数学B

●ねらいと特色

本書は，高校の重要科目である数学Bの内容を，基本的な事柄を中心に，じっくり時間をかけて理解することを目標として編集されています。

数学Bは高校数学の土台となる重要な科目であり，その内容をおろそかにしたままでは，あとで学習する上級の科目の理解はおぼつかなくなります。ですから，数学Bの基礎を確実に固めておくことはとても大切なのです。そのためには，基本となる事柄をしっかり把握したうえで，個々の問題の考え方，定理・公式の使い方に慣れることが何よりも大切です。

本書では，各単元の重要な学習項目，新しい学習項目，定理・公式・計算方法などを各項目ごとに例を用いてわかりやすく示したり，例題の考え方や解答を示したりすることで修得が速やかになるように工夫しました。また，理解を確かなものにするために，例や例題のあとでは精選された類題を生徒自身が解くようにしてあります。

さらに，いくつかの関連する項目をまとめて繰り返し問題を解くことで復習が絶えず可能となり，理解が定着できるようにしてあります。

本書を最大限に活用することで，数学Bの基礎力を大いに養ってください。

●構成と使い方

例・**例 題**…**例**は，重要な学習項目，新しい学習項目，重要な定理・公式・計算方法などを確実に修得するために設けてあります。また，**例 題**は，新しく学習する項目の基本的かつ最重要な問題です。じっくり時間をかけて読み，理解することが大切です。

類 題…**例**や**例 題**で学習した考え方，解き方を時間をおかずに自分自身の力で解くことで，理解を確かなものにします。

問題A・B…いくつかの関連する項目をまとめて反復練習します。A問題は類題と同一レベル，B問題はやや発展した問題を収録してあります。

章末問題…各章のまとめの問題です。基本問題・発展問題の2段階構成で，やや程度の高い問題も含まれています。各章の学習の仕上げとしてアタックしてください。

もくじ

第１章　平面上のベクトル

第２章　空間のベクトル

第３章　数列

第４章　確率分布と統計的な推測

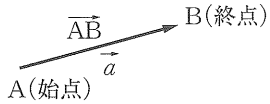
第1章 平面上のベクトル

1 ベクトルとその演算

1 ベクトルの相等

❶ **有向線分**について，その位置を問題にしないで，**向きと大きさ**だけに着目したものを**ベクトル**という。

❷ 有向線分ABで表されるベクトルを$\overrightarrow{\mathbf{AB}}$，$\vec{\boldsymbol{a}}$などと表す。
ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$で，Aを**始点**，Bを**終点**という。

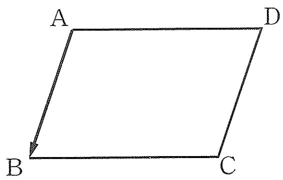


❸ ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{a}$の大きさを，それぞれ$|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|$，$|\vec{\boldsymbol{a}}|$で表す。

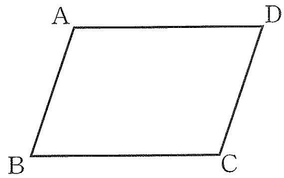
❹ 向きが同じで，大きさが等しいベクトルは**等しい**。
ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$が等しいとき，$\vec{\boldsymbol{a}}=\vec{\boldsymbol{b}}$と書く。

❺ $\vec{a}$と大きさが等しく，向きが反対のベクトルを$\vec{a}$の**逆ベクトル**といい，$-\vec{\boldsymbol{a}}$で表す。

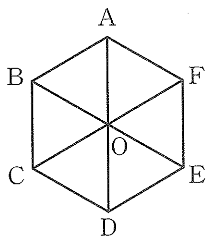
例 右の図の平行四辺形において，等しいベクトル，逆ベクトルをそれぞれ求めてみよう。
たとえば，
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と等しいベクトルは，　$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$の逆ベクトルは，　　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$，　$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$



1 右の図の平行四辺形ABCDについて，次のようなベクトルをすべて求めよ。
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$と等しいベクトル
(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$の逆ベクトル

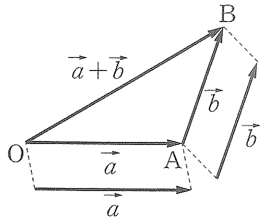


2 右の図の正六角形ABCDEFについて，次のようなベクトルをすべて求めよ。
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と等しいベクトル
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$の逆ベクトル
(3) $\overrightarrow{\mathrm{CF}}$と大きさが等しいベクトル
(4) $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$と同じ向きのベクトル



② ベクトルの加法

❶ 2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ があり，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる点O，A，Bを定めるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**和**といい，$\vec{a}+\vec{b}$ で表す。

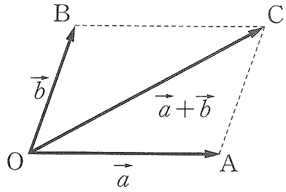


すなわち，次のことが成り立つ。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

補足 2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ があるとき，始点をそろえて，平行四辺形をつくり，$\vec{a}+\vec{b}$ を表すこともできる。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ （OCは平行四辺形の対角線）



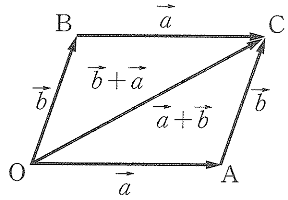
❷ ベクトルの加法では，交換法則，結合法則が成り立つ。

交換法則 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

結合法則 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

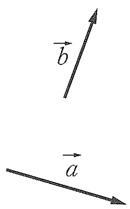
❸ 大きさが0で，向きを考えないベクトルを**零ベクトル**といい，$\vec{0}$ で表す。

$$\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\vec{0},\quad \vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0},\quad \vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$$

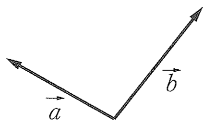


3 $\vec{a}$, $\vec{b}$ が次のように表されているとき，$\vec{a}+\vec{b}$ を図示せよ。

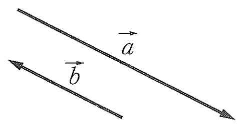
(1)



(2)

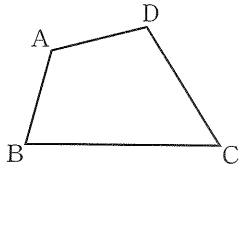


(3)



4 四角形ABCDについて，次の等式が成り立つことを示せ。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\vec{0}$



③ ベクトルの減法

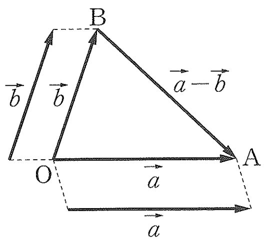
❶　2つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$があり，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$となる点O，A，Bを定めるとき，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$を$\vec{a}$から$\vec{b}$を引いた**差**といい，$\boldsymbol{\vec{a}-\vec{b}}$で表す。

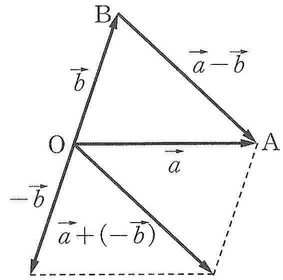
一般に，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$であるから，次のことが成り立つ。

$$\overrightarrow{\mathbf{OA}}-\overrightarrow{\mathbf{OB}}=\overrightarrow{\mathbf{BA}}$$

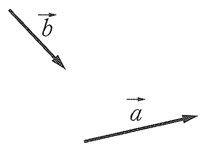
❷　ベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$の和と差について，次の等式が成り立つ。

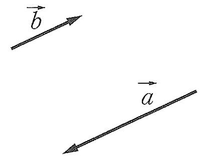
$$\boldsymbol{\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})}$$

❶


❷


5　$\vec{a}$, $\vec{b}$が次のように表されているとき，$\vec{a}-\vec{b}$を図示せよ。

(1)


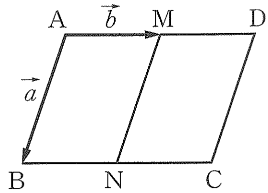
(2)


6　次の等式が成り立つことを示せ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{0}$

7　右の図の平行四辺形ABCDにおいて，点M，Nはそれぞれ辺AD，BCの中点である。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\vec{b}$とするとき，次のベクトルを$\vec{a}$, $\vec{b}$を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BM}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CM}}$



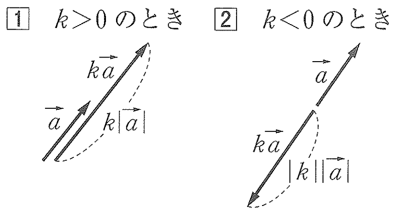
4 ベクトルの実数倍

❶ ベクトル $\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき，実数 k に対して，$k\vec{a}$（$\vec{a}$ の k 倍）を次のように定める。

[1] $k>0$ のとき，$\vec{a}$ と同じ向きで，大きさが $|\vec{a}|$ の k 倍のベクトル

[2] $k<0$ のとき，$\vec{a}$ と反対向きで，大きさが $|\vec{a}|$ の $|k|$ 倍のベクトル

[3] $k=0$ のとき，$\vec{0}$　$(0\vec{a}=\vec{0})$



❷ ベクトル $\vec{a}=\vec{0}$ のとき，任意の実数 k に対して，$k\vec{a}=k\vec{0}=\vec{0}$

❸ 実数倍についての基本性質　実数 k，l に対して，

$$\boldsymbol{k(l\vec{a})=kl\vec{a},\quad (k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a},\quad k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}}$$

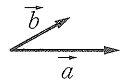
注　ベクトルの加法，減法，実数倍の計算は，整式の計算と同様に行うことができる。

例　$2(\vec{a}+3\vec{b})-(3\vec{a}-2\vec{b})=2\vec{a}+6\vec{b}-3\vec{a}+2\vec{b}=-\vec{a}+8\vec{b}$

8　右の図の $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，次のベクトルを図示せよ。

(1)　$2\vec{a}$　　　(2)　$-3\vec{b}$

(3)　$2\vec{a}+\vec{b}$　　　(4)　$\vec{a}-3\vec{b}$



9　次の計算をせよ。

(1)　$(2\vec{a}-\vec{b})+(3\vec{a}+2\vec{b})$　　　(2)　$3(\vec{a}-2\vec{b})-2(-\vec{a}+4\vec{b})$

5 ベクトルの平行

❶ $\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の向きが同じであるか，または反対であるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**平行**であるといい，$\boldsymbol{\vec{a}/\!/\vec{b}}$ と書く。

❷ $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，$\boldsymbol{\vec{a}/\!/\vec{b}}$ $\iff$ **$\boldsymbol{\vec{b}=k\vec{a}}$ となる実数 $\boldsymbol{k}$ が存在する。**

例　ベクトルを利用して，中点連結定理を証明してみよう。

△ABCの辺AB，ACの中点をそれぞれM，Nとすると，

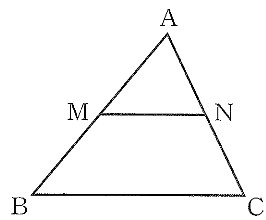
$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

よって，$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

したがって，MN//BC，$\mathrm{MN}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}$



10　四角形ABCDの対角線の交点をOとする。$2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$ が成り立つとき，$\overrightarrow{AD}/\!/\overrightarrow{BC}$ であることを示せ。

6 単位ベクトル

●大きさが1であるベクトルを**単位ベクトル**という。

$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルは，　$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ と $-\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

11　次の問いに答えよ。

(1)　$|\vec{a}|=5$ のとき，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルを，$\vec{a}$ を用いて表せ。

(2)　$\vec{e}$ を単位ベクトルとするとき，$\vec{e}$ と向きが同じで，大きさが2であるベクトルを $\vec{e}$ を用いて表せ。

7 ベクトルの分解

● $\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が平行でないとき，任意のベクトル $\vec{p}$ は実数 s，t を用いて，$\boldsymbol{\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}}$ の形に，ただ1通りに表される。

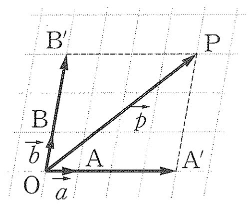
例　右の図において，$\vec{p}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表してみよう。

点Pを通り，直線OB，OAに平行な直線と，直線OA，OBの交点をそれぞれA′，B′とすると，

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}$

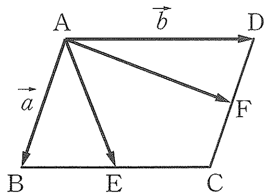
$\overrightarrow{OA'}=4\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=3\overrightarrow{OB}$ であるから，

$\overrightarrow{OP}=4\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$　　すなわち，　$\vec{p}=4\vec{a}+3\vec{b}$



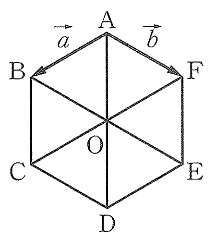
12　平行四辺形ABCDの辺BC，CDの中点をそれぞれE，Fとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{AE}$　　　　(2)　$\overrightarrow{AF}$



13　正六角形ABCDEFにおいて，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{BF}$　　　　(2)　$\overrightarrow{AD}$　　　　(3)　$\overrightarrow{AE}$



高校ゼミ・スタンダード

数学B

解答編

CKT

第1章　平面上のベクトル

p.4～8　① ベクトルとその演算

1 (1) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

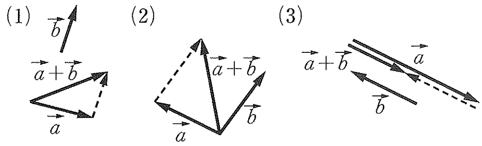
2 (1) $\overrightarrow{\mathrm{ED}}$, $\overrightarrow{\mathrm{FO}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DO}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{EB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{FC}}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CO}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CF}}$

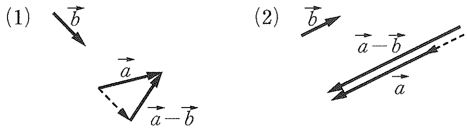
3



4 左辺$=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{0}=$右辺

5



6 (1) 左辺$=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}}=-\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{CB}}-\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}=$右辺

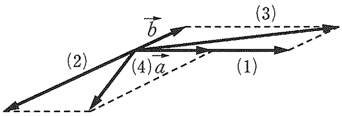
(2) 左辺$=\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{0}$

$=$右辺

7 (1) $\overrightarrow{\mathbf{BM}}=\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boldsymbol{\vec{b}-\vec{a}}$

(2) $\overrightarrow{\mathbf{CM}}=\overrightarrow{\mathrm{NA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\boldsymbol{-\vec{a}-\vec{b}}$

8



9 (1) $(2\vec{a}-\vec{b})+(3\vec{a}+2\vec{b})$

$=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{a}+2\vec{b}=\boldsymbol{5\vec{a}+\vec{b}}$

(2) $3(\vec{a}-2\vec{b})-2(-\vec{a}+4\vec{b})$

$=3\vec{a}-6\vec{b}+2\vec{a}-8\vec{b}=\boldsymbol{5\vec{a}-14\vec{b}}$

10 $2\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=2\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ より,

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=2\overrightarrow{\mathrm{OC}}-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

よって, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=2\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ から, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

11 (1) $\dfrac{1}{5}\vec{a}$, $-\dfrac{1}{5}\vec{a}$　(2) $2\vec{e}$

12 (1) $\overrightarrow{\mathbf{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\boldsymbol{\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}}$

(2) $\overrightarrow{\mathbf{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\boldsymbol{\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{a}}$

13 (1) $\overrightarrow{\mathbf{BF}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boldsymbol{\vec{b}-\vec{a}}$

(2) $\overrightarrow{\mathbf{AD}}=2\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\boldsymbol{2(\vec{a}+\vec{b})}$

(3) $\overrightarrow{\mathbf{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}}=2(\vec{a}+\vec{b})-\vec{a}=\boldsymbol{\vec{a}+2\vec{b}}$

p.9～11　② ベクトルの成分

1 $\boldsymbol{\vec{a}=(3,\ 1)}$

$|\vec{a}|=\sqrt{3^2+1^2}=\boldsymbol{\sqrt{10}}$

$\boldsymbol{\vec{b}=(-3,\ 3)}$

$|\vec{b}|=\sqrt{(-3)^2+3^2}=\sqrt{18}=\boldsymbol{3\sqrt{2}}$

2 (1) $\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}}=(-2,\ 1)+(2,\ -3)$

$=(-2+2,\ 1-3)=\boldsymbol{(0,\ -2)}$

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{0^2+(-2)^2}=\boldsymbol{2}$

(2) $\boldsymbol{3\vec{a}-\vec{b}}=3(-2,\ 1)-(2,\ -3)$

$=(-6,\ 3)-(2,\ -3)$

$=(-6-2,\ 3-(-3))=\boldsymbol{(-8,\ 6)}$

$|3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(-8)^2+6^2}=\boldsymbol{10}$

(3) $\boldsymbol{-4\vec{a}-3\vec{b}}=-4(-2,\ 1)-3(2,\ -3)$

$=(8,\ -4)-(6,\ -9)$

$=(8-6,\ -4-(-9))=\boldsymbol{(2,\ 5)}$

$|-4\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{2^2+5^2}=\boldsymbol{\sqrt{29}}$

3 (1) $2\vec{x}-\vec{a}=\vec{b}$ より,

$2\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}=(1+5,\ -4+2)=(6,\ -2)$

よって, $\boldsymbol{\vec{x}=(3,\ -1)}$

(2) $3\vec{a}-\vec{x}=2\vec{x}+6\vec{b}$ より, $3\vec{x}=3\vec{a}-6\vec{b}$

よって, $\vec{x}=\vec{a}-2\vec{b}=(1,\ -4)-2(5,\ 2)$

$=(1-10,\ -4-4)=\boldsymbol{(-9,\ -8)}$

4 (1) $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと,

$(1,\ -4)=s(3,\ 2)+t(4,\ 5)$

$=(3s+4t,\ 2s+5t)$

よって, $\begin{cases}3s+4t=1\\2s+5t=-4\end{cases}$

ゆえに, $s=3$, $t=-2$ より, $\boldsymbol{\vec{p}=3\vec{a}-2\vec{b}}$

(2) $\vec{q}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと,

$(-3,\ 5)=(3s+4t,\ 2s+5t)$

よって, $\begin{cases}3s+4t=-3\\2s+5t=5\end{cases}$

ゆえに, $s=-5$, $t=3$ より, $\boldsymbol{\vec{q}=-5\vec{a}+3\vec{b}}$

5 (1) $\vec{a}/\!/\vec{b}$ より, $\vec{b}=k\vec{a}$ とおける。

$(-1,\ x)=k(3,\ 6)=(3k,\ 6k)$ より,

$-1=3k$, $x=6k$

よって, $k=-\dfrac{1}{3}$　したがって, $\boldsymbol{x=-2}$

(2) $\vec{a}/\!/\vec{b}$ より, $\vec{a}=k\vec{b}$ とおける。

$(x+3,\ -x)=k(-2,\ 3)=(-2k,\ 3k)$ より,

$x+3=-2k$, $-x=3k$

よって, $k=3$　したがって, $\boldsymbol{x=-9}$

6 (1) $\overrightarrow{\mathbf{OA}}=\boldsymbol{(-1,\ 3)}$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\boldsymbol{\sqrt{10}}$

(2) $\overrightarrow{\mathbf{AB}}=(4-(-1),\ -2-3)=\boldsymbol{(5,\ -5)}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{5^2+(-5)^2}=\sqrt{50}=\boldsymbol{5\sqrt{2}}$

(3) $\overrightarrow{\mathbf{BC}}=(1-4,\ 2-(-2))=\boldsymbol{(-3,\ 4)}$

$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{25}=\boldsymbol{5}$