セミナーワーク　数学ⅡB

◆本書の使い方◆

本書は，センター試験対策用の短期集中テキストとして，編集されています。

各講座の問題はレベルによって，「A…基礎，B1 ～ B3…標準，C…応用（センター過去問）」に区別されており，難易度の順に配列されています。また，各講座の中で，数学ⅡBの主な単元が一通り出てくるように，扱う単元が偏らないようになっています。これによって，授業時間数や受講生のレベルに合わせて，いろいろな使い方が可能になります。

【使用例】

●基礎から始めたい場合

A，B1，B2を授業形式で解説。

●基礎はできているので，実力をつけたい場合

A，B1は各自自習。B2，B3をじっくり講義。余裕があれば，Cにも挑戦。

●実力をアップさせたい場合

B2，B3，Cを授業形式で解説。

●実践力をつけたい場合

「B2，B3，C」や「B1，B2，B3」のように3題選んで，40分を目標に模試形式で解かせ，その後，解説授業。

◆ 目　次 ◆

A

［1］座標平面上に２点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ -\sin\theta)$，$\mathrm{Q}(\sqrt{3}\sin\theta,\ \sqrt{3}\cos\theta-1)$ がある。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。このとき，２点の距離 PQ は，

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{\boxed{\text{ア}}-\boxed{\text{イ}}\sin\theta-\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}\cos\theta}$$
$$=\sqrt{\boxed{\text{オ}}-\boxed{\text{カ}}\sin\left(\theta+\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi\right)}$$

となるので，$\theta=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi$ のとき最小値 $\boxed{\text{サ}}$ をとる。

［2］$2^x+2^{-x}=t$ とおくと，方程式 $4^x-2^{x+3}-2^{-x+3}+4^{-x}+9=0$ は，$t^{\boxed{\text{シ}}}-\boxed{\text{ス}}t+\boxed{\text{セ}}=0$ となるから，方程式 $4^x-2^{x+3}-2^{-x+3}+4^{-x}+9=0$ より，$2^x+2^{-x}=\boxed{\text{ソ}}$ を得る。これを解くと，$x=-\boxed{\text{タ}}+\log_2(\boxed{\text{チ}}\pm\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}})$ となる。

B-1

曲線 $y=-x^2+2x$ を C_1，曲線 $y=x^2-4x$ を C_2，直線 $y=ax$ を l とする。ただし，a は定数である。また，2 曲線 C_1，C_2 の交点のうち原点ではない方の点を A とする。

(1) 点 A の座標は（$\boxed{\text{ア}}$，$-\boxed{\text{イ}}$）であり，直線 l が点 A を通るのは $a=-\boxed{\text{ウ}}$ のときである。

(2) 曲線 C_1 と直線 l が接するのは $a=\boxed{\text{エ}}$ のときである。

(3) 2 曲線 C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積は $S=\boxed{\text{オ}}$ である。

(4) $x \leqq \boxed{\text{ア}}$ のとき $y=-x^2+2x$ となり，$\boxed{\text{ア}} < x$ のとき $y=x^2-4x$ となる曲線を C とする。$-\boxed{\text{ウ}} < a < \boxed{\text{エ}}$ のとき，C と l で囲まれる 2 つの部分の面積が等しいならば，$a^3+\boxed{\text{カキ}}a^2+\boxed{\text{クケ}}a+\boxed{\text{コサ}}=0$ が成り立つ。

B-2

正四面体 OABC があり，辺 OA，OB，OC 上にそれぞれ，$\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OB}=3\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OF}$ となるように点 D，E，F をとり，3 つの平面 DBC，AEC，ABF の交点を Q とする。点 Q は平面 DBC 上にあるから，$\overrightarrow{DQ}=s\overrightarrow{DB}+t\overrightarrow{DC}$($s$，$t$ は実数）とおける。これより，$\overrightarrow{OQ}$ を求め，

$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}-s-t}{\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{OA}+\boxed{\text{ウ}}s\overrightarrow{OE}+t\overrightarrow{OC}$ と変形すると，Q が平面 AEC 上にあることより，

s，t は，条件式 $\boxed{\text{エ}}s+t=\boxed{\text{オ}}$ …①を満たす。

また，$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{\boxed{\text{カ}}-s-t}{\boxed{\text{キ}}}\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+\boxed{\text{ク}}t\overrightarrow{OF}$ より，s，t は，条件式 $s+\boxed{\text{ケ}}t=\boxed{\text{コ}}$ …②を満たすから，①，②より，

$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{1}{\boxed{\text{サシ}}}\left(\boxed{\text{ス}}\overrightarrow{OA}+\boxed{\text{セ}}\overrightarrow{OB}+\boxed{\text{ソ}}\overrightarrow{OC}\right)$ である。

また，直線 CQ と平面 OAB との交点 R とするとき，

$\overrightarrow{OR}=\dfrac{1}{\boxed{\text{タ}}}\left(\boxed{\text{チ}}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$ である。

B-3

座標平面において点 $(x,\ y)$ は，$\log_2(y-1) \leqq \log_4(3-x)+\log_4(1+x)$ …①を満たしている。
このとき，$x+y$ のとり得る値の範囲を求めよう。

真数の条件より，$y>\boxed{\text{ア}}$，$-\boxed{\text{イ}}<x<\boxed{\text{ウ}}$ …② となる。

①式の右辺は，$\dfrac{\log_2(\boxed{\text{エ}}-x)(\boxed{\text{オ}}+x)}{\boxed{\text{カ}}}$ となるので，不等式①は，

$(x-\boxed{\text{キ}})^2+(y-\boxed{\text{ク}})^2 \leqq \boxed{\text{ケ}}$ …③

となる。

$x+y$ のとり得る値の範囲を求めるには，$x+y=k$ とおき，直線 $y=-x+k$ が②③で与えられる領域を通るときの y 切片 k の値の範囲を求めればよい。

k の値の範囲は，$\boxed{\text{コ}}<k\leqq\boxed{\text{サ}}+\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ となるから，$x+y$ のとり得る値の範囲も，
$\boxed{\text{コ}}<x+y\leqq\boxed{\text{サ}}+\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ となる。

C

k を正の定数として

$$\cos^2 x - \sin^2 x + k\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = 0 \quad \cdots ①$$

を満たす x について考える。

(1) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で①を満たす x の個数について考えよう。

①の両辺に $\sin^2 x \cos^2 x$ をかけ，2 倍角の公式を用いて変形すると

$$\left(\frac{\sin^2 2x}{\boxed{\text{ア}}} - k\right)\cos 2x = 0 \quad \cdots ②$$

を得る。したがって，k の値に関係なく，$x = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{イ}}}$ のときはつねに①が成り立つ。

また，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $0 < \sin^2 2x \leqq 1$ であるから，$k > \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ のとき，①を満たす x は $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{イ}}}$ のみである。一方，$0 < k < \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ のとき，①を満たす x の個数は $\boxed{\text{オ}}$ 個であり，$k = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ のときは $\boxed{\text{カ}}$ 個である。

(2) $k=\dfrac{4}{25}$ とし，$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で①を満たす x について考えよう。

②により $\sin 2x=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ であるから

$$\cos 2x=\frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

である。したがって

$$\cos x=\frac{\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

セミナーワーク　数学ⅡB

第1講座

A

(ア) 5	(イ) 2	(ウ) 2	(エ) 3
(オ) 5	(カ) 4	(キ) 1	(ク) 3
(ケ) 1	(コ) 6	(サ) 1	(シ) 2
(ス) 8	(セ) 7	(ソ) 7	(タ) 1
(チ) 7	(ツ) 3	(テ) 5	

---

[1] $\mathrm{PQ}^2=(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta)^2$

$+\{(\sqrt{3}\cos\theta-1)-(-\sin\theta)\}^2$

$=(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta)^2+(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta-1)^2$

$=3\sin^2\theta-2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$+3\cos^2\theta+\sin^2\theta+1$

$+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-2\sin\theta-2\sqrt{3}\cos\theta$

$=5-2\sin\theta-2\sqrt{3}\cos\theta$

より，

$\mathrm{PQ}=\sqrt{5-2\sin\theta-2\sqrt{3}\cos\theta}$

$=\sqrt{5-(2\sin\theta+2\sqrt{3}\cos\theta)}$

$=\sqrt{5-4\sin\left(\theta+\dfrac{1}{3}\pi\right)}$

となるので，$\theta+\dfrac{1}{3}\pi=\dfrac{1}{2}\pi$，つまり，

$\theta=\dfrac{1}{6}\pi$ のとき，最小値 $\sqrt{5-4\cdot1}=1$ をとる。

[2] $2^x+2^{-x}=t$ のとき，

$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot2^x\cdot2^{-x}=t^2-2$

$2^{x+3}+2^{-x+3}=2^x\cdot2^3+2^{-x}\cdot2^3=8(2^x+2^{-x})=8t$

より，

$4^x+4^{-x}-(2^{x+3}+2^{-x+3})+9$

$=(t^2-2)-8t+9$

$=t^2-8t+7$

となる。これより，方程式

$4^x-2^{x+3}-2^{-x+3}+4^{-x}+9=0\cdots$①

を解くと，$t^2-8t+7=(t-1)(t-7)=0$ となるから，

$t=1,\ 7$ を得る。

ここで，相加平均・相乗平均の関係より，

$t=2^x+2^{-x}\geqq2\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}=2$

となるので，①の解は，$t=7$，つまり，

$2^x+2^{-x}=7$ である。

このとき，$2^x=X\ (X>0)$ とおくと，

$2^x+2^{-x}=7\Leftrightarrow X+\dfrac{1}{X}=7$

$\Leftrightarrow X^2-7X+1=0$

これより，$X=\dfrac{7\pm3\sqrt{5}}{2}$，つまり，$2^x=\dfrac{7\pm3\sqrt{5}}{2}$

を得る。よって，

$x=\log_2\dfrac{7\pm3\sqrt{5}}{2}$

$=\log_2(7\pm3\sqrt{5})-\log_2 2$

$=-1+\log_2(7\pm3\sqrt{5})$

となる。

B-1

(ア) 3	(イ) 3	(ウ) 1	(エ) 2
(オ) 9	(カキ) 12	(クケ) 48	
(コサ) 10			

---

(1) $-x^2+2x=x^2-4x\Leftrightarrow x(x-3)=0$ より，$x=3$ となる。

$x=3$ のとき，$y=-x^2+2x$ より $y=-3$ となるから，

$\mathrm{A}(3,\ -3)$ である。

このとき，OA の傾きは -1 となるから，

$a=-1$ である。

[別解]

$y=ax$ が $(3,\ -3)$ を通るから，$-3=3a$ より

$a=-1$ となる。

(2) 曲線 C_1 と直線 l はともに原点を通るので接するときの接点は原点である。

$y=-x^2+2x$ のとき $y'=-2x+2$

$x=0$ のとき $y'=2$ だから，$a=2$ である。

(3) 2 曲線 C_1 と C_2 の交点は $(0,\ 0)$ と $(3,\ -3)$ になるから，求める面積は $S=2\times\dfrac{1}{6}\cdot1\cdot3^3=9$ である。

(4) $-1<a<2$ のとき，C と l の共有点のうち $3\leqq x$ である点の x 座標を求める。

$x^2-4x=ax\Leftrightarrow x^2-(4+a)x=0$

$\Leftrightarrow x=0,\ 4+a$

$-1<a<2$ より $3<4+a<6$ となるから $3\leqq x$ を満たすのは $x=4+a$ である。

このとき，$y=x^2-4x$ と l で囲まれる部分の面積を

S_1 とすると，$S_1=\dfrac{1}{6}\cdot1\cdot(4+a)^3$

また，$y=-x^2+2x$ と $y=x^2-4x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とすると，(3)より $S_2=9$

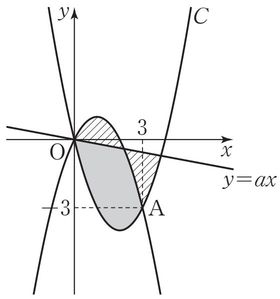
C と l で囲まれる 2 つの部分の面積が等しいならば，

$S_1=S_2$ となるので，

$\dfrac{1}{6}\cdot1\cdot(4+a)^3=9\Leftrightarrow(a+4)^3=54$

$\Leftrightarrow a^3+12a^2+48a+10=0$

が成り立つ。



B−2

(ア) 1	(イ) 2	(ウ) 3	(エ) 5
(オ) 1	(カ) 1	(キ) 2	(ク) 4
(ケ) 7	(コ) 1	(サシ) 17	(ス) 6
(セ) 3	(ソ) 2	(タ) 5	(チ) 2

$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{DB}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=s(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}})+t(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OD}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1-s-t}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$\left(\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\text{ より}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1-s-t}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3s\overrightarrow{\mathrm{OE}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$(\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3\overrightarrow{\mathrm{OE}}\text{ より})$

と表せる。Q が平面 AEC 上にあることより，

$\dfrac{1-s-t}{2}+3s+t=1\Leftrightarrow 5s+t=1$…①

同様に，

$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{DB}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1-s-t}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1-s-t}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4t\overrightarrow{\mathrm{OF}}$

$(\overrightarrow{\mathrm{OC}}=4\overrightarrow{\mathrm{OF}}\text{ より})$

となるから，Q が平面 ABF 上にあることより，

$\dfrac{1-s-t}{2}+s+4t=1\Leftrightarrow s+7t=1$…②

となる。①②より，$s=\dfrac{3}{17}$，$t=\dfrac{2}{17}$ となるので，

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{2}(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より，

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{17}(6\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}})$ となる。

$\overrightarrow{\mathrm{CR}}=k\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ となるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$
$$=\frac{6}{17}k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{17}k\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\left(1-\frac{15}{17}k\right)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$1-\dfrac{15}{17}k=0$ より，$k=\dfrac{17}{15}$ となるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{6}{15}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{15}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{5}(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

となる。

B−3

(ア) 1	(イ) 1	(ウ) 3	(エ) 3	(オ) 1
(カ) 2	(キ) 1	(ク) 1	(ケ) 4	(コ) 0
(サ) 2	(シ) 2	(ス) 2		

真数は正であるから，$y>1$，$-1<x<3$…②

①の右辺は，

$$\log_4(3-x)+\log_4(1+x)=\frac{\log_2(3-x)(1+x)}{2}$$

となる。不等式①は，

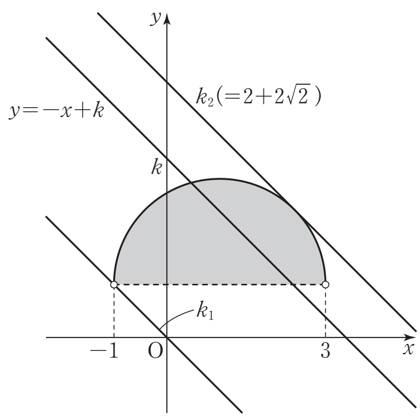
$$\log_2(y-1)^2\leqq\log_2(-x^2+2x+3)$$

となる。

底 2 は 1 より大きいので，$(y-1)^2\leqq -x^2+2x+3$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2\leqq 4$…③となる。

直線 $y=-x+k$ が，②③で与えられる領域を通るときは下図のようになる。



境界は，点線部は含まないが他は含む。

$x+y=k$ とおいて，$y=-x+k$ が②③で与えられる領域を通るときの k の範囲を求める。

直線 $y=-x+k$ （$\Leftrightarrow x+y=k$）が点 $(-1,\ 1)$ を通るときの k の値を k_1 とすると，

$k_1=-1+1=0$

である。

直線 $y=-x+k$ （$\Leftrightarrow x+y=k$）が半円と接するときの k の値を k_2 とする。このとき，円の中心 $(1,\ 1)$ と直線 $x+y-k=0$ の距離が円の半径 2 に等しくなるから，

$$\frac{|1+1-k|}{\sqrt{1+1}}=2 \Leftrightarrow |-k+2|=2\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow |k-2|=2\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow k-2=\pm 2\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow k=2\pm 2\sqrt{2}$$

図の半円と接するときは $k=2+2\sqrt{2}$ のときであるから，$k_2=2+2\sqrt{2}$ である。

求める k の値の範囲は図より，$k_1<k\leqq k_2$ となるから，$0<k\leqq 2+2\sqrt{2}$ となる。

よって，$0<x+y\leqq 2+2\sqrt{2}$ である。

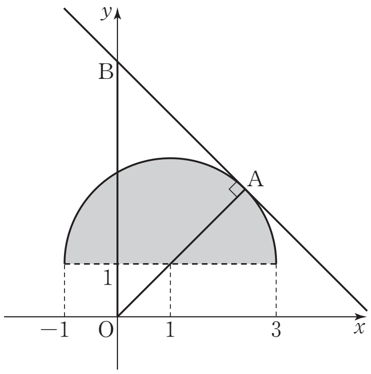
[参考]

下図のように，三角形 OAB が直角二等辺三角形になることに気づけば，k_2 は次のようにして簡単に求めることができる。

原点 O から円の中心 (1, 1) までの距離が $\sqrt{2}$，円の中心から点 A までの距離が 2 (円の半径) であるから，$\mathrm{OA}=\sqrt{2}+2$ となる。また，三角形 OAB が直角二等辺三角形であるから，$\mathrm{OB}=\sqrt{2}\mathrm{OA}$ となる。よって，

$$k_2=\mathrm{OB}=\sqrt{2}\mathrm{OA}=\sqrt{2}(\sqrt{2}+2)=2+2\sqrt{2}$$

となる。



C

(ア)	4	(イ)	4	(ウ)	1	(エ)	4	(オ)	3
(カ)	1	(キ)	4	(ク)	5	(ケコ)	−3		
(サ)	5	(シ)	5	(ス)	5				

---

(1) $\cos^2 x-\sin^2 x+k\times\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=0$

$$\cos^2 x-\sin^2 x-\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{(\sin x\cos x)^2}k=0$$

$$\left\{1-\frac{k}{(\sin x\cos x)^2}\right\}(\cos^2 x-\sin^2 x)=0$$

$$\{(\sin x\cos x)^2-k\}(\cos^2 x-\sin^2 x)=0$$

$$\left\{\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2-k\right\}\cos 2x=0$$

$$\left(\frac{\sin^2 2x}{4}-k\right)\cos 2x=0 \quad \cdots②$$

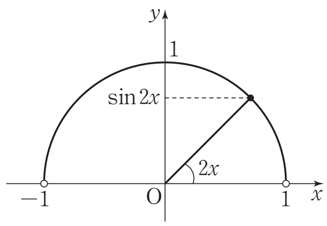
ここで，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において $\cos 2x=0$ となるのは，

$0<2x<\pi$ より，

$$2x=\frac{\pi}{2} \quad よって \quad x=\frac{\pi}{4}$$

のときであり，このとき②は成り立つので，k の値に関係なく，$x=\dfrac{\pi}{4}$ のときはつねに①が成り立つ。

…③



また，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<2x<\pi$ であるから，

$$0<\sin 2x\leqq 1$$

これより，$0<\sin^2 2x\leqq 1$ であるから，

$$\frac{\sin^2 2x}{4}-k=0 \quad より，\sin^2 2x=4k \quad \cdots④$$

これを満たす x は，$0<4k\leqq 1$　すなわち

$0<k\leqq\dfrac{1}{4}$ のときに存在し，$k>\dfrac{1}{4}$ のとき，①を満たす x は，③より，$x=\dfrac{\pi}{4}$

また，$0<k<\dfrac{1}{4}$ のとき，④より

$\sin 2x=\pm\sqrt{4k}=\pm 2\sqrt{k}$ であり，

$0<2x<\pi$ のとき，$\sin 2x>0$ なので

$$\sin 2x=2\sqrt{k}$$

これを満たす $2x$ $(0<2x<\pi)$ は，2 つあり，一方は，

$0<2x<\dfrac{\pi}{2}$　すなわち

$0<x<\dfrac{\pi}{4}$，もう一方は，$\dfrac{\pi}{2}<2x<\pi$　すなわち

$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ にあり，いずれも $x=\dfrac{\pi}{4}$ とは異なる。

したがって，

①を満たす x の個数は 3 個である。

また，$k=\dfrac{1}{4}$ のとき，④より，$\sin^2 2x=1$

$2x=\dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$x=\dfrac{\pi}{4}$ となり，これは③のときの x と一致する。

したがって，このとき①を満たす x の個数は 1 個である。

(2) $k=\dfrac{4}{25}$ のとき，$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\dfrac{\pi}{2}<2x<\pi$ であ

るから，$\cos 2x \neq 0$　つまり，④を満たす x について考えればよい。

$$\sin^2 2x = \frac{16}{25} \text{ より，} \sin 2x = \frac{4}{5}$$

ここで，$\frac{\pi}{2} < 2x < \pi$ に注意すると，$\cos 2x < 0$ より，

$$\cos 2x = -\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{-3}{5}$$

したがって，

$$2\cos^2 x - 1 = -\frac{3}{5} \text{ より，} \cos^2 x = \frac{1}{5}$$

ここで，$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ より，$\cos x > 0$ であるから，

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

第２講座

A

(ア) 1　**(イ)** 2　**(ウエ)** 16　**(オ)** 6
(カ) 3　**(キ)** 3　**(ク)** 1　**(ケ)** 3　**(コ)** 1
(サ) 5　**(シス)** 31　**(セソ)** 55　**(タチツ)** 111

---

[1]　(1)　$f(x) = x^3 - (3+3a)x^2 + 12ax$ のとき

$$f'(x) = 3x^2 - 2(3+3a)x + 12a$$
$$= 3\{x^2 - 2(1+a)x + 4a\}$$
$$= 3(x-2)(x-2a)$$

である。

$f'(x)=0$ が異なる 2 つの解を持つときに $f(x)$ は極値を持つので，$f(x)$ が極値をもたないのは $a=1$ のときである。

（このとき $f'(x)=0$ は重解 $x=2$ を持つ）

(2)　$1<a$ のとき，極小値 $g(a)$ は

$$g(a) = f(2a) = -4a^2(a-3) = -4a^3 + 12a^2$$

であるから，

$$g'(a) = -12a^2 + 24a = -12a(a-2)$$

となり，$1<a$ の範囲における $g(a)$ の増減表は次のようになる。

a	(1)	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(a)$		$+$	0	$-$
$g(a)$	(8)	↗	16	↘

増減表より，$a=2$ のとき最大値 $g(2)=16$ をとる。

(3)　$f(x) = x^3 - (3+3a)x^2 + 12ax$,

$f'(x) = 3x^2 - 2(3+3a)x + 12a$ より，

$f(1) = 9a-2$，$f'(1) = 6a-3$ となるから，

点 $(1, f(1))$ における接線の方程式は，

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x-1)$$
$$\Leftrightarrow y - (9a-2) = (6a-3)(x-1)$$
$$\Leftrightarrow y = (6a-3)x + 3a + 1$$

となる。

[2]　$a_1 = S_1$ より $a_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$

$n \geqq 2$ のとき，$a_n = S_n - S_{n-1}$ より

$$a_n = \left(\frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right) - \left\{\frac{3}{2}(n-1)^2 + \frac{1}{2}(n-1)\right\}$$
$$= 3n-1$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

よって，$a_n = 3n-1$ である。このとき，

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots\cdots + \frac{1}{a_{20} a_{21}} = \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$$
$$= \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{59} - \frac{1}{62}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{62}\right) = \frac{5}{31}$$

$a_{k+1} = S_{k+1} - S_k$ より，

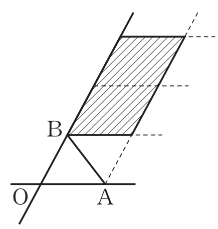
$$\sum_{k=1}^{11} \frac{a_{k+1}}{S_k S_{k+1}} = \sum_{k=1}^{11} \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k S_{k+1}} = \sum_{k=1}^{11} \left(\frac{1}{S_k} - \frac{1}{S_{k+1}}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2}\right) + \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{S_{11}} - \frac{1}{S_{12}}\right)$$
$$= \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_{12}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{222} = \frac{110}{222} = \frac{55}{111}$$

B–1

(ア) 4　**(イ)** 4　**(ウ)** 3　**(エ)** 6

---

[1]　(1)　点 P が動ける範囲は右図の斜線部分になるから，その面積は，三角形 OAB の面積の 4 倍になる。



(2)　$s+3t \leqq 2$ より，

$$\frac{1}{2}s + \frac{3}{2}t \leqq 1 \text{ となる。}$$

$s' = \frac{1}{2}s$，$t' = \frac{3}{2}t$ とおき，$\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

とおくと，

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}s \cdot 2\overrightarrow{OA} + \frac{3}{2}t \cdot \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = s'\overrightarrow{OA'} + t'\overrightarrow{OB'}$$

となる。また，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$，$\frac{1}{2}s + \frac{3}{2}t \leqq 1$ は，$s' \geqq 0$，

$t' \geqq 0$，$s'+t' \leqq 1$ となるから点 P が動ける範囲は三角形 OA′B′ の周上および内部と