第2講座　複素数と図形

基本の整理

〈線分の内分点・外分点〉　▶2点A(α), B(β)に対して，線分ABを$m:n$に内分する点は，$\dfrac{n\alpha+m\beta}{m+n}$

1　$\alpha=3-2i$，$\beta=9-5i$の表す点をそれぞれA，Bとする。次の点を表す複素数を求めよ。

(1)　線分ABを2：1に内分する点　　(2)　線分ABを3：2に外分する点

(3)　線分ABの中点　　(4)　原点をOとするとき，△OABの重心

〈2点間の距離〉　▶2点A(α)，B(β)に対して，AB間の距離は，$|\beta-\alpha|$

2　次の2点間の距離を求めよ。

(1)　$\alpha=3i$，$\beta=-2+i$　　(2)　$\alpha=5-2i$，$\beta=1+i$

〈図形の方程式〉　▶中心α，半径rの円$\Rightarrow|z-\alpha|=r$，線分z_1z_2の垂直二等分線$\Rightarrow|z-z_1|=|z-z_2|$

3　次の等式を満たす点zは，どのような図形を描くか。

(1)　$|z-i|=2$　　(2)　$|z+1|=|z-3i|$

〈2直線のなす角①〉　▶複素数平面上の異なる3点をA(α), B(β), C(γ)とすると，$\angle BAC=\arg\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)$

4　次の3点A(α)，B(β)，C(γ)について，与えられた角の大きさを求めよ。

(1)　$\alpha=-2$，$\beta=1-i$，$\gamma=i$　　$\angle BAC$

(2)　$\alpha=-1+4i$，$\beta=-4$，$\gamma=-2+i$　　$\angle BCA$

〈2直線のなす角②〉　▶A(α), B(β), C(γ)が一直線上$\Leftrightarrow\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$が実数，AB⊥AC$\Leftrightarrow\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$が純虚数

5　複素数平面上の4点A($3i$)，B($-2+i$)，C($a-4i$)，D($3+2i$)について，次の条件を満たすように，aの値を定めよ。

(1)　3点A，B，Cが一直線上　　(2)　AD⊥AC

〈複素数の回転〉　▶点zを原点のまわりに角θだけ回転した点は，$z(\cos\theta+i\sin\theta)$

6　$z=\cos50^\circ+i\sin50^\circ$のとき，次の複素数で表される点を複素数平面上に図示せよ。

(1)　iz　　(2)　z^2　　(3)　$(-1-\sqrt{3}\,i)z$　　(4)　$\dfrac{z}{\sqrt{2}\,(1+i)}$

演　習

例題　**複素数と軌跡**

7　zが原点Oを中心とする半径1の円周上を動くとき，複素数$w=\dfrac{2(z+i)}{z-1}$が表す点wはどのような図形を描くか。

解法のポイント　$z=(w$の式$)$の形に変形し，これと$|z|=1$からzを消去して，wの満たす式を導く。

8　**類題**　点zが原点Oを中心とする半径1の円周上を動くとき，次の複素数wが表す点はどのような図形を描くか。

(1)　$w=z+3$　　(2)　$w=2-iz$　　(3)　$w=\dfrac{iz-1}{z-1}$

9　複素数平面上の3点A$(1+i)$，B$(4i)$，C$(-1+2i)$に対して，次のものを求めよ。

(1)　線分ACを1：3に内分する点　　(2)　△ABCの重心

(3)　∠BACの大きさ　　(4)　△ABCの面積

10　次の等式を満たす点zは，どのような図形を描くか。

(1)　$z+\overline{z}=4$　　(2)　$z\overline{z}-iz+i\overline{z}=0$

(3)　$|z+1|=2|z-2|$　　(4)　$|z-7i|=2|\overline{z}+i|$

11　$z+\dfrac{1}{z}$が実数となるような複素数zは，どのような図形を描くか。

12　複素数zが不等式$|z-3|<3|z+1|$を満たすという。このとき，点zの存在範囲を図示せよ。

13　複素数$z=x+yi$が直線$x=1$上を動くとき，次の複素数wが表す点はどんな図形を描くか。

(1)　$w=\dfrac{1}{z-2}$　　(2)　$w=\dfrac{z+2i}{z-2}$

14　**発展**　複素数zが$|z|\leqq\dfrac{1}{2}$を満たすとき，$1+z$の偏角がとりうる値の範囲を求めよ。

ヒント　$w=1+z$とすると，$|w-1|=|z|$，wが表す点の存在する範囲を考える。

例題　複素数と図形

15 複素数平面上の3点A(z_1)，B(z_2)，C(z_3)に対して，z_1，z_2，z_3の間に等式$z_1+iz_2=(1+i)z_3$が成り立つとき，△ABCはどのような三角形か。

解法のポイント　$\dfrac{z_2-z_3}{z_1-z_3}$の形に変形し，$\arg\left(\dfrac{z_2-z_3}{z_1-z_3}\right)(=\angle ACB)$，$\left|\dfrac{z_2-z_3}{z_1-z_3}\right|\left(=\dfrac{BC}{AC}\right)$の値を求める。

16 類題　複素数平面上の3点A(z_1)，B(z_2)，C(z_3)に対して，z_1，z_2，z_3の間に等式$\dfrac{z_1-z_2}{z_2-z_3}=\dfrac{z_2-z_3}{z_3-z_1}$が成り立つとき，△ABCはどのような三角形か。

17 複素数平面上の3点A($3-i$)，B(3)，C(z)に対して，△ABCが次のような三角形となるような複素数zを求めよ。

(1)　正三角形

(2)　$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle C=\dfrac{\pi}{6}$の直角三角形

18 複素数平面上に4点A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ)がある。四角形ABCDが正方形であるとき，γ，δを表す複素数を，それぞれαとβの式で表せ。

19 複素数z，z^2，z^3の表す点をそれぞれA，B，Cとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　△ABCが正三角形であるとき，zを求めよ。

(2)　$z=ai$(aは0でない実数)とするとき，△ABCは直角三角形であることを示せ。

20 複素数平面上の異なる3点O(0)，A(α)，B(β)が等式$\alpha^2+p\alpha\beta+q\beta^2=0$を満たす。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$p=-1$，$q=1$のとき，△OABはどのような三角形か。

(2)　△OABが$\angle A=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle O=\dfrac{\pi}{4}$である直角二等辺三角形となるとき，実数p，qの値を求めよ。

21 発展　複素数z，wの間に，$w=\dfrac{1}{z}$なる関係があり，zは条件$|z-1|\leqq 1$，$z+\overline{z}\geqq 2$を同時に満たすものとする。

(1)　zの表す点の存在範囲を図示せよ。

(2)　wの表す点の存在範囲を図示せよ。　〈琉球大〉

ヒント　(2)　$z=\dfrac{1}{w}$を2つの条件式に代入してzを消去し，wの満たす式を求める。

第3講座　2次曲線

基本の整理

〈放物線の方程式〉　▶放物線$y^2=4px$の焦点は$(p,\ 0)$，準線は$x=-p$

1　次の放物線について，(1)～(3)は焦点と準線を求め，概形をかけ。(4)，(5)は方程式を求めよ。

(1)　$y^2=8x$　　(2)　$y^2+2x=0$　　(3)　$x^2=6y$

(4)　焦点が$(8,\ 0)$，準線が$x=-8$　　(5)　焦点が$(0,\ 4)$，準線が$y=-4$

〈楕円の方程式〉　▶楕円$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$の焦点は$(\pm\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$，長軸$2a$，短軸$2b$

2　次の楕円について，(1)～(3)は焦点，長軸と短軸の長さを求め，概形をかけ。(4)，(5)は方程式を求めよ。

(1)　$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$　　(2)　$4x^2+3y^2=36$　　(3)　$x^2+9y^2=1$

(4)　焦点が$(0,\ \sqrt{2})$，$(0,\ -\sqrt{2})$で，長軸の長さが4

(5)　頂点が$(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$で，点$\left(2\sqrt{3},\ \dfrac{3}{2}\right)$を通る

〈双曲線の方程式〉　▶双曲線$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$の焦点は$(\pm\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$，漸近線は$y=\pm\dfrac{b}{a}x$

3　次の双曲線について，(1)～(3)は焦点と漸近線を求め，概形をかけ。(4)，(5)は方程式を求めよ。

(1)　$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$　　(2)　$9x^2-4y^2=36$　　(3)　$6x^2-3y^2=-18$

(4)　焦点が$(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$，漸近線が$y=\pm2x$

(5)　漸近線が$y=\pm3x$で，点$(1,\ 3\sqrt{2})$を通る

〈平行移動〉　▶曲線$F(x,\ y)=0$をx軸方向にp，y軸方向にqだけ平行移動$\Rightarrow F(x-p,\ y-q)=0$

4　次の方程式はどのような図形を表すか。また，その焦点を求めよ。

(1)　$(y-1)^2=12(x-3)$　　(2)　$\dfrac{(x-2)^2}{4}-\dfrac{(y+1)^2}{5}=1$

(3)　$4(x-4)^2+9(y+3)^2=36$　　(4)　$(x-1)^2-3(y+2)^2=-12$

〈接線の方程式〉　▶曲線上の点$(x_1,\ y_1)$における接線は，放物線$y^2=4px\Rightarrow y_1y=2p(x+x_1)$

楕円$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$，双曲線$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

5　次の曲線上の与えられた点における接線の方程式を求めよ。

(1)　$y^2=4x$，$(1,\ 2)$　　(2)　$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$，$\left(4,\ \dfrac{12}{5}\right)$　　(3)　$4x^2-3y^2=1$，$(1,\ -1)$

演　習

例題　2次曲線の性質

6　次の条件を満たす点の軌跡を求めよ。

(1)　2点(1, 0), (−1, 0)からの距離の和が$2\sqrt{3}$である点

(2)　2点(4, 1), (−6, 1)からの距離の差が6である点

(3)　点(−2, 2)と直線$y=4$から等距離にある点

解法のポイント　(1)　2定点までの距離の和が一定⇒楕円　(2)　2定点までの距離の差が一定⇒双曲線　(3)　定点と直線からの距離が一定⇒放物線

7　頻題　次の条件を満たす点の軌跡を求めよ。

(1)　点(−3, 0)と直線$x=3$から等距離にある点

(2)　2点(4, 2), (−2, 2)からの距離の和が10である点

(3)　2点(−1, 3), (5, 3)からの距離の差が4である点

8　次の曲線をx軸方向に2，y軸方向に−3だけ平行移動した曲線の方程式を求めよ。また，(1)はその焦点と準線，(2)，(3)はその焦点を求めよ。

(1)　$4x+3y^2=0$　　(2)　$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$　　(3)　$x^2-\dfrac{y^2}{2}=-1$

9　次の方程式はどのような図形を表すか。また，その焦点を求め，概形をかけ。

(1)　$y^2=4x+8$　　(2)　$x^2-2x-y+2=0$

(3)　$25x^2+9y^2+150x-18y+9=0$　　(4)　$9x^2-4y^2-18x-16y+29=0$

10　次の条件を満たす放物線の方程式を求めよ。

(1)　頂点が(0, 0)でx軸を軸とし，点(8, 4)を通る放物線

(2)　放物線$y^2=4x$と焦点を共有し，頂点が(−1, 0)である放物線

(3)　焦点が(2, 4)で，準線が$y=1$である放物線

(4)　軸が$y=1$，準線が$x=-\dfrac{5}{4}$で，原点を通る放物線

11　発展　tは正の実数とする。点T$(t, 0)$と，双曲線$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$上の動点Pの距離の最小値を求めよ。

ヒント　双曲線上の点をP(x, y)とし，点T$(t, 0)$との距離の2乗の最小値を考える。

例題　曲線外の点から引いた接線

12　点$(-1,\ 1)$から放物線$y^2=8x$に引いた接線の方程式を求めよ。

解法のポイント　接点を$(x_1,\ y_1)$とすると，接線は$y_1y=4(x+x_1)$　これが$(-1,\ 1)$を通ることから考える。

13　類題　次の問いに答えよ。

(1)　点$(3,\ 2)$から双曲線$\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$に引いた接線の方程式を求めよ。

(2)　点$(-2,\ 0)$から楕円$2x^2+3y^2=6$に引いた接線の方程式を求めよ。

14　次の条件を満たす楕円の方程式を求めよ。

(1)　焦点が$(\sqrt{3},\ 0)$，$(-\sqrt{3},\ 0)$で，点$(2,\ 1)$通る楕円

(2)　楕円$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$と焦点を共有し，点$(2\sqrt{5},\ 2)$を通る楕円

(3)　焦点が$(2,\ 1)$，$(0,\ 1)$で，短軸の長さが2である楕円

15　次の条件を満たす双曲線の方程式を求めよ。

(1)　中心が原点で，焦点の1つが$(0,\ 3\sqrt{2})$である直角双曲線

(2)　焦点が$(7,\ -2)$，$(-1,\ -2)$で，2つの頂点間の距離が4である双曲線

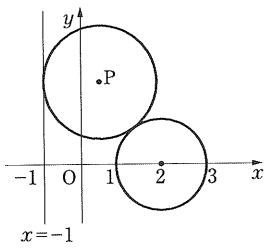
(3)　2直線$y=x+1$，$y=-x-1$を漸近線とし，焦点の1つが$(2,\ 0)$である双曲線

16　次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}<1$　　(2)　$9x^2-4y^2>-36$

(3)　$(y-1)^2\leqq 4(x+1)$　　(4)　$x^2-4(y+1)^2\geqq 4$

17　右の図のように，直線$x=-1$に接し，円$(x-2)^2+y^2=1$に外接する円の中心Pの軌跡を求めよ。



18　発展　楕円$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{49}=1$上の点$P(s,\ t)$における接線と$x$軸と$y$軸とでできる三角形の面積の最小値を求めよ。　〈大阪府立大〉

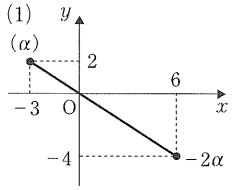
ヒント　相加平均≧相乗平均を利用して最小値を求める。

解 答 《S高3数学Ⅲ》

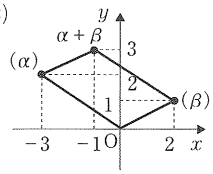
第1講座　複素数平面

【p.2】

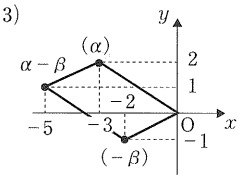
1 (1)



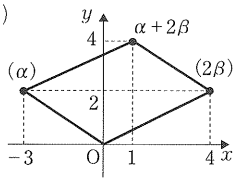
(2)



(3)



(4)



2 (1) 2　(2) 1　(3) 5　(4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3 (1) $1-\sqrt{2}\,i$　(2) i

(3) $\overline{(3-2i)(1+i)}=\overline{(3-2i)}\,\overline{(1+i)}$

$=(3+2i)(1-i)=5-i$

(4) $\overline{\left(\frac{2-i}{2+i}\right)}=\frac{\overline{2-i}}{\overline{2+i}}=\frac{2+i}{2-i}=\frac{(2+i)^2}{(2-i)(2+i)}$

$=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$

4 (1) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

(2) $3(\cos\pi+i\sin\pi)$

(3) $4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

(4) $\frac{1-i}{2i}=\frac{(1-i)i}{2i^2}=-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$

よって，$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$

5 (1) $|z_1|=2$，$\arg z_1=-\frac{\pi}{3}$

$|z_2|=\sqrt{2}$，$\arg z_2=\frac{3}{4}\pi$ より，

$|z_1z_2|=2\sqrt{2}$，$\arg z_1z_2=\frac{5}{12}\pi$

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\sqrt{2}$，$\arg\frac{z_1}{z_2}=\frac{11}{12}\pi$

(2) $|z_1|=1$，$\arg z_1=\frac{\pi}{6}$

$|z_2|=2$，$\arg z_2=\frac{2}{3}\pi$ より，

$|z_1z_2|=2$，$\arg z_1z_2=\frac{5}{6}\pi$

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{1}{2}$，$\arg\frac{z_1}{z_2}=\frac{3}{2}\pi$

6 (1) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$　(2) i

(3) $(-1+i)^4=\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)\right\}^4$

$=4(\cos3\pi+i\sin3\pi)=-4$

(4) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^{-12}=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}^{-12}$

$=\cos2\pi+i\sin2\pi=1$

【p.3】

7 $|z|=1$ より，$|z|^2=z\overline{z}=1$ であるから，

$|w|^2=w\overline{w}=\frac{2-z}{1-2z}\cdot\overline{\left(\frac{2-z}{1-2z}\right)}$

$=\frac{2-z}{1-2z}\cdot\frac{2-\overline{z}}{1-2\overline{z}}=\frac{4-2(z+\overline{z})+z\overline{z}}{1-2(z+\overline{z})+4z\overline{z}}$

$=\frac{5-2(z+\overline{z})}{5-2(z+\overline{z})}=1$

よって，$|w|=1$

8 $|z_1|=1$ より，$z_1\overline{z_1}=1$ であるから，

$\left|\frac{z_1-z_2}{1-\overline{z_2}z_1}\right|^2=\frac{z_1-z_2}{1-\overline{z_2}z_1}\cdot\overline{\frac{z_1-z_2}{1-\overline{z_2}z_1}}$

$=\frac{z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}}{1-z_2\overline{z_1}-\overline{z_2}z_1+z_1\overline{z_1}\cdot z_2\overline{z_2}}$

$=\frac{1-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}}{1-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}}=1$

よって，$\left|\frac{z_1-z_2}{1-\overline{z_2}z_1}\right|=1$

9 (1) $z_3=kz_1$（kは実数）とおける。

$-2+ai=k(3-2i)$ より，

$-2=3k$……①　$a=-2k$……②

①，②より，$k=-\frac{2}{3}$，$a=\frac{4}{3}$

(2) $z_3-z_1=k(z_2-z_1)$（kは実数）とおける。

$(-2+ai)-(3-2i)=k\{(-3+4i)-(3-2i)\}$

$-5+(a+2)i=-6k+6ki$ より，

$-5=-6k$……①　$a+2=6k$……②

①，②より，$k=\frac{5}{6}$　$a=3$

10 (1) 左辺$=(\alpha+\beta)\overline{(\alpha+\beta)}+(\alpha-\beta)\overline{(\alpha-\beta)}$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})+(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$

$=\alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}+\alpha\overline{\alpha}-\alpha\overline{\beta}-\beta\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}$

$=2\alpha\overline{\alpha}+2\beta\overline{\beta}=2(|\alpha|^2+|\beta|^2)=$右辺

(2) $|\alpha|=1$ より，$\alpha\overline{\alpha}=1$ であるから，

$|\alpha+\beta|^2=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$

$=\alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}$

$=1+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}$

$|1+\overline{\alpha}\beta|^2=(1+\overline{\alpha}\beta)(1+\alpha\overline{\beta})$

$=1+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\alpha}\beta\overline{\beta}$