数学Ⅲ

特　色

本書は，学習指導要領をふまえ，各単元の標準的なレベルの問題を，年間を通じてじっくり完全マスターし，あわせて，受験への基礎対策用としても使用できるように編集されています。

数学は体系が整然としている学問ですから，１つの単元を把握するためには，それを構成している基本事項を正確に理解し，さらに，その単元における典型的な問題の解法パターンを習得することが必要です。

そこで本書では，各単元において，基本事項や重要事項を習得するための基本レベルの問題を取り上げ，それらを反復練習することでまず基礎を固め，続いて，単元の内容をより深く理解する上で必須となる標準レベルの問題を精選して，その解き方をパターンとして学ぶことによって，幅広い応用力が定着するようにしました。

構　成

○数学Ⅲで学習する事項を，７章51セクションに分けました。
○各セクションは原則として見開き２ページ構成で，年間計画がたてやすいよう配慮されています。

☆１セクションの構成

（セクション）

学習の要点	言葉による基本事項の説明。 公式や計算法則の例示。
基本問題	新しく学習する内容についての理解度をチェックする。 基本レベルの問題で構成。
例　題	単元を代表する標準レベルの問題を，解き方のパターンも含めて学習する。
標準問題 発展問題	例題の関連問題を解きながら，応用範囲の広い実戦力の養成をめざす。
章末問題	章全体のまとめと，程度の高い問題で応用力を養う。

もくじ

1章 複素数平面

1 複素数平面

☆学習の要点☆

❶ 複素数平面

(1) 複素数$z=a+bi$を座標平面上の点P$(a,\ b)$で表すとき，この平面を**複素数平面**という。
また，この点Pを**P(z)**または**点z**と書く。

(2) x軸を**実軸**，y軸を**虚軸**という。

(3) 複素数zの**共役複素数**を$\overline{z}$で表す。$z=a+bi$のとき，$\overline{z}=a-bi$

zが実数 $\iff$ $\overline{z}=z$

zが純虚数 $\iff$ $\overline{z}=-z$　　ただし，$z\neq 0$

(4) 複素数zの**絶対値**を$|z|$で表す。$z=a+bi$のとき，$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

❷ 複素数の性質

(1) 共役複素数

① $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$　② $\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$　③ $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$　④ $\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$

(2) 複素数の絶対値

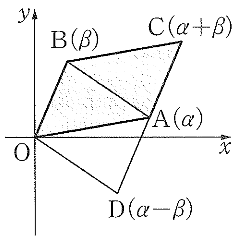
① $|z|=|-z|=|\overline{z}|$　② $z\overline{z}=|z|^2$　③ $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$　④ $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$

❸ 複素数の演算　$\alpha=a+bi,\ \beta=c+di$とする。

(1) **複素数の実数倍**　3点0，α，βが一直線上にある $\iff$ $\beta=k\alpha$となる実数kがある

(2) **複素数の和**　$\alpha+\beta=(a+c)+(b+d)i$
右の図で，四角形OACBは平行四辺形である。

(3) **複素数の差**　$\alpha-\beta=(a-c)+(b-d)i$
右の図で，四角形ODABは平行四辺形である。



❹ 2点間の距離

2点α，β間の距離は，$|\beta-\alpha|$

●基本問題——●●

1 ［**複素数平面上の位置**］　複素数平面上に次の複素数を表す点を図示せよ。

(1) $1+3i$　(2) $2-i$　(3) $(1+i)^2$

2 ［**共役複素数**］　次の複素数の共役複素数を求めよ。

(1) $(3-2i)+(1+4i)$　(2) $(1+i)(2-3i)$

3 ［**複素数の絶対値**］　次の複素数の絶対値を求めよ。

(1) $1+\sqrt{3}\,i$　(2) $(2+3i)(\sqrt{3}-i)$

4 ［**2点間の距離**］　次の2点間の距離を求めよ。

(1) i，$2-3i$　(2) $3+2i$，$7-5i$

例題 1　共役複素数の性質

複素数 z について，$|z|=1$ のとき，$z+\dfrac{1}{z}$ は実数であることを証明せよ。

着眼点　α が実数 $\iff$ $\overline{\alpha}=\alpha$ が成り立つ。また，$|z|^2=1^2$ より，$z\overline{z}=1$ となる。

証明　$|z|=1$ の両辺を 2 乗すると，$|z|^2=1^2$　$z\overline{z}=1$ より，$\overline{z}=\dfrac{1}{z}$

よって，$\overline{z+\dfrac{1}{z}}=\overline{z}+\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\overline{z}+\dfrac{1}{\overline{z}}=\dfrac{1}{z}+z=z+\dfrac{1}{z}$

つまり，$z+\dfrac{1}{z}$ は実数である。

5　**類題**　複素数 z について，$|z|=1$ のとき，$z^n+\dfrac{1}{z^n}$　(n は自然数)は実数であることを証明せよ。

▶標準問題――◀◀

6　$|z|=\sqrt{5}$，$z+\overline{z}=2$ のとき，複素数 z を求めよ。

7　$\left(\alpha+\dfrac{1}{\overline{\alpha}}\right)\left(\overline{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha}\right)=4$ のとき，複素数 α の絶対値 $|\alpha|$ を求めよ。

8　x の n 次方程式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0$ が複素数 α を解にもつとき，共役複素数 $\overline{\alpha}$ もこの方程式の解になることを証明せよ。ただし，a_0，a_1，a_2，……，a_n は実数とする。

9　$\alpha=a+2i$，$\beta=6+3i$ とする。2 点 A(α)，B(β) と原点 O が一直線上にあるとき，実数 a を求めよ。

◆発展問題――◆◆

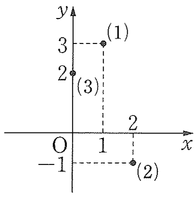
10　複素数 α，β が $|\alpha|=|\beta|=|\alpha-\beta|=1$ を満たすとき，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ を求めよ。

ヒント　$z=\dfrac{\beta}{\alpha}$ とおき，$z+\overline{z}$，$z\overline{z}$ の値を求めて，z を解にもつ 2 次方程式を考える。

1章　複素数平面

【p. 4】　1　複素数平面

1　(3)　$(1+i)^2=1+2i+i^2=1+2i-1=2i$



2　(1)　$z=4+2i$ より，$\boldsymbol{\bar{z}=4-2i}$

(2)　$z=2-3i^2-i=5-i$ より，$\boldsymbol{\bar{z}=5+i}$

3　(1)　$|1+\sqrt{3}\,i|=\sqrt{1+(\sqrt{3}\,)^2}=\boldsymbol{2}$

(2)　$|(2+3i)(\sqrt{3}-i)|=|2+3i||\sqrt{3}-i|$
$=\sqrt{2^2+3^2}\sqrt{(\sqrt{3}\,)^2+(-1)^2}=\boldsymbol{2\sqrt{13}}$

4　(1)　$\sqrt{(2-0)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{20}=\boldsymbol{2\sqrt{5}}$

(2)　$\sqrt{(7-3)^2+(-5-2)^2}=\boldsymbol{\sqrt{65}}$

【p. 5】

5　**類題**　$|z|^2=1^2$ より，$z\bar{z}=1$　　$\bar{z}=\dfrac{1}{z}$

$\overline{z^n+\dfrac{1}{z^n}}=\overline{z^n}+\overline{\dfrac{1}{z^n}}=(\bar{z})^n+\dfrac{1}{(\bar{z})^n}=\dfrac{1}{z^n}+z^n$

$=z^n+\dfrac{1}{z^n}$

よって，$z^n+\dfrac{1}{z^n}$ は実数である。

6　$z=a+bi$ とすると，$\bar{z}=a-bi$

$z+\bar{z}=2$ より，$2a=2$　　$a=1$

$|z|^2=(\sqrt{5}\,)^2$　　$a^2+b^2=5$　　$b^2=4$　　$b=\pm2$

よって，$\boldsymbol{z=1\pm2i}$

7　$\alpha\bar{\alpha}+1+1+\dfrac{1}{\alpha\bar{\alpha}}=4$　　$|\alpha|^2-2+\dfrac{1}{|\alpha|^2}=0$

$\left(|\alpha|-\dfrac{1}{|\alpha|}\right)^2=0$　　$|\alpha|-\dfrac{1}{|\alpha|}=0$　　$|\alpha|^2=1$

$|\alpha|\geqq0$ より，$\boldsymbol{|\alpha|=1}$

8　α は方程式の解だから，

$a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+a_2\alpha^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0$

$\overline{a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+a_2\alpha^{n-2}+\cdots\cdots+a_n}=\overline{0}$

$a_0(\bar{\alpha})^n+a_1(\bar{\alpha})^{n-1}+a_2(\bar{\alpha})^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0$

よって，共役複素数 $\bar{\alpha}$ も解である。

9　$\beta=k\alpha$ より，$6+3i=k(a+2i)$

$6=ka$，$3=2k$ を解いて，$k=\dfrac{3}{2}$，$\boldsymbol{a=4}$

10　$|\alpha|^2=|\beta|^2=|\alpha-\beta|^2=1^2$ より，$\alpha\bar{\alpha}=1$，$\beta\bar{\beta}=1$

$(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})=1$ より，$\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta=1$

$z=\dfrac{\beta}{\alpha}$ とおくと，$z+\bar{z}=\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}=\dfrac{\bar{\alpha}\beta+\alpha\bar{\beta}}{\alpha\bar{\alpha}}=1$

$z\bar{z}=\dfrac{\beta\bar{\beta}}{\alpha\bar{\alpha}}=1$　　z は $x^2-x+1=0$ の解だから，

$z=\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$　　つまり，$\dfrac{\beta}{\alpha}=\boldsymbol{\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}}$

【p. 6】　2　複素数の極形式

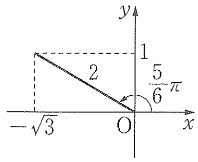
11　(1)　$\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$

(2)　$\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

(3)　$|-\sqrt{3}+i|=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$

図より，$\theta=\dfrac{5}{6}\pi$

与式$=2\left(\cos\dfrac{5}{6}\pi+i\sin\dfrac{5}{6}\pi\right)$



(4)　$|-\sqrt{5}\,|=\sqrt{5}$

与式$=\sqrt{5}\,(\cos\pi+i\sin\pi)$

12　(1)　$z=2-2i$ とおく。

絶対値　$|z|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=\boldsymbol{2\sqrt{2}}$

偏角　　$\arg z=\boldsymbol{-\dfrac{\pi}{4}+2n\pi}$　（n は整数）

(2)　$z=2i$ とおく。

絶対値　$|z|=\sqrt{0^2+2^2}=\sqrt{4}=\boldsymbol{2}$

偏角　　$\arg z=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}+2n\pi}$　（n は整数）

13　$\alpha=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\beta=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\alpha\beta=2\cdot\sqrt{2}\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$

$=\boldsymbol{2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{12}\pi+i\sin\dfrac{7}{12}\pi\right)}$

絶対値　$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|=2\cdot\sqrt{2}=\boldsymbol{2\sqrt{2}}$

偏角　　$\arg\alpha\beta=\arg\alpha+\arg\beta=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}=\boldsymbol{\dfrac{7}{12}\pi}$

14　$\alpha=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\beta=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$

$=\boldsymbol{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)}$

絶対値　$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

偏角　　$\arg\dfrac{\alpha}{\beta}=\arg\alpha-\arg\beta=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{12}}$

【p. 7】

15　**類題**　$z=(1+i)(1+\sqrt{3}\,i)$
$=(1-\sqrt{3}\,)+(1+\sqrt{3}\,)i$ ……①

また，

$z=\{\sqrt{2}\,(\cos45^\circ+i\sin45^\circ)\}\{2(\cos60^\circ+i\sin60^\circ)\}$
$=2\sqrt{2}\,(\cos105^\circ+i\sin105^\circ)$ ……②

①，②の実部，虚部を比べて，

$2\sqrt{2}\cos105^\circ=1-\sqrt{3}$，$2\sqrt{2}\sin105^\circ=1+\sqrt{3}$

よって，

$\boldsymbol{\cos105^\circ=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$，$\boldsymbol{\sin105^\circ=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$

16　(1)　$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

(2)　$2\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$

17　$z=\dfrac{(1-\sin\theta+i\cos\theta)^2}{(1-\sin\theta)^2+\cos^2\theta}$