

■ 数学Ⅱ

●ねらいと特色

本書は、高校の重要科目である数学Ⅱの内容を、基本的な事柄を中心に、じっくり時間をかけて理解することを目標として編集されています。

数学Ⅱは高校数学の土台となる重要な科目であり、その内容をおろそかにしたままでは、あとで学習する上級の科目の理解はおぼつかなくなります。ですから、数学Ⅱの基礎を確実に固めておくことはとても大切なのです。そのためには、基本となる事柄をしっかり把握したうえで、個々の問題の考え方、定理・公式の使い方に慣れることが何よりも大切です。

本書では、各単元の重要な学習項目、新しい学習項目、定理・公式・計算方法などを各項目ごとに例を用いてわかりやすく示したり、例題の考え方や解答を示したりすることで修得が速やかになるように工夫しました。また、理解を確かなものにするために、例や例題のあとでは精選された類題を生徒自身が解くようにしてあります。

さらに、いくつかの関連する項目をまとめて繰り返し問題を解くことで復習が絶えず可能となり、理解が定着できるようにしてあります。

本書を最大限に活用することで、数学Ⅱの基礎力を大いに養ってください。

●構成と使い方

例・**例題**…**例**は、重要な学習項目、新しい学習項目、重要な定理・公式・計算方法などを確実に修得するために設けてあります。

また、**例題**は、新しく学習する項目の基本的かつ最重要な問題です。じっくり時間をかけて読み、理解することが大切です。

類題…**例**や**例題**で学習した考え方、解き方を時間をおかずに自分自身の力で解くことで、理解を確かなものにします。

問題A・B…いくつかの関連する項目をまとめて反復練習します。A問題は類題と同一レベル、B問題はやや発展した問題を収録してあります。

章末問題…各章のまとめの問題です。基本問題・発展問題の2段階構成で、やや程度の高い問題も含まれています。各章の学習の仕上げとしてアタックしてください。

もくじ

第1章 式と証明

1 3次式の展開と因数分解	4	5 恒等式	15
2 整式の除法	6	6 等式の証明	17
3 分数式の計算	8	7 不等式の証明	19
4 二項定理	11	問題A・B	22
問題A・B	13	章末問題	24

第2章 複素数と方程式

8 複素数と方程式の解	26	問題A・B	38
9 高次方程式	33	章末問題	40

第3章 図形と方程式

10 点と座標	42	13 軌跡と領域	59
11 直線の方程式	46	問題A・B	64
問題A・B	50	章末問題	66
12 円の方程式	52		

第4章 三角関数

14 三角関数	68	17 加法定理の応用	83
15 三角関数の性質	73	問題A・B	89
問題A・B	79	章末問題	91
16 加法定理	81		

第5章 指数関数と対数関数

18 指数の拡張	94	21 対数関数	103
19 指数関数	96	22 常用対数	106
問題A・B	99	問題A・B	108
20 対数とその性質	101	章末問題	110

第6章 微分と積分

23 微分係数と導関数	112	26 定積分	130
問題A・B	118	27 面積	133
24 関数の極大・極小	120	問題A・B	136
問題A・B	126	章末問題	138
25 不定積分	128		

重要事項 ————— 140

常用対数の表 ————— 143

1

3次式の展開と因数分解

① 公式による展開①

● 展開の公式 1

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \quad (3 \text{ 乗の和になる})$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3 \quad (3 \text{ 乗の差になる})$$

- 例 (1) $(x+2)(x^2-2x+4)=(x+2)(x^2-x \cdot 2+2^2)$
 $=x^3+2^3=x^3+8$
- (2) $(2x+1)(4x^2-2x+1)=(2x+1)\{(2x)^2-(2x) \cdot 1+1^2\}$
 $= (2x)^3+1^3=8x^3+1$
- (3) $(2x-3)(4x^2+6x+9)=(2x-3)\{(2x)^2+2x \cdot 3+3^2\}$
 $= (2x)^3-3^3=8x^3-27$
- (4) $(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)=(2x+y)\{(2x)^2-2x \cdot y+y^2\}$
 $= (2x)^3+y^3=8x^3+y^3$

■ 次の式を展開せよ。

- (1) $(x+1)(x^2-x+1)$ (2) $(3x-2)(9x^2+6x+4)$
 (3) $(4x-3y)(16x^2+12xy+9y^2)$

② 公式による展開②

● 展開の公式 2

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \quad (\text{和の3乗})$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \quad (\text{差の3乗})$$

- 例 (1) $(2x+1)^3=(2x)^3+3 \cdot (2x)^2 \cdot 1+3 \cdot (2x) \cdot 1^2+1^3$
 $=8x^3+12x^2+6x+1$
- (2) $(3x-2)^3=(3x)^3-3 \cdot (3x)^2 \cdot 2+3 \cdot (3x) \cdot 2^2-2^3$
 $=27x^3-54x^2+36x-8$
- (3) $(x-2y)^3=x^3-3 \cdot x^2 \cdot 2y+3 \cdot x \cdot (2y)^2-(2y)^3$
 $=x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$

■ 次の式を展開せよ。

- (1) $(x+3)^3$ (2) $(2x-4)^3$
 (3) $(3x+y)^3$ (4) $(3x-2y)^3$
 (5) $(2x+5y)^3$ (6) $(2xy-1)^3$

3 3次式の因数分解

● 3次式の因数分解の公式

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

例 (1) $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - x \cdot 2 + 2^2)$
 $= (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

(2) $27x^3 - 1 = (3x)^3 - 1^3 = (3x - 1)\{(3x)^2 + 3x \cdot 1 + 1^2\}$
 $= (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1)$

3 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^3 + 1$

(2) $x^3 + 8$

(3) $x^3 - 27y^3$

(4) $8x^3 + 27$

(5) $27a^3 - 125$

(6) $64a^3 - \frac{1}{8}b^3$

4 いろいろな因数分解

例題 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^6 - 64$

(2) $a^6 + 26a^3 - 27$

考え方 (1) $(x^3)^2 - 8^2$ と考える。 (2) $(a^3)^2 + 26a^3 - 27$ と考える。

解答 (1) $x^6 - 64 = (x^3 + 8)(x^3 - 8)$
 $= (x + 2)(x^2 - 2x + 4)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$
 $= (x + 2)(x - 2)(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 4)$ 答

(2) $a^6 + 26a^3 - 27 = (a^3 - 1)(a^3 + 27)$
 $= (a - 1)(a^2 + a + 1)(a + 3)(a^2 - 3a + 9)$
 $= (a - 1)(a + 3)(a^2 + a + 1)(a^2 - 3a + 9)$ 答

別解 (1) $(x^2)^3 - 4^3$ と考えると,
 $x^6 - 64 = (x^2)^3 - 4^3 = (x^2 - 4)(x^4 + 4x^2 + 16)$
 $= (x^2 - 4)\{(x^2 + 4)^2 - 4x^2\}$
 $= (x + 2)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x^2 - 2x + 4)$ 答

4 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^6 + y^6$

(2) $x^6 - y^6$

(3) $64a^6 - b^6$

(4) $(a + b)^3 - 1$

(5) $x^6 - 9x^3 + 8$

(6) $8a^6 + 7a^3 - 1$

第1章 式と証明

p.4~5

① 3次式の展開と因数分解

- 1 (1) $(x+1)(x^2-x+1) = (x+1)(x^2-x+1)$
 $= x^3+1^3 = x^3+1$
- (2) $(3x-2)(9x^2+6x+4)$
 $= (3x-2)\{(3x)^2+(3x)\cdot 2+2^2\}$
 $= (3x)^3-2^3 = 27x^3-8$
- (3) $(4x-3y)(16x^2+12xy+9y^2)$
 $= (4x-3y)\{(4x)^2+4x\cdot 3y+(3y)^2\}$
 $= (4x)^3-(3y)^3 = 64x^3-27y^3$
- 2 (1) $(x+3)^3 = x^3+3\cdot x^2\cdot 3+3\cdot x\cdot 3^2+3^3$
 $= x^3+9x^2+27x+27$
- (2) $(2x-4)^3 = (2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot 4+3\cdot 2x\cdot 4^2-4^3$
 $= 8x^3-48x^2+96x-64$
 [別解] $(2x-4)^3 = \{2(x-2)\}^3 = 2^3(x-2)^3$
 $= 8(x^3-6x^2+12x-8)$
 $= 8x^3-48x^2+96x-64$
- (3) $(3x+y)^3 = (3x)^3+3\cdot(3x)^2\cdot y+3\cdot 3x\cdot y^2+y^3$
 $= 27x^3+27x^2y+9xy^2+y^3$
- (4) $(3x-2y)^3$
 $= (3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot 2y+3\cdot 3x\cdot(2y)^2-(2y)^3$
 $= 27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$
- (5) $(2x+5y)^3$
 $= (2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot 5y+3\cdot 2x\cdot(5y)^2+(5y)^3$
 $= 8x^3+60x^2y+150xy^2+125y^3$
- (6) $(2xy-1)^3$
 $= (2xy)^3-3\cdot(2xy)^2\cdot 1+3\cdot 2xy\cdot 1^2-1^3$
 $= 8x^3y^3-12x^2y^2+6xy-1$
- 3 (1) $x^3+1 = x^3+1^3 = (x+1)(x^2-x+1)$
 $= (x+1)(x^2-x+1)$
- (2) $x^3+8 = x^3+2^3 = (x+2)(x^2-x+2)$
 $= (x+2)(x^2-2x+4)$
- (3) $x^3-27y^3 = x^3-(3y)^3$
 $= (x-3y)\{x^2+x\cdot 3y+(3y)^2\}$
 $= (x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$
- (4) $8x^3+27 = (2x)^3+3^3$
 $= (2x+3)\{(2x)^2-2x\cdot 3+3^2\}$
 $= (2x+3)(4x^2-6x+9)$
- (5) $27a^3-125 = (3a)^3-5^3$
 $= (3a-5)\{(3a)^2+3a\cdot 5+5^2\}$
 $= (3a-5)(9a^2+15a+25)$
- (6) $64a^3-\frac{1}{8}b^3 = (4a)^3-\left(\frac{1}{2}b\right)^3$
 $= \left(4a-\frac{1}{2}b\right)\left\{(4a)^2+4a\cdot\frac{1}{2}b+\left(\frac{1}{2}b\right)^2\right\}$

$$= \left(4a-\frac{1}{2}b\right)\left(16a^2+2ab+\frac{1}{4}b^2\right)$$

- 4 (1) $x^6+y^6 = (x^2)^3+(y^2)^3$
 $= (x^2+y^2)\{(x^2)^2-x^2y^2+(y^2)^2\}$
 $= (x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$
- (2) $x^6-y^6 = (x^3)^2-(y^3)^2$
 $= (x^3+y^3)(x^3-y^3)$
 $= (x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$
 $= (x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$
- (3) $64a^6-b^6 = (8a^2)^3-(b^2)^3$
 $= (8a^2+b^2)(8a^2-b^2)$
 $= \{(2a)^3+b^3\}\{(2a)^3-b^3\}$
 $= (2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$
 $\times (2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$
 $= (2a+b)(2a-b)$
 $\times (4a^2+2ab+b^2)(4a^2-2ab+b^2)$
- (4) $(a+b)^3-1$
 $= \{(a+b)-1\}\{(a+b)^2+(a+b)\cdot 1+1\}$
 $= (a+b-1)(a^2+2ab+b^2+a+b+1)$
- (5) x^6-9x^3+8
 $= (x^3)^2-9x^3+8$
 $= (x^3-1)(x^3-8)$
 $= (x-1)(x^2+x+1)(x-2)(x^2+2x+4)$
 $= (x-1)(x-2)(x^2+x+1)(x^2+2x+4)$
- (6) $8a^6+7a^3-1$
 $= 8(a^3)^2+7a^3-1$
 $= (a^3+1)(8a^3-1)$
 $= (a+1)(a^2-a+1)(2a-1)(4a^2+2a+1)$
 $= (a+1)(2a-1)(a^2-a+1)(4a^2+2a+1)$

p.6~7

② 整式の除法

1 (1)
$$\begin{array}{r} x+6 \\ x-2 \overline{) x^2+4x-3} \\ \underline{x^2-2x} \\ 6x-3 \\ \underline{6x-12} \\ 9 \end{array}$$

商 $x+6$, 余り 9

(2)
$$\begin{array}{r} 2a^2+2a-3 \\ 2a+3 \overline{) 4a^3+10a^2-9} \\ \underline{4a^3+6a^2} \\ 4a^2 \\ \underline{4a^2+6a} \\ -6a-9 \\ \underline{-6a-9} \\ 0 \end{array}$$

商 $2a^2+2a-3$, 余り 0