+1)(x-1)(x+1)} \\
&= \frac{x}{(x-1)(x+1)} \quad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

練習問題 02

次の計算をせよ。

$$\frac{x^2+3x}{(x+2)(x^2+7x+12)}-\frac{x+2}{x^2+7x+12}+\frac{x+4}{x^2+5x+6}$$

基本例題 03　恒等式

次の式が x についての恒等式になるように a，b，c の値を定めよ。

$$2x^2-3x+4=a(x-1)^2+b(x-1)+c$$

ココを覚えよう

★恒等式とは？

x にどんな値を代入しても成り立つ式のことで，簡単にいえば，左辺と右辺が全く同じ式のこと。例えば，$(x-2)^2=(x-1)^2-2x+3$ は，左辺も右辺も計算すると x^2-4x+4 になる。全く同じ式なので，x にどんな値を代入しても成り立つのは当然である。

一方，$(x-1)^2=2x-3$ は，左辺と右辺が異なる式になる。これが方程式である。

★解法①　係数比較法

両辺を x について整理して，同じ次数の項の係数を比べる。つまり，

「$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$」が x の恒等式

$\Leftrightarrow$　$a=a',\quad b=b',\quad c=c'$

これは 2 次式の場合で，一般に n 次式でも利用できる。

★解法②　数値代入法

両辺の x にいくつか数値を代入して，連立方程式をつくる。この問題では，右辺に $x-1$ があるので，代入する値は，$x=1$ とそれに近い整数値($x=0$ や $x=2$)がよい。未知数が 3 つあるときは，代入する値も 3 つ必要である。

解答＆解説

__解法①(係数比較法)__

与式より，$2x^2-3x+4=ax^2+(-2a+b)x+a-b+c=0$

これが x について恒等式になるので，

$2=a,\quad -3=-2a+b,\quad 4=a-b+c$

よって，$a=2,\quad b=1,\quad c=3$　……(答)

__解法②(数値代入法)__

両辺に $x=0,1,2$ を代入すると

$4=a-b+c,\quad 3=c,\quad 6=a+b+c$

よって，$a=2,\quad b=1,\quad c=3$

このとき，与式は x について恒等式になるので，

$a=2,\quad b=1,\quad c=3$　……(答)

数値代入法の場合は，代入した値以外の場合も成り立つかどうかを確認しなければならない。しかし，成り立つことは分かっているので，この 1 文を書いておけばよい。

練習問題 03

$\dfrac{2x+4}{(x-1)(x+3)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+3}$ が恒等式となるように，a，b の値を定めよ。

基本例題 04　相加平均・相乗平均の関係

$a>0$ のとき，$a+\dfrac{3}{a}$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

ココを覚えよう

★相加平均・相乗平均の関係

$A>0$，$B>0$ のとき，

$$\frac{A+B}{2} \geqq \sqrt{AB} \quad (\text{等号成立は} A=B \text{のとき})$$

が成り立つ。

実際に問題で利用するときは，分母を払って，

$$A+B \geqq 2\sqrt{AB}$$

とすることが多い。

また，式の形から最小値(場合によっては最大値)を求めるときによく利用される。

解答＆解説

$a>0$，$\dfrac{3}{a}>0$ なので，相加平均・相乗平均の関係より

$$a+\frac{3}{a} \geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{3}{a}}=2\sqrt{3} \qquad \therefore \quad a+\frac{3}{a} \geqq 2\sqrt{3}$$

$A+B \geqq 2\sqrt{AB}$ の形

等号成立は，$a=\dfrac{3}{a}$ より，$a=\pm\sqrt{3}$　$a>0$ なので，$a=\sqrt{3}$

以上より，$a=\sqrt{3}$ のとき，最小値 $2\sqrt{3}$　……(答)

練習問題 04

$a>0$，$b>0$ のとき，$\dfrac{a}{2b}+\dfrac{2b}{a}+2$ の最小値とそのとき成り立つ a，b の関係式を求めよ。

基本例題 05　複素数の計算

次の問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{4+2i}{1-i}-(3-i)^2$ を簡単にせよ。

(2)　実数 x，y が $(2+i)x+(1-3i)y-3-5i=0$ を満たすとき，x，y の値を求めよ。

ココを覚えよう

★複素数とは？

2 乗して－1 になる数を虚数単位 i で表す。つまり，$i^2=-1$ である。虚数とは実際には存在しない数，簡単にいえば，数直線上で表せない数である。

また，$a+bi$（a，b は実数)の形で表せる数を複素数といい，a を実部，b を虚部という。

複素数 $a+bi$

$b=0$ なら 実数　　$b\neq 0$ なら 虚数

★分母を実数にして計算

分母に無理数が含まれる場合，分母を有理化するのと同じで，分母に虚数単位 i が含まれる場合は，共役な複素数($a+bi$ に対して，$a-bi$)を分母と分子にかけて，分母を実数にする。

分母が実数になれば，i を普通の文字と考えて同類項を計算するのと同じ。ただし，$i^2=-1$ を忘れないように。

★複素数の相等

2 つの複素数が等しいとき，次のことが成り立つ。（a，b，c，d は実数)

$$a+bi=c+di \iff a=c,\ b=d$$

特に，$\quad a+bi=0 \iff a=0,\ b=0$

解答＆解説

(1)
$$\frac{4+2i}{1-i}-(3-i)^2=\frac{(4+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}-(9-6i+i^2)=\frac{4+6i+2i^2}{1-i^2}-(9-6i-1)$$
$$=\frac{4+6i+2\cdot(-1)}{1-(-1)}-(8-6i)$$
$$=\frac{2+6i}{2}-8+6i$$
$$=1+3i-8+6i$$
$$=-7+9i \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　与式より，$(2x+y-3)+(x-3y-5)i=0$

$2x+y-3$，$x-3y-5$ は実数なので，

この 1 文は必ず書いておく。

$$2x+y-3=0,\ x-3y-5=0$$

よって，$x=2$，$y=-1$　……(答)

練習問題 05

次の問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{1+2i}{2-i}-\dfrac{1-i}{2+i}$ を簡単にせよ。

(2)　実数 x，y が $(5-2i)x+(1+3i)y=-3+8i$ を満たすとき，x，y の値を求めよ。

高ゼミ　ステップワーク

数学ⅡB

解　答

第 1 章　式と証明，高次方程式

練習問題 01

(1)　$f(x)=(2x^2-x-2)(2x+1)-x-7$

$=4x^3-6x-9$ …(答)

(2)　実際に割り算を行うと

$$
\begin{array}{rrr|rrrr}
 & & & 1 & a+2 & & \\
\hline
1 & -2 & 3 & 1 & a & 0 & 2b \\
 & & & 1 & -2 & 3 & \\
\hline
 & & & & a+2 & -3 & 2b \\
 & & & & a+2 & -2a-4 & 3a+6 \\
\hline
 & & & & & 2a+1 & -3a+2b-6
\end{array}
$$

この計算より，商は $x+a+2$，

余りは $(2a+1)x-3a+2b-6$ …(答)

(3)　(2)で求めた余りが 0 であればよいので

$2a+1=0$　かつ　$-3a+2b-6=0$

よって，$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{9}{4}$ …(答)

練習問題 02

$$\frac{x^2+3x}{(x+2)(x^2+7x+12)}-\frac{x+2}{x^2+7x+12}+\frac{x+4}{x^2+5x+6}$$

$$=\frac{x^2+3x}{(x+2)(x+3)(x+4)}-\frac{x+2}{(x+3)(x+4)}+\frac{x+4}{(x+2)(x+3)}$$

$$=\frac{x^2+3x-(x+2)^2+(x+4)^2}{(x+2)(x+3)(x+4)}$$

$$=\frac{x^2+3x-(x^2+4x+4)+(x^2+8x+16)}{(x+2)(x+3)(x+4)}$$

$$=\frac{x^2+7x+12}{(x+2)(x+3)(x+4)}=\frac{(x+3)(x+4)}{(x+2)(x+3)(x+4)}=\frac{1}{x+2}\cdots(答)$$

練習問題 03

$$\frac{2x+4}{(x-1)(x+3)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+3}=\frac{a(x+3)+b(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

$$=\frac{(a+b)x+3a-b}{(x-1)(x+3)}$$

両辺の分子を x の恒等式と考えて

$a+b=2$，　$3a-b=4$

これを解いて，$a=\dfrac{3}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$ …(答)

練習問題 04

$a>0$，$b>0$ より，$\dfrac{a}{2b}>0$，$\dfrac{2b}{a}>0$ なので，相加平均・相乗平均の関係より

$$\frac{a}{2b}+\frac{2b}{a}\geqq 2\sqrt{\frac{a}{2b}\cdot\frac{2b}{a}}=2$$

$$\therefore\quad \frac{a}{2b}+\frac{2b}{a}\geqq 2$$

よって，$\dfrac{a}{2b}+\dfrac{2b}{a}+2\geqq 4$

等号成立は，$\dfrac{a}{2b}=\dfrac{2b}{a}$　より $a^2=4b^2$

$a>0$，$b>0$ なので，$a=2b$

以上より，$a=2b$ のとき，最小値 4…(答)

練習問題 05

(1)
$$\frac{1+2i}{2-i}-\frac{1-i}{2+i}=\frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}-\frac{(1-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$$

$$=\frac{2+5i+2i^2}{4-i^2}-\frac{2-3i+i^2}{4-i^2}$$

$$=\frac{2+5i-2}{4-(-1)}-\frac{2-3i-1}{4-(-1)}$$

$$=\frac{5i}{5}-\frac{1-3i}{5}=\frac{-1+8i}{5}\cdots(答)$$

(2)　与式より，$(5x+y)+(-2x+3y)i=-3+8i$

$5x+y$，$-2x+3y$ は実数なので，両辺を比較して

$5x+y=-3$　　$-2x+3y=8$

これを解いて，$x=-1$，$y=2$ …(答)

練習問題 06

与えられた方程式の判別式を D とすると，題意を満たすためには　$D\geqq 0$　であればよい。

$$\frac{D}{4}=(a-3)^2-(2a^2+2a+7)\geqq 0$$

$$a^2+8a-2\leqq 0$$

$$-4-3\sqrt{2}\leqq a\leqq -4+3\sqrt{2}\cdots(答)$$

練習問題 07

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=1$

(1)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2\cdot 1=7$ …(答)

$$\frac{\alpha+1}{\alpha^2}+\frac{\beta+1}{\beta^2}=\frac{(\alpha+1)\beta^2+(\beta+1)\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}$$

$$=\frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha^2+\beta^2}{(\alpha\beta)^2}=\frac{1\cdot 3+7}{1^2}=10\cdots(答)$$

(2)　2 数の和と積を求めると，

$$\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{3^3-3\cdot 1\cdot 3}{1}=18\cdots①$$