数学B

特　色

本書は，学習指導要領をふまえ，各単元の標準的なレベルの問題を，年間を通じてじっくり完全マスターし，あわせて，受験への基礎対策用としても使用できるように編集されています。

数学は体系が整然としている学問ですから，１つの単元を把握するためには，それを構成している基本事項を正確に理解し，さらに，その単元における典型的な問題の解法パターンを習得することが必要です。

そこで本書では，各単元において，基本事項や重要事項を習得するための基本レベルの問題を取り上げ，それらを反復練習することでまず基礎を固め，続いて，単元の内容をより深く理解する上で必須となる標準レベルの問題を精選して，その解き方をパターンとして学ぶことによって，幅広い応用力が定着するようにしました。

構　成

○数学Ｂで学習する事項を，４章36セクションに分けました。
○各セクションは見開き２ページ構成で，年間計画がたてやすいよう配慮されています。

☆１セクションの構成

(セクション)

学習の要点	言葉による基本事項の説明。 公式や計算法則の例示。
基本問題	新しく学習する内容についての理解度をチェックする。 基本レベルの問題で構成。
例　　題	単元を代表する標準レベルの問題を，解き方のパターンも含めて学習する。
標準問題 発展問題	例題の関連問題を解きながら，応用範囲の広い実戦力の養成をめざす。
章末問題	章全体のまとめと，程度の高い問題で応用力を養う。

もくじ

1章　平面上のベクトル

2章　空間のベクトル

3章　数列

4章　確率分布と統計的な推測

4 ベクトルの内積(1)

☆学習の要点☆

❶ 内積の定義

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**内積**といい，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ と表す。

すなわち，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$　　特に，$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ （ただし，$0°\leqq\theta\leqq180°$）

❷ 内積と成分

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

❸ 内積の演算の基本性質

(1)　交換法則　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

(2)　結合法則　$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(k\vec{b})$　（k は実数）

(3)　分配法則　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$，$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

❹ 内積となす角，垂直条件

(1)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$　（ただし，$0°\leqq\theta\leqq180°$）

(2)　垂直条件　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

●基本問題――●●

26　[ベクトルの内積]　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，次の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(1)　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\theta=60°$　　(2)　$|\vec{a}|=\sqrt{6}$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，$\theta=150°$

27　[内積の成分計算]　次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(1)　$\vec{a}=(1,\ -3)$，$\vec{b}=(-2,\ 1)$　　(2)　$\vec{a}=(1,\ -1)$，$\vec{b}=(2,\ 2\sqrt{3}-4)$

28　[内積となす角]　次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(1)　$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$　　(2)　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$

29　[内積の演算①]　次の内積を $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ で表せ。

(1)　$(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})$　　(2)　$(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(3\vec{a}+2\vec{b})$

30　[内積の演算②]　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}+\vec{b}|=4$ のとき，次の内積を求めよ。

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}$　　(2)　$(\vec{a}-3\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})$

例題 4 内積の計算

$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

着眼点　$|\vec{a}-\vec{b}|$ は $|\vec{a}-\vec{b}|^2$ を考えるのが定石。$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ を利用する。

解　$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$ から，$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=13$　　$\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}=13$

$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=13$，$1^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+3^2=13$

よって，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{2}$　　ゆえに，$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{1\times3}=-\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より，$\theta=120^\circ$ ……答

31 類題　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{a}-\vec{b}|=3$ のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

▶標準問題──◀◀

32　次の問いに答えよ。

(1)　3点A$(-1,\ 2)$，B$(1,\ -3)$，C$(4,\ 3)$のとき，内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。

(2)　$\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(1-x,\ x)$ のとき，$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=0$ となるような x の値を求めよ。

33　次の問いに答えよ。

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=17$ のとき，$|\vec{a}+\vec{b}|$ と $|\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

(2)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-\vec{b}|=2$ のとき，$\vec{a}+k\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直になるような k の値を求めよ。

(3)　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{a}+\vec{b}|=2\sqrt{3}$，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が60°のとき，$|\vec{b}|$ と $|2\vec{a}+\vec{b}|$ の値を求めよ。

34　2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ がある。$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{a}|=t|\vec{b}|$（$t$ はある正の数）のとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を求めよ。

(2)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を t で表せ。

◆発展問題──◆◆

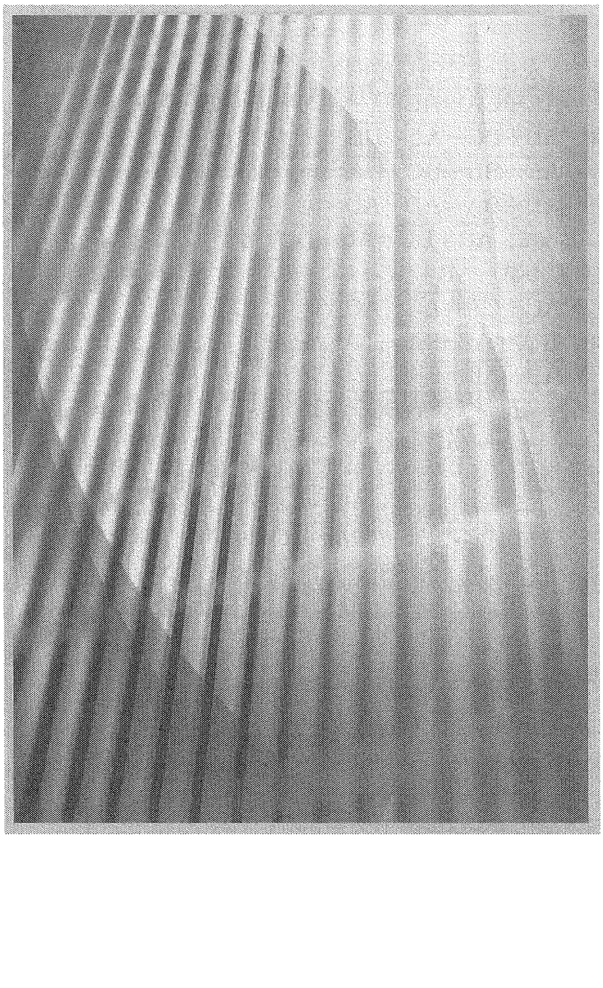
35　$\vec{a}$，$\vec{b}$ は平面上の相異なるベクトルで，大きさはともに1であるとする。$\vec{v}(t)=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ の大きさを最小にする t を t_0 とするとき，内積 $(\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{v}(t_0)$ を求めよ。　〈大阪市大〉

ヒント　$\vec{v}(t)$ の大きさは $|\vec{v}(t)|$ で，$|\vec{v}(t)|^2$ は t の2次関数になる。

高校ゼミ・エセンス

数学B

解答編



CKT

$t=\frac{9}{17}$ のとき，最小値 $\frac{2\sqrt{17}}{17}$

25 (1) $|\vec{a}|=\sqrt{2x^2+4x+10}=\sqrt{2(x+1)^2+8}$

$x=-1$ のとき最小で，このとき，$\vec{a}=(-2,\ 2)$

(2) $\vec{a}+\vec{b}=(y+1,\ y-2)$

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(y+1)^2+(y-2)^2}=5$ より，

$y^2-y-10=0$　よって，$y=\frac{1\pm\sqrt{41}}{2}$

$\vec{b}=\left(\frac{7\pm\sqrt{41}}{2},\ \frac{-7\pm\sqrt{41}}{2}\right)$　**(複号同順)**

【p. 10】 4 ベクトルの内積(1)

26 (1) 3　(2) -3

27 (1) -5　(2) $6-2\sqrt{3}$

28 (1) $\theta=60°$　(2) $\theta=150°$

29 (1) 与式 $=(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot2\vec{a}+(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot3\vec{b}$

$=2\vec{a}\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})+3\vec{b}\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})$

$=4\vec{a}\cdot\vec{a}+6\vec{a}\cdot\vec{b}+6\vec{b}\cdot\vec{a}+9\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=\mathbf{4|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2}$

(2) 与式 $=(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot3\vec{a}+(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot2\vec{b}$

$=3\vec{a}\cdot(3\vec{a}-2\vec{b})+2\vec{b}\cdot(3\vec{a}-2\vec{b})$

$=9\vec{a}\cdot\vec{a}-6\vec{a}\cdot\vec{b}+6\vec{b}\cdot\vec{a}-4\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=9|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+6\vec{a}\cdot\vec{b}-4|\vec{b}|^2=\mathbf{9|\vec{a}|^2-4|\vec{b}|^2}$

30 (1) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$ より，

$4^2=2^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+3^2$　よって，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\mathbf{\frac{3}{2}}$

(2) 与式 $=3\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-9\vec{b}\cdot\vec{a}+3\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=3|\vec{a}|^2-10\vec{a}\cdot\vec{b}+3|\vec{b}|^2$

$=3\times2^2-10\times\frac{3}{2}+3\times3^2=\mathbf{24}$

【p. 11】

31 類題 $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=2^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+1^2=9$

よって，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\mathbf{-2}$

$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-2}{2\cdot1}=-1$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ より，$\mathbf{\theta=180°}$

32 (1) $\overrightarrow{AB}=(2,\ -5)$，$\overrightarrow{AC}=(5,\ 1)$ より，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times5+(-5)\times1=\mathbf{5}$

(2) $\vec{a}+\vec{b}=(2-x,\ 2+x)$ より，

$1\cdot(2-x)+2\cdot(2+x)=0$　よって，$\mathbf{x=-6}$

33 (1) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=25$ より，

$\mathbf{|\vec{a}+\vec{b}|=5}$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=9$ より，

$\mathbf{|\vec{a}-\vec{b}|=3}$

(2) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=4-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4=4$ より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$

$(\vec{a}+k\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2+(k-1)\vec{a}\cdot\vec{b}-k|\vec{b}|^2=0$ より，

$4+2(k-1)-4k=0$　$-2k+2=0$

よって，$\mathbf{k=1}$

(3) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=4+4|\vec{b}|\cos60°+|\vec{b}|^2=12$

$|\vec{b}|^2+2|\vec{b}|-8=0$　これを解くと，

$|\vec{b}|=-4,\ 2$　$|\vec{b}|>0$ より，$\mathbf{|\vec{b}|=2}$

よって，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos60°=2\times2\times\frac{1}{2}=2$

$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=16+4\times2+4=28$

よって，$\mathbf{|2\vec{a}+\vec{b}|=2\sqrt{7}}$

34 (1) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=7$ ……①

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=3$ ……②

①−② より，$\mathbf{\vec{a}\cdot\vec{b}=1}$

(2) ①+② より，$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=5$

$|\vec{a}|=t|\vec{b}|$ を代入して，$t^2|\vec{b}|^2+|\vec{b}|^2=5$

よって，$|\vec{b}|^2=\frac{5}{t^2+1}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=t|\vec{b}|^2\cos\theta=1$ より，

$\cos\theta=\frac{1}{t|\vec{b}|^2}=\mathbf{\frac{t^2+1}{5t}}$

35 $|\vec{v}(t)|^2=t^2+2(t-t^2)(\vec{a}\cdot\vec{b})+(1-t)^2$

$=2(1-\vec{a}\cdot\vec{b})(t^2-t)+1$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，$0°<\theta\leqq180°$ より

$-1\leqq\cos\theta<1$　よって，$-1\leqq\vec{a}\cdot\vec{b}<1$

$1-\vec{a}\cdot\vec{b}>0$ より，t^2 の係数は正となり最小値をもつ。

$|\vec{v}(t)|^2=2(1-\vec{a}\cdot\vec{b})\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}(1+\vec{a}\cdot\vec{b})$

$t_0=\frac{1}{2}$ のとき最小になる。

$(\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{v}(t_0)=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}+\vec{a})$

$=\frac{1}{2}(|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2)=\mathbf{0}$

【p. 12】 5 ベクトルの内積(2)

36 (1) 45°　(2) 120°

37 (1) $\overrightarrow{AB}=(2+2\sqrt{3},\ 2-2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AC}=(2,\ 2)$

より，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(2+2\sqrt{3})\cdot2+(2-2\sqrt{3})\cdot2=\mathbf{8}$

(2) $|\overrightarrow{AB}|=4\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{2}$ より，

$\angle BAC=\theta$ とすると，

$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{8}{4\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$

よって，$0°\leqq\theta\leqq180°$ より，$\theta=\angle BAC=\mathbf{60°}$

38 (1) 2

(2) $\vec{e}=(x,\ y)$，$x^2+y^2=1$

$2x-y=0$ より，

$\vec{e}=\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{5},\ \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$　**(複号同順)**

39 (1) $5\cdot3-k(k-2)=0$ より，

$k^2-2k-15=0$　$(k+3)(k-5)=0$

よって，$\mathbf{k=-3,\ 5}$

(2) $\vec{a}+t\vec{b}=(2-t,\ 3+t)$

$t\vec{a}+2\vec{b}=(2t-2,\ 3t+2)$ より，

$(2-t)(3t+2)-(3+t)(2t-2)=0$